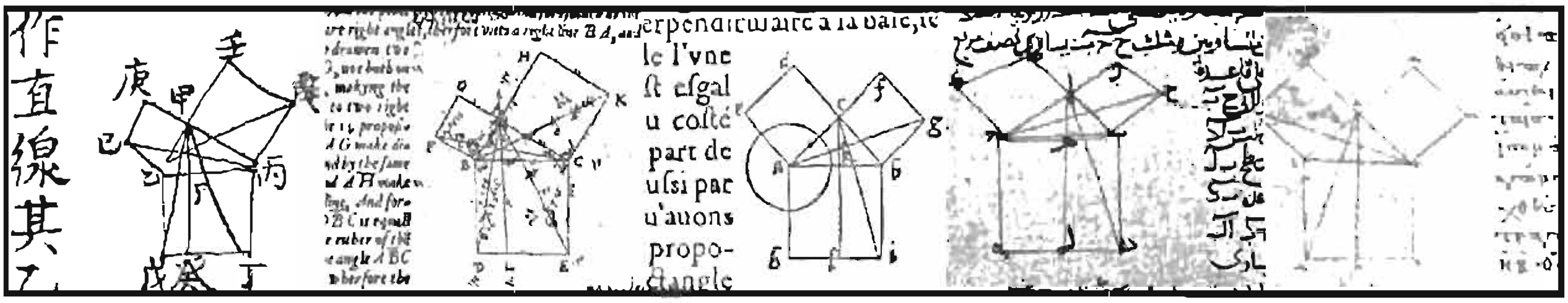


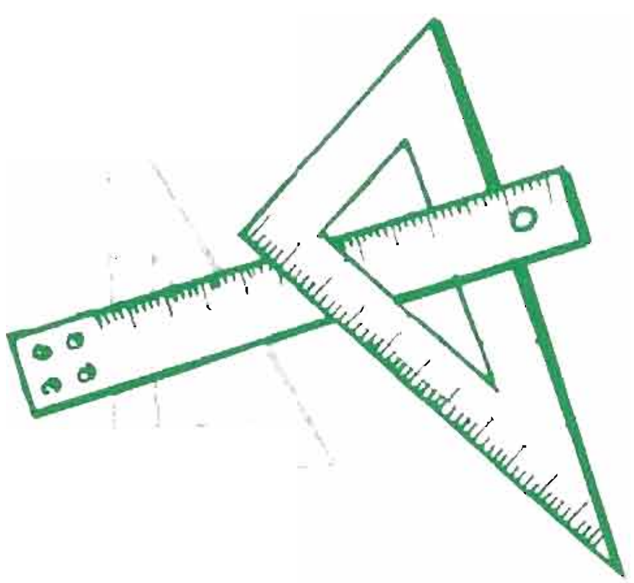
ד"ר אביקם גזית

היסודות של אאוקלידס - הבסיס להנדסת המישור ולענפי מתמטיקה אחרים

במחקר חלוץ על הוראת תולדות המתמטיקה כחלק מתכנית הלימודים בבית-הספר היסודי ובחטיבת-הביניים, שערכתי בימים אלה, נשאלו תלמידי כיתה ט', הקבצה א' על המקור להנדסת המישור. כמחצית מבין 52 הנשאלים(וזה גרם לקצת נחת...) ידעו שהמקור הוא יווני לפני הספירה.
אולם, כאשר הוצגה לפניהם רשימת דמויות מתולדות המתמטיקה, הכירו רק 5 (כ - 10%) את השם אאוקלידס, ואחד מהם אף הגדיר כפילוסוף רומאי...
אציין, שהדמות ה"פופולארית" מבין המתמטיקאים הוא ארכימדס, בן תקופתו של אאוקלידס וממשיכו ב"תור הזהב" של המתמטיקה היוונית באלכסנדריה.
את ארכימדס אמנם הכירו 40 (כ - 80%) מבין הנשאלים, אך רובם ככולם ידעו על תרומתו לפיזיקה ולאו דווקא למתמטיקה.

משה מסר את התורה לעם, וזקני ישראל העבירו לאותם צאצאים אשר תרגמו את התנ"ך ליוונית באלכסנדריה. ניתן להניח שתלמידים רבים ברחבי העולם שמעו על משה רבנו, לא כל שכן תלמידי ישראל.

על אאוקלידס, אשר ערך את תורת הגיאומטריה, שמעו רק כעשירית מתלמידי חט"ב שבמדגם הנדון, אשר "נאלצים" לבלוע את הגלולה שרקח אותו גאון.
ומה מייחד את הגישה שבה ערוך ספר היסודות (האלמנטים) ? הגישה היא פוסטולטית - דדוקטיבית, הווה אומר, שהמבנה הלוגי מושתת על סדרת היגדים - אמיתות שלא ניתן להוכיח ולא ניתן לשלול (אקסיומות ופוסטולטים) ומתוך האמיתות הללו מגיעים בדרך דדוקטיבית להוכחת משפטים ובעיות שונות.



