

## חידות ואתגרי חשיבה, המפתחים מיומנויות לוגיות מתמטיות

ד"ר אביקם גזית

תכנית הלימודים במתמטיקה לבית-הספר היסודי כוללת פתרון בעיות בנושא בפני עצמו. ואולם, במרבית הפעילויות הלימודיות מזהות הבעיות הנלמדות עם תכנים אלגוריתמיים, הנלמדים לפני כן: חיבור, חיסור, חילוק וכפל במספרים שלמים ובשברים. פתרון בעיות מסוג זה מפתח אצל הלומד יכולת זכירה והעברת החוקים והתהליכים שלמד לבעיה מילולית, לא מעבר לכך. היינו רוצים שהמטרות המוצהרות של תכנית הלימודים, בעניין פיתוח חשיבה לוגית-מתמטית, הבאה לידי ביטוי ביכולת ניתוח, הסקה, הכללה, הערכה וכשרים אחרים, תוצגנה בתהליך פתרון בעיות. מרבית הבעיות המוצגות בספרים להוראת מתמטיקה בבית-הספר היסודי ובחטיבת הביניים, הן בעיות תלויות הקשר תהליכי מובהק עם הפעולות והחוקים הנלמדים, ואין בהן כדי לפתח חשיבה בקורתית ויצירתית. קטרין מרסת (1993, Merseht) מציגה במאמרה על התפיסה המוטעית, הקיימת במרבית בתי-הספר בארצות-הברית בקשר להוראת מתמטיקה, את הבעיה הבאה:

בעדר ישנן 125 כבשים ו-5 כלבים. בן כמה הרועה?...

לטענתה של מרסת, מדווחים מחקרים על שלושה מכל ארבעה תלמידים, שפותרים ונותנים תשובה מספרית !!!

תלמידים רבים עושים את התהליך הבא:

$$130 = 125 + 5 \dots \text{זה גדול מדי,}$$

$$120 = 125 - 5 \dots \text{זה עדיין גדול}$$

$$25 = 125 : 5 \dots \text{זה מתאים הרועה בן 25.}$$

בעולמו של הלומד הממוצע מהווה המתמטיקה אוסף של כללים שצריך לשלבם במצבים שונים - פתרון בעיות. אנשי חינוך מתמטי מדגישים את הצורך לפתח אצל הלומדים בצד החשיבה האלגוריתמית-התבניתית, נוסחתית, שהיא טכנית למדי, גם את החשיבה ההיוריסטית-החקירה העצמית והגילוי, בין אם עצמי או מודרך. פויה (1961) כותב: "המתמטיקה מתגלית ללומד בשני היבטים. ההיבט המכני-טכני: פעולות מסוימות, התרת משוואות וחישובים לפי כללים וחוקים קבועים; וההיבט השני - פתירת בעיות המצריכות שיקולים הגיוניים, פעילות יוצרת, מחשבה עקיבה ומציאת דבר מתוך דבר... תגלית גדולה עשויה לפתור בעיה גדולה, אך גרעין של תגלית יש בפתרונה של כל בעיה, ייתכן שהבעיה שלך אינה מן הקשות, אך אם היא מגרה את סקרנותך, ומביאה אותך לגילוי כושר ההמצאה שלך, ואם יעלה בידך לפתור אותה בכוחותיך אתה, עשוי אתה לטעום טעמו של מתח שבתגלית וליהנות מבדל הניצחון".

נושא פתרון בעיות חייב לצאת מהתחום הצר של בעיות מזוהות אלגוריתם, ולא רק לבדוק את יכולתו של הלומד להפגין יכולת לשלוף ידע צבור בזיכרון. יש לאפשר ללומד להתמודד עם מצבים חדשים, מסקרנים, מעניינים שאין בדרך לפתרונם מתכון ידוע מראש. בעיות ואתגרי חשיבה מסוג זה דורשים מהפותר לחפש שיטה, דרך, תהליך, מודל מתאים על סמך הגירוי המוצג לו, כאשר הידע הטמון בזיכרונו משמש בסיס לפתרון.

