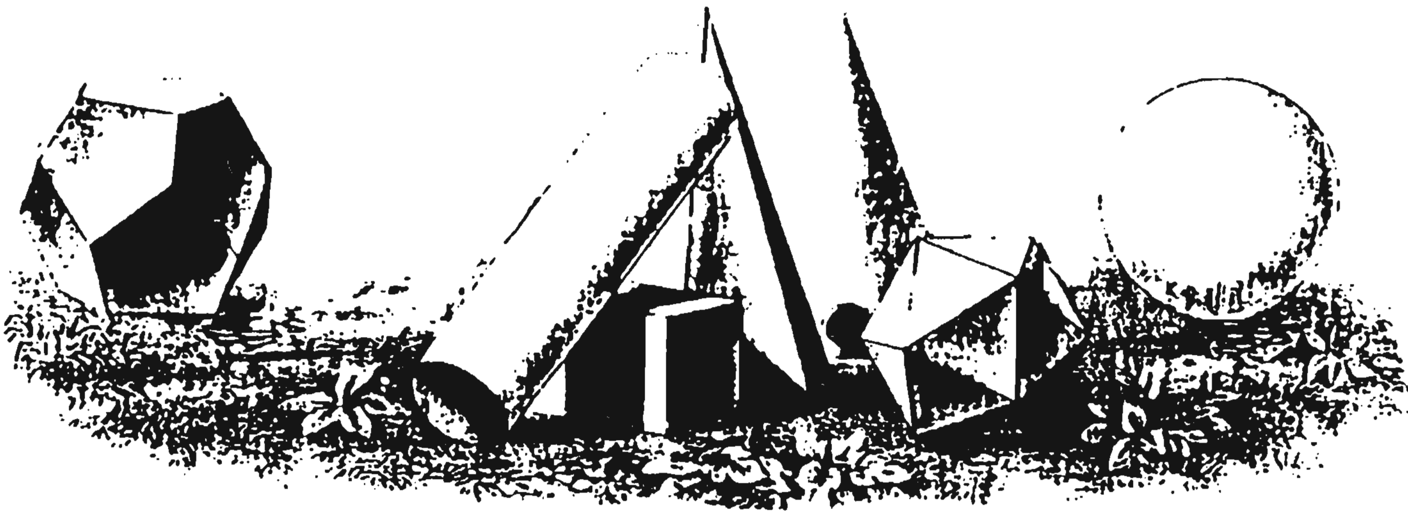
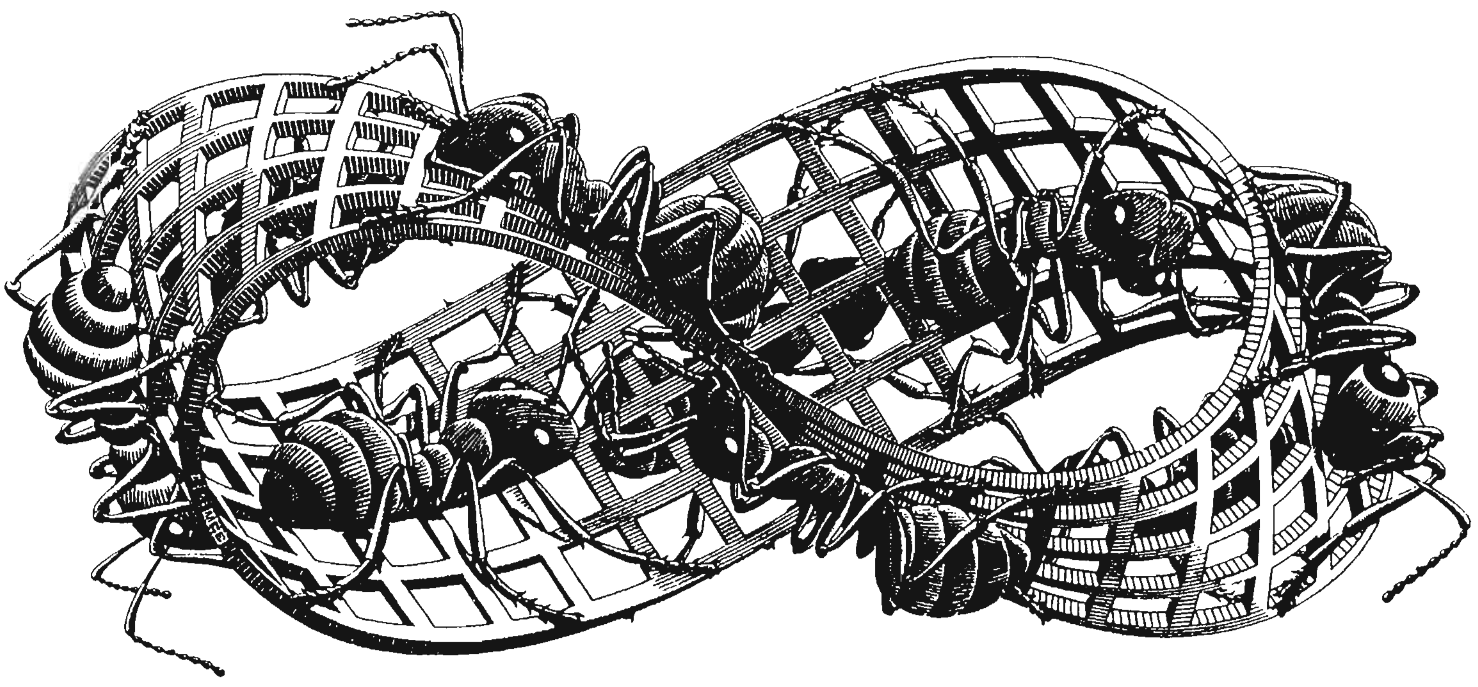