כאן המקום להבחין בין אקסיומה לבין פוסטולט. אקסיומה היא הנחה מוסכמת ומקובלת המתאימה לכל תחום ואילו פוסטולט הוא עיקרון או טענה, שניתן ליישם בתחום דעת מסוים, כמו פילוסופיה או גיאומטריה אאוקלידית. בספרי לימוד הגיאומטריה (אספים, אבירי, גורן, חטיבה, קלעי - תוחמן ואחרים) משתמשים במושג אקסיומה להצגת הפוסטולטים, והמפורסם שבהם הוא הפוסטולט על העברת קו מקביל אחד במישור, מנקודה הנמצאת מחוץ לישר נתון.

לפני הצגת הפוסטולטים והאקסיומות פותח ספר היסודות בסדרה של 23 הגדרות. אאוקלידס מגדיר נקודה, קו, מישור ועוד מונחים, באופן מעניין וניתן אפילו לומר "אקזוטי"... היום אנו משתמשים במונחים נקודה וקו כמובנים מאליהם, כדי לצאת מהמעגליות של קו, המהווה אין-סוף נקודות ושל נקודה המהווה את מקום החיתוך של שני קווים...
אאוקלידס מגדיר

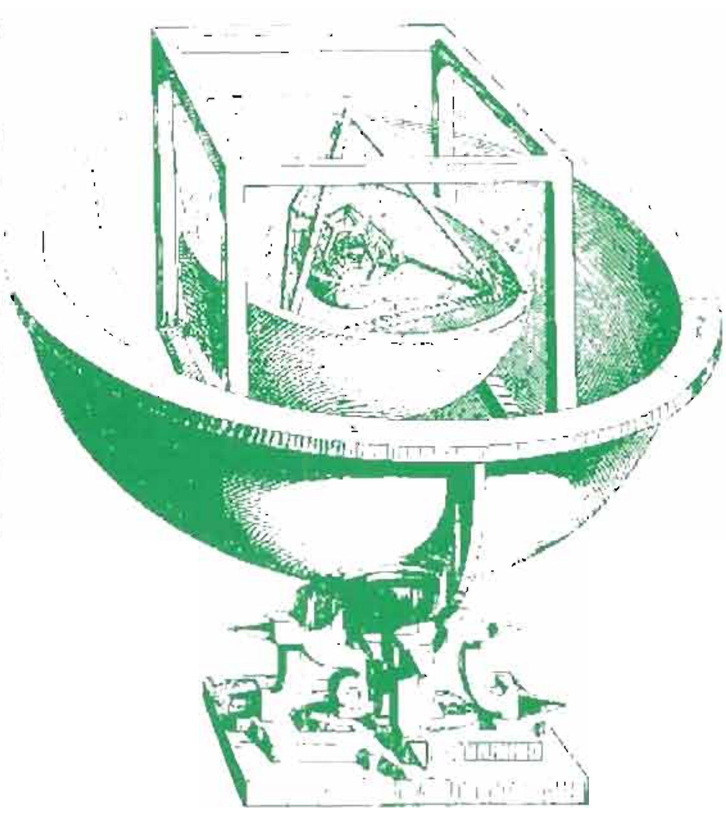
נקודה: משהו ללא חלק...
קו: אורך ללא רוחב...
מישור: משהו בעל אורך ורוחב... מקורי, יצירתי ובעצם גם נכון למרות הניסוח הלא מתמטי לכאורה.

לאחר ההגדרות מגיעים חמישה פוסטולטים, המהווים, כאמור, אמיתות אשר לא ניתן להוכיח ולא לסתור אותן בתחום הגיאומטריה:

א. ניתן לחבר כל שתי נקודות בקו ישר.
ב. ניתן להאריך קו ישר ברציפות ללא הגבלה.
ג. ניתן לרשום מעגל אם נתונים - נקודת האמצע ורדיוס - קטע היוצא מנקודת האמצע.
ד. כל הזוויות הישרות שוות.
ה. הפוסטולט המוכר יותר מהאחרים: מנקודה הנמצאת מחוץ לישר באותו המישור, ניתן להעביר רק קו מקביל אחד.

האקסיומות, שכותב אאוקלידס לאחר הפוסטולטים, גם הן אמיתות אשר לא ניתן להוכיח או לסתור, אך הן מהוות הנחות, המוסכמות ומקובלות בתחומי דעת שונים (COMMON NOTIONS):

א. דברים השווים לאותו דבר שווים ביניהם (בגיאומטריה מיישמים את האקסיומה הזו לקווים, זוויות וכו').
ב. כאשר מחברים גדלים שווים לגדלים שווים, מקבלים דברים שווים.
ג. כאשר מחסרים גדלים שווים מגדלים שווים, מקבלים דברים שווים.
ד. דברים המתלכדים זה עם זה, שווים זה לזה (בגיאומטריה מיישמים את האקסיומה הזו במשפטי החפיפה).
ה. השלם יותר גדול מחלקו.