חידות ושעשועי חשבון עשויים לשמש אמצעי זמין, יעיל ומעניין לפתח מיומנויות חשיבה לוגית - מתמטית ובגליונות הקודמים של מספר חזק הוצגו כמה דוגמאות ובהן הצעות דידקטיות להדרכת הלומד לפתרון המשימות. משלר (1976) כותב בהקדמה לספרו: "...רואה אני בעיסוק בחידות חלק אינטגרלי של לימוד המתמטיקה, שאינו נופל בחשיבותו מכל נושא אחר. בין החידות ישנן קשות וקלות, ומה שקשה לאחד, לעתים קל לשני - לאו דווקא למוכשר יותר. אין כמו חידות לפיתוח כושר היצירה, ההבנה, העניין וההתלהבות...". פתרון חידות תלוי לא רק בפוטנציאל האינטלקטואלי של התלמיד, אלא גם במיומנויות המוליכות לקראת הפתרון, ובמודלים המתאימים להפעלת מיומנויות אלו.

ישנן גישות שונות המפרטות שלבים אפשריים בדרך לפתרון חידה, או כל משימה לוגית - מתמטית, ואחת מהן (גזית 1996) ממליצה על השלבים הבאים:  
א. קריאה ראשונה, "מרפרפת", של הבעיה מתחילתה ועד סופה.  
ב. קריאה שניה עניינית וערנית, תוך התמקדות בשני היבטים עיקריים:

1. איתור ה"עוקץ" - המטרה הנדרשת בחידה.

2. בידוד הנתונים הרלוונטי לפתרון החידה.

ג. תהליך החיפוש, הכולל שלושה מהלכים:

1. חיפוש המודל המתאים לפתרון, כגון טבלה, דיאגרמה, רישום, נוסחה ציור.

2. שלוב הנתונים הרלוונטיים במודל שנבחר.

3. מציאת הפתרון - השגת המטרה הנדרשת.

ד. תהליך בקורת הפתרון לבדיקת הלימה בין הפתרון לנדרש בחידה.

ה. הרגשה של ספוק וגאווה לפני המעבר לחידה הבאה...

ברור שהשלבים לעיל אינם חייבים להיות ברצף קווי, בבחינת צעד אחר צעד, ולעתים יתבצע חלק מהשלבים במקביל, או שנדלג על שלב זה או אחר. אדגים את כוונתי ואת שלבי פתרון בשתי חידות מתוך "חושבים לעניין" (גזית 1996) ואשאיר לכם למחשבה חידה שלישית.

◆ איזה ראשונה: שניים סיניק וכינוי קטן

סיני פוגש את שכנו לבית ושואל אותו לגיל שלושת ילדיו.  
 עונה לו השכן: "מכפלת הגילים של שלושת ילדי שווה ל-36,  
 וסכום הגילים שלהם שווה למספר הבית בו אנו גרים".  
 חושב הסיני ואומר: "אבל חסר לי נתון".  
 עונה לו השכן: "נכון, בני הבכור מנגן בכינור".  
 מה גיל שלושת הילדים? (במספרים שלמים, כמובן!)



נסו לחפש את ה"עוקץ" ולמצוא מודל מתאים להכנסת נתונים.  
 אם לא מצאתם, הרי לפניכם הפתרון.

◆ שניים סיניק וכינוי קטן - הטבלה

זו אחת החידות היפות והמעניינות לטעמי, ואני מקווה שגם אתם תיהנו ממנה.  
 ה"עוקץ" טמון בשכן, היודע את מספר הבית - ולמרות זאת אינו יכול להגיע לכלל  
 החלטה על גיל שלושת הילדים. הנתונים הרלוונטי לפתרון הם כל הצרופים האפשריים  
 לגיל שלושת הילדים. המודל המתאים לשלוב הנתונים הוא טבלה: יש לזכור שמכפלת  
 הגילים קבועה ושווה תמיד ל-36.

מספר הבית	הבן השלישי	הבן השני	הבן הראשון
38	1	1	36
21	1	2	18
16	1	3	12
14	1	4	9
13	1	6	6
13	2	2	9
11	2	3	6
10	3	3	4

האם אפשר להסיק מהטבלה מה מספר הבית שבו גרים הסיני ושכנו?

