



גאולה ויצמן

אל המכפלה הגדולה ביותר - מדברים ועושים מתמטיקה

בעקבות שיעורי ההדגמה נערך דיון שלאחר הצפייה, כי טוב מראה עיניים ולא רק הלך נפש.

הקדמה - רקע והערות

השיעור הודגם בכיתה ה' במסגרת ההרחבות והחזרות על פעולות במספרים טבעיים גדולים. במכוון נבחר נושא "פשוט" הקשור לתכנית החובה.

- נושא הפעילות קשור לכפל מאונך, והוא נועד להעמיק את ההבנה ברעיונות הקשורים בו.
- קבוצות הלמידה הן הטרוגניות. (הערה: אפשר לקיים שיעור זה גם בכתה ד', רצוי לאחר לימוד הנושא כפל מאונך).
- הציוד הדרוש: מחשבונים, דפי A4 גזורים לרוחבם, לחצאים ולשלישים, שישה טושים עבים (אחד לכל קבוצה), פוליגל עם שורות אטבים לרוחבו, במרחק של קצת למעלה מחצי עמוד (הוא נועד לאיסוף ולשימור אינפורמציה של הקבוצות השונות, שתשמש בסיס לחקר ולמידה), דפי עבודה.

הנחות על ידע קודם של התלמידים:

- הילדים מבינים¹ היטב את העקרונות המתמטיים המרכזיים הקשורים לכפל מאונך:
- רעיון הפוזיציה של המבנה העשרוני ועקרון ההמרה.

1. להבין פירושו היכולת ללכת מעבר לתכנים, (Perkins, 1990), אשר על כן, חשוב בהוראה לבנות על האינטואיציה ועל הניסיון הקודם של התלמידים, כי למידה משמעותית עשויה לקרות רק אם התלמיד מקשר בעצמו את הידע החדש לידע הקודם.

מאז העשור הקודם מתקיים בקהילייה של החינוך המתמטי דיון רחב בצורך לחשוב על הוראת מתמטיקה לא כעל העברת תכנים, אלא כעל הוראה המערבת את התלמידים בתהליכים של "עשיית מתמטיקה" (Lerman 1990). לדעתי עשייה זו באה, בעקבות דיונים ברעיונות בהקשר למצבים העוסקים בפתירת בעיות.

במאמר זה מודגמת פעילות בהדרכת מורים. אחת ממטרותי היא לנפץ את המיתוס הרווח בקרב הציבור, ובכללם המורים, שהיכולת לחשיבה מתמטית היא נחלתם של יחידי סגולה. אני מצדדת באמונה המנוגדת, זו מובעת היטב בדברים שכתב ג'ון מסון (J. Mason, 1992) בספרו "חושבים מתמטית": "כל אדם יכול לשפר את יכולת החשיבה המתמטית שלו על-ידי אימון ורפלקציה". מסון מייחס חשיבות מרכזית לרישום קשיים, הערות ורעיונות, שעולים במהלך ההתמודדות עם הבעיה. הוא גם מסביר, שחשיבה מתמטית יש לעורר באמצעות סתירות, מתח והפתעה. לא אחת טוענים המורים שאפשר לעשות זאת רק עם אוכלוסיית התלמידים ה"חזקה" ובמסגרת נושאים ייחודיים מחוץ לתכנית החובה. ועוד הם טוענים, לכך שאין פנאי, שהרי המערכת דורשת "להקיף" חומר. לפיכך נראה לי, שעם מעט דמיון אפשר לתכנן שיעורים רבים במתמטיקה על בסיס חומר מתכנית הלימודים, שנראה לכאורה טריוויאלי, כשיעורים שיש בהם הפתעה והם מזמנים למידת חקר לכל אוכלוסיית התלמידים. כדי לשכנע בנכונות הרעיונות האלה אני נוהגת להדגים, במסגרת ההדרכה, שיעורים שצופות בהם המורות המודרכות.

- כפל בעל פה בחזקות 10 ובכפולות של 10, 100, 1000 וכו'.
- חוק הפילוג

מהלך

א. שיחת פתיחה

לפני תחילת הפעילות ניהלתי שיחה קצרה בנושא: מה זה לחקור? מה עושה החוקר? הסברי התלמידים נרשמו על כרטיסים (עם שם המציע) והוצמדו ללוח נייד.

עיקר הדברים שאמרו התלמידים היו:

בלש, פותר תעלומה, סקרן, שואל שאלות, מחפש עקבות, מוצא סוד, מוצא דברים חדשים, מחפש תשובות, פתרון בעיה, עושה ניסויים, מסקנות, מגלה קשרים, מוצא רמזים.