על יסוד עשר האמיתות הנ"ל - חמשת הפוסטולטים וחמש האקסיומות - יצר אאוקלידס בהיגיון מדויק ושנון את המבנה של היסודות, המחולק ל - 13 ספרים. ארבעת הספרים הראשונים עוסקים במצולעים ובמעגל, ומשפט פיתגורס מופיע בספר הראשון. הספר החמישי עוסק בהגדרת פרופורציות שהציע המתמטיקאי היווני אאודוקסוס (במאה הרביעית לפנה"ס), שלא הוזכר בחוברות הקודמות, אך תרם תרומה מבריקה להוכחות רבות. בספר השישי מיושמים משפטי הפרופורציה למשולש ולשאר המצולעים. הספרים השביעי, השמיני והתשיעי עוסקים באריתמטיקה, תורת המספרים. הספר העשירי מכיל 115 משפטים מופשטים בתחום הגיאומטריה הטהורה, ואילו הספרים ה - 11 וה - 12 עוסקים בהנדסת המרחב.
הספר ה - 13 האחרון בסדרה עוסק בחמשת הגופים המשוכללים היחידים הקיימים: פרמידה משולשת (טטרהדרון), קובייה, אוקטהדרון - גוף המורכב משתי פרמידות מרובעות בעלות בסיס משותף, דודקהדרון - גוף המורכב מ - 12 מחומשים

משוכללים, איקוסהדרון - גוף הבנוי מ - 20 משולשים שווי צלעות. הפיתגוראים ידעו על הימצאותם של חמישה גופים משוכללים, הנקראים גם גופים אפלטוניים, ואילו אאוקלידס הוכיח שאין יותר מחמישה גופים משוכללים.
כל המשפטים המופיעים בספרי הלימוד העכשוויים בגיאומטריה , מופיעים בספר היסודות, שערך אאוקלידס ונחשב גם כיום לספר הלימוד בעל ההשפעה הגדולה ביותר בהיסטוריה של המדעים.
לספר היסודות הייתה השפעה רבה גם על ענפי המתמטיקה השונים כמו אלגברה, חשבון דיפרנציאלי - אינטגרלי ותורת המספרים. בקיצור , ניתן לסכם בכינוי שנתן איינשטיין לספרו של אאוקלידס והוזכר בגיליון מס' 14: "הספר השמימי", והוא לא התכוון לתנ"ך, שתורגם ליוונית באותה תקופה בערך ובאותה העיר - אלכסנדריה....
אאוקלידס ערך את ספרו באופן לוגי, מדויק ומסודר להפליא, והשתמש בכל הידע המתמטי שנצבר עד לתקופתו בידי המתמטיקאים היוונים שקדמו לו: תאלס, פיתגורס, היפוקראטס, אאודוקסוס ואחרים.
את כל הידע שהצטבר הכניס אאוקלידס לתוך מבנה אחיד: פוסטולטי - דדוקטיבי, והוסיף גם הוכחות משלו לחלק מהמשפטים.
כדי לא לסיים בהרגשה שאאוקלידס עסק רק בעריכה של אחרים ורק בגיאומטריה, הנה אחת ההוכחות מתוך הספר התשיעי, העוסק בתורת במספרים.
משפט מס' 20: מספרם של המספרים הראשוניים הוא אין-סופי.

ההוכחה של אאוקלידס היא על דרך השלילה, וגם תרומה דידקטית זו מהווה פן מעניין וחשוב בספר היסודות.
ההוכחה: נניח שמספרם של כל המספרים הראשוניים הוא סופי. אם כך, ניתן לכפול את כולם ברצף ולקבל מספר אחד המהווה את מכפלתם (נסמן את המכפלה ב - N) נוסיף למכפלה המתקבלת 1 ונקבל N+1.
המספר החדש שהתקבל (N+1) יכול להיות מספר ראשוני או מספר לא ראשוני. אם הוא ראשוני, אז ההנחה שמספרם של המספרים הראשוניים הוא סופי הופרכה. אם המספר (N+1) אינו ראשוני, אז הוא חייב להתחלק ללא שארית לאחד המספרים הראשוניים שנכתבו. התחלקות זו בלתי אפשרית, מכיוון שחילוק של (N+1) בכל אחד מהמספרים הראשוניים, שהנחנו שמספרם סופי, משאיר שארית 1, ולכן המספר החדש שנוצר (N+1) הוא מספר ראשוני נוסף, השונה מהמספרים האחרים. מכאן שיש סתירה, ולכן מספרם של המספרים הראשוניים הוא אין-סופי.
זו הוכחה יפה, אלגנטית, וניתן להעבירה באופן אינטואיטיבי, תוך כדי המחשה, גם בכיתות הגבוהות של בית-הספר היסודי, ובמיוחד את הגישה של הוכחה על דרך השלילה.
אני מקווה שסקירה קצרה זו על אאוקלידס והיסודות תיתן זווית ראייה שונה, מעניית ורחבה יותר להוראת הגיאומטריה הן בבית-הספר היסודי והן בחטיבת הביניים.

מקורות:
אונגרו ש. 1989, מבוא לתולדות המתמטיקה, האוניברסיטה המשודרת, משרד הבטחון.
שישא אליעזר, 1977, מתמטיקה ומתמטיקאים, מסדה.