**דמז:** יש להתבונן במספרי הבתים...

כדי להגיע לפתרון צריך להבין מדוע לא הצליח השכן, היודע את מספר הבית, להגיע לפתרון אחד ויחיד. אילו גרו בבית מספר 38, הרי לא היה לשכן כל קושי לדעת את גיל שלושת הילדים: 1,1,36 (מצב נדיר במציאות, אך לא במתמטיקה...). לא היה כל קושי, גם אילו גרו בבית מספר 16, 21, או 14, שכן יש רק אפשרות אחת לגיל הילדים מול מספרי הבתים הללו בטבלה, וכך גם לגבי מספרי הבתים 10 או 11. מדוע אמר השכן שחסר לו נתון? מכיוון שהם גרים בבית מספר 13! אנחנו מסיקים על מספר הבית מתוך התנהגותו של השכן. למספר 13 יש שני צירופים שונים אפשריים של גיל הילדים 1, 6, 6 או 2, 2, 9. כדי לתת לשכנו נתון נוסף לפתרון, אומר הסיני: "בני הבכור מנגן בכינור" - רק באחד משני הצירופים של המספר 13 יש בן בכור: 2, 2, 9!

### סמני התחלקות....

#### ◆ חיבה לניה: אמאלקיס בלזרג'ו

נער מדלג בביתו על המדרגות ומגלה כי: אם הוא קופץ כל שתי מדרגות ומדלג על מדרגה בכל קפיצה, נשארת לו בסוף מדרגה אחת. אם הוא קופץ כל שלוש מדרגות (מדלג על שתי מדרגות), נשארות לו בסוף שתי מדרגות. אם הוא קופץ כל ארבע מדרגות, נשארות לו שלוש. אם הוא קופץ כל חמש מדרגות, נשארות לו ארבע. אם הוא קופץ כל שש מדרגות, נשארות לו חמש. אם הוא קופץ כל שבע מדרגות, לא נשארת אף מדרגה בסוף. מעל כמה מדרגות מדלג הנער בסך הכל, ובמילים אחרות, כמה מדרגות יש בבית?

#### ◆ אמאלקיס בלזרג'ו - הטטרון

חידה זו היא מפרי עטו של אלברט איינשטיין, בהיותו סטודנט, בתחילת המאה ה-20, פרסם לפרנסתו בעיתון שוויצרי. השלב הראשון בדרך לפתרון הוא להעביר ("לתרגם") את ספור המעשה לשפת חשבון - שפת המספרים. יש למצוא מספר, המתחלק ב-7 ללא שארית ("לא נשארת אף מדרגה בסוף")-אך משאיר שאריות הקטנות ב-1 מהמחלק, כאשר מחלקים ב-2, 3, 4, 5, 6 (נשארות 4, 5, 2, 3, 1 מדרגות ובהתאמה) יש דרכים אחדות לפתרון החידה. אך כדאי שתנסו לפתור את החידה ורק לאחר מכן עברו לקרוא את המשך הפתרון.

## דרך א'

מתוך נתוני החידה אפשר להסיק מסקנות אחדות המגבילות את האפשרויות: מסקנה ראשונה: המספר מתחלק ב-7 (זה נאמר ישירות). מסקנה שנייה: המספר אי זוגי, מאחר שאינו מתחלק ב-2 (משאיר שארית 1). מסקנה שלישית: המספר מסתיים ב-9! מדוע?  
המספר משאיר שארית 4 אם מחלקים אותו ב-5, ומספרים המקיימים תנאי זה בלבד מסתיימים ב-4 או ב-9, (למשל 34 או 19).  
ואולם, מאחר שהסקנו כי מספר המדרגות הוא אי זוגי, חייב להסתיים ב-9! אם נחבר את שלושת התנאים - מספר אי זוגי, המסתיים ב-9 ומתחלק ב-7 נקבל את המספר הראשון המקיים תנאים אלה 49. האם מספר זה מקיים את התנאים הנוספים של השאריות, המתקבלות עם החלוקה ב-3, 4, 6?  
מתברר שלא! 49 משאיר רק שארית ("מדרגה") 1, אם מחלקים אותו ב-3, וזה בניגוד לנתוני החידה ("נשארות לו שתי מדרגות"). לכן יש לחפש את המספר הבא אחרי 49, המסתיים ב-9 ומתחלק ב-7 ללא שארית.  
מהו מספר זה? ידיעת לוח הכפל מאפשרת לנו להתחיל לחפש שוב, בניסוי ותעייה, רק אחרי 70. עד מהרה תגיעו למספר הנדרש - 119.