צורה ומרחב

טבעת מביוס המופלאה

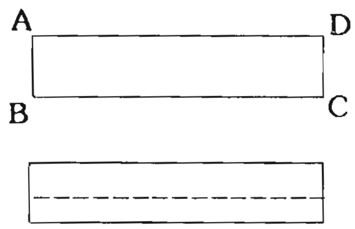
בת־שבע אילני

טופולוגיה, היא ענף במתמטיקה, העוסק בתכונות של צורות גיאומטריות שאינן מושפעות מכיווץ, מתיחה או פיתול. הצורה משתנה רק על ידי קריעתה, או על־ידי הצמדת חלקים שונים שלה. זהו סוג של גיאומטריה, השונה מהגיאומטריה המוכרת - הגיאומטריה האוקלידית - נלמדת בבית הספר. הגיאומטריה הטופולוגית חובקת בתוכה פעילויות שאפשר לעשות עם ילדים החל מהגיל הרך ובכללן גם שימוש באמנות. דוגמאות לשימוש באמנות אפשר למצוא בעבודותיו המרתקות של הצייר ההולנדי מ.ק. אֶשר (Escher,1898-1972). אֶשר השתמש בטבעת מביוס - שהיא "יצור" טופולוגי, כדי ליצור חלק מיצירותיו המפורסמות לדוגמא - ציור הנמלים.



בעבודה זו אפשר לראות 9 נמלים ההולכות בזו אחר במסלול אין סופי. הנמלים מהלכות הן על צידו הקדמי, והן על צידו האחורי של הסרט.

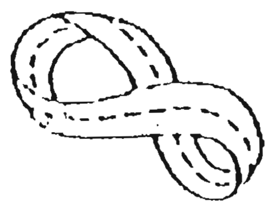
נשאלת השאלה, מה מיוחד בטבעת מביוס?



כדי לענות על שאלה זו ניצור תחילה טבעת רגילה:
ניקח פיסת נייר מלבנית

בצד אחד, נעביר עליה קו מרוסק בצבע אדום
ובצדה האחר קו מרוסק בצבע שחור.

לסרט זה שני צדדים, אם נחבר את שני קצות הסרט, נקבל טבעת רגילה שיש לה שני צדדים: פנים וחוץ ; כאשר "מטיילים" לאורך הקו המרוסק השחור (נניח שהוא נמצא בצד החיצוני של הטבעת), לעולם לא נגיע אל הקו האדום, כלומר לצדה הפנימי של הטבעת. אם נגזור את הטבעת לאורך הקו המרוסק, נקבל שתי טבעות נפרדות, הדומות לטבעת המקורית. אולם אם נחבר את קצות הסרט בצורה הבאה: נקודה C תתחבר אל נקודה A, ונקודה D תתחבר אל נקודה B, כלומר, החיבור יהיה על־ידי חצי סיבוב של אחד מקצות הסרט, אזי נקבל טבעת הנראית כך:

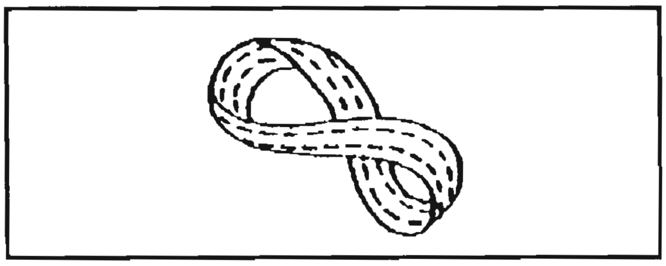


מה הפנים ומה החוץ של טבעת זו? כדי לבדוק זאת, "נטייל" לאורך הקו המרוסק ונראה שאנחנו עוברים מהצבע האדום אל השחור, ושוב אל האדום, וחוזר חלילה. מה אפוא הפנים ומה החוץ של טבעת זו? מסתבר שלטבעת זו אין פנים ואין חוץ. אם נגזור את הטבעת לאורך הקו המרוסק, נקבל הפעם הפתעה (בכל שלב, לפני ביצוע הגזירה, רצוי לשאול את הילדים, מה לדעתם יתקבל כאשר נגזור את הטבעת?), נקבל טבעת מפותלת דו־צדדית אחת בלבד (כדאי לתת לילדים לבדוק את מספר הצדדים של הטבעת למשל על־ידי צביעת הטבעת ללא הרמת העיפרון). הגזירה, הפעם, הוסיפה צד נוסף (במקום טבעת נוספת, שנוספה בגזירה של הטבעת הרגילה).