## דרך ב'

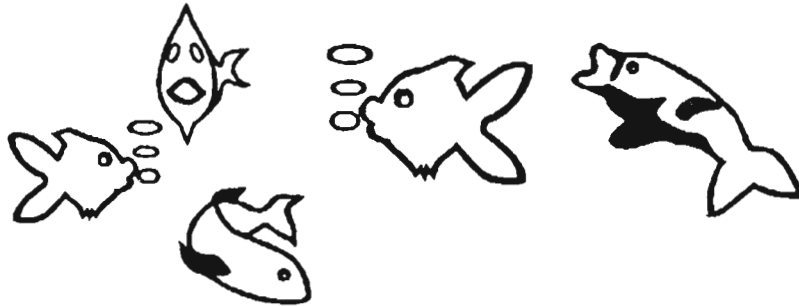
דרך אחרת לפתרון החידה היא לחפש את הכפולה המשותפת הקטנה ביותר של 2, 3, 4, 5, 6 ולחסר מכפולה זו 1! מדוע? נראה בחידה, שהשארית (מספר המדרגות שנוותר) המתקבלת כאשר מחלקים ("קופצים") ב-2, 3, 4, 5, 6, קטנה תמיד ב-1 מהמחלק: 1, 2, 3, 4, 5, בהתאמה.  
הכפולה המשותפת הקטנה ביותר היא  $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ , ואם נחסר 1, נקבל 59. מספר זה עונה לתנאי השארית (בדקו!) אבל האם הוא מתחלק ב-7? הכפולה המשותפת הבאה אחרי 60 היא  $60 \times 2 = 120$ , ואם נחסר 1 נקבל 119 - מספר המקיים את תנאי השארית ואף מתחלק ב-7 ללא שארית.

## דרך ג'

למספרים המתחלקים ללא שארית ב-7 יש תכונה מעניינת, אם נרשום אותם בסדר עולה - 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70 - נבחין כי בכל עשירייה רצופה יש כל הספרות מ-0 עד 9, כספרת אחדות פעם אחת (ניתן לבדוק זאת גם אחרי 70).  
אם המספר הראשון המתחלק ב-7 ומסתיים ב-9 (ספרת אחדות) הוא 49 - אך מצאנו כי 49 אינו מקיים את התנאי הנוסף - אזי יש להוסיף 70, כדי לקבל את המספר הבא המסתיים ב-9:  $49 + 70 = 119$  וזהו אכן מספר המדרגות, כפי שגילינו בשלוש דרכי פתרון שונות.

◆ חובה שליוטיג: ציור אוהב ציור

דייג ודייגת נעמדו על קורת שיווי משקל בעלת נקודת משען.  
הדייגת שוקלת 75 ק"ג, והדייג 90 ק"ג. הקורה מאוזנת. השניים מתחלפים  
במקומותיהם, ועקב כך מאבדת הקורה את האיזון.  
הדייגת לוקחת בידיה את הדג שתפסה, וראה זה פלא: הקורה חוזרת להיות מאוזנת!  
מה משקל הדג?



ניתן לשלוח פתרונות למערכת "מספר חזק" ולחכות לגיליון הבא....

מקורות:

גזית, א' (1996), חושבים לעניין, מסדה, גבעתיים.

משלר, מ' (1976), אלגברה לשנת הלימודים השביעית, הקיבוץ המאוחד, תל אביב.

פויה, ג' (1961), כיצד פותרין, אוצר המורה, תל אביב.

Merseth, k. k. (1993), How old is the shephred? Harvard j. of education.