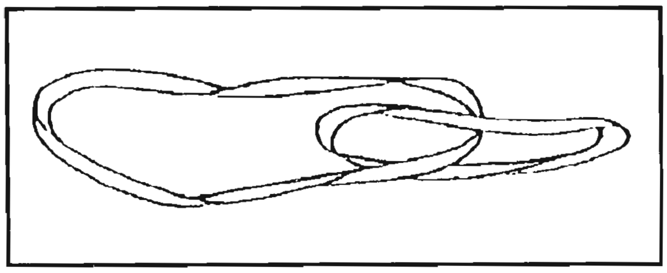
אם נצייר שני קווים מרוסקים על הטבעת המקורית, ונגזור לאורכם, נקבל שלוש טבעות ואולם אם נחתוך את טבעת מביוס לאורכם של שני קווים מקבילים (ראה שרטוט בהמשך), אזי נגלה הפתעה נוספת: המספריים נעים פעמיים מסביב לרצועה, אבל מבצעים רק חיתוך אחד רצוף. התוצאה הסופית תהיה - שתי רצועות סגורות המשולבות זו בזו: רצועה אחת דו־צדדית ורצועה אחרת חד־צדדית - טבעת מביוס חדשה.

שני קווים מקבילים על טבעת מביוס:

לפני הגזירה



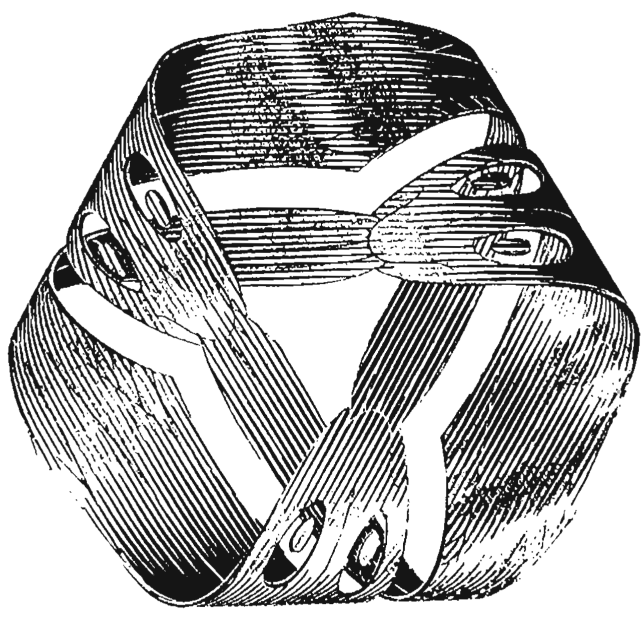
אחרי הגזירה



הילדים יכולים לצייר ולצבוע את הרצועות, וכמו כן הם יכולים ליצור שלל יצירות לקישוט הגן ובית־הספר. בנוסף על הפעילות המתמטית, שבה דנים על "פנים" ו"חוץ" ונחשפים לסוג נוסף של גיאומטריה, יש כאן פעילות יצירתית מהנה, המפתחת את הדמיון ואת היצירתיות, ובאמצעותה גם למדים איך נוצרו יצירות אמנות מפורסמות.

עבודה נוספות של אשר, המבוססת על טבעת מביוס:

סרט מביוס 1, תחריט עץ מודפס מארבעה לוחות, 1961: סרט אין־סופי נחתך לכל אורכו. שני החלקים הורחקו מעט באופן שחלל פתוח מפריד ביניהם סביב - סביב. הסרט היה אמור אפוא להתפרק לשתי טבעות נפרדות זו מזו, אך דומה כי הוא עשוי רצועה אחת המורכבת משלושה דגים, שכל אחד מהם נושך בזנבו של הבא לפניו. הדגים עושים שני סיבובים טרם הגיעם אל נקודת המוצא.



במאמר זה עסקנו במושגים גיאומטריים היכולים להשתלב כפעילות חקר וגילוי בכל גיל. רצוי להציג את הבעיות המוזכרות במאמר, לבקש מהילדים לשער מה יקרה ולאחר מכן לבצע את הפעילות ולאמת את ההשערות.

מקורות:

שישא, 1977, מתמטיקה ומתמטיקאים, מסדה, גבעתיים.

ברגמיני, ד' (1963), מתמטיקה - הסיפריה המדעית של לייף, ספריית מעריב, תל־אביב.

אשר, מ.ק. (1994) עבודות גראפיות, סטימצקי, תל־אביב.