התלמידים גילו התלהבות ומעורבות. הדגשנו בשיחה את עבודתו המאומצת והממושכת של

ב. הצגת הפעילות במליאה

לאחר שבדקתי קצרות שהמושגים: ספרות, מספרים, מכפלה, גורמים - הקשורים לפעילות - הם חלק מהשפה המתמטית הדבורה של הילדים, ושהם יכולים לפרש שמשמעות "ההצלבה" של המכפלה 7 ב-8 בתרגיל:

$$\begin{array}{r} 576 \\ \times 83 \\ \hline \end{array}$$

היא: 8 עשרות כפול 7 עשרות שהם 56 מאות -- < 5600

הצגתי במליאה את המשחק שיעמוד במרכז הפעילות בשיעור:

בעזרת חוגת מספרים 0-9 בחרנו אקראית 5 ספרות שונות זו מזו: 3, 1, 7, 4, 6 כל ילד התבקש להרכיב מהם שני מספרים, תלת-ספרתי ודו-ספרתי על-פי התנאים האלה:

יש להשתמש בחמש הספרות, בכל ספרה פעם אחת בלבד; המטרה היא לבנות את המספרים כך שמכפלתם תהיה הגדולה ביותר.

			גורם תלת ספרתי
X			גורם דו ספרתי

?

המכפלה הגדולה ביותר

הערתי שהשיטה של **אריאל** מעניינת משתי סיבות: ראשית משום שהקיש מהתרגיל הקודם, ושנית משום שהוא תרם רעיונות חשובים לקידום הדיון בבעיה.

המורה: מדוע ההחלפה הזאת שינתה את המכפלה?
לא היתה כל תגובה.

הוספתי לשאלו: האם שינינו משהו בכפל 6 ב-7?
בואו נבדוק.

אביב

לא הוספנו כואם כי 700 כפול 60 זה בדיוק כמו 70 כפול 600.

המורה: מה בכל זאת "הרווחנו"?

אנה

מכפול של העשרות, מ-60 כפול 40, עברנו ל-70 כפול 40, הרווחנו 400.

בעוד אנה מדברת קפץ לפתע אביב וקרא בהתלהבות:

אביב

מ3אני מכפלה גדולה יותר!

$$\begin{array}{r} \times 631 \\ 74 \\ \hline 46,694 \end{array}$$

ומיד קראה **ימית** בשמחה:

מ3אני עוד יותר גדולה

$$\begin{array}{r} \times 641 \\ 73 \\ \hline 46,793 \end{array}$$

(ימית, תלמידה בינונית, לפי עדות המורה) גם כאן דנו במליאה במה שונות שתי המכפלות, ובעיקר הודגש מה תרמה החלפת מקום הספרות ב"הצלבה" 3 ו-4 ההסבר של הילדים נסמך על הדיון בהצלבה 6 ו-7.

מורה: בכמה גדולה המכפלה של ימית מזו של אביב? ביותר ממאה, או בפחות ממאה?

הילדים השיבו במקהלה: **ביותר ממאה!!!** ביקשתי לחזור ולהתבונן היטב, ראיתי שרבים השתמשו במחשבון לבדיקה וענו בקול: ב-99. **המורה: האם אפשר לדעת זאת מבלי לבצע את החישוב? הסתכלו היטב במכפלות!**

לאחר זמן, **אריאל**, שלא השתמש במחשבון, הסביר

אריאל

הסבילתי רק על הסוף של המספר על שיש הספרות האחרונות בראשון יותר במאה אגר-כך זה אותו דבר בעשרות, אבל באגרות המספר השני יותר באגד אז צריך להוסיף ממאה אגד יוצא 99.

בקשתי מכל תלמיד לכתוב במחברת את הניסוי הראשון שלו ולהסביר בכתב מדוע בחר במספרים אלה דווקא. הצעות שונות נכתבו על הלוח בציון שם המציע. נערך דיון קצר בהצעות. תלמידים שהיתה להם אותה הצעה צורפו לרשימה והוסיפו נימוקים לבחירה שלהם.

חן

$$\begin{array}{r} \times 461 \\ 73 \\ \hline 17,057 \end{array}$$

ההסבר: סתם עשיתי כלי המשכה ספרות שלמ3אני במחשבון.

הגר

$$\begin{array}{r} \times 764 \\ 31 \\ \hline 23,684 \end{array}$$

ההסבר: ברגתי את המספר הגלם-ספרתי הגדול ביותר שאפשר להרכיב מהספרות הגדולות ביותר, ומהספרות האגרות הרכבתי את המספר הדו-ספרתי הגדול ביותר.

תלמידים שהיתה להם אותה ההצעה הצטרפו עם הסברים משלהם.

רון

$$\begin{array}{r} \times 743 \\ 61 \\ \hline 45,323 \end{array}$$

ההסבר: גילקתי ספרה פעם אמספר אגד ופעם אמספר השני. שמתי את הספרה הגדולה ביותר במאת של הגלם-ספרתי ואגר כך את הספרה הבאה בגור בעשרות של הדו-ספרתי, וכך האלה.

לדור היתה אותה הצעה והוא הביא הסבר אחר לבחירה

דור

ברגתי ב-6 וב-7 כי 6 עשרות כפול 7 מאת יוגן מספר גדול ביותר.

המורה: יש מישהו שמצא מכפלה גדולה יותר?

אריאל

כן, אבל לא בניסוי הראשון שלי.

ביקשתי ממנו להציג את הניסוי שלו:

אריאל

$$\begin{array}{r} 643 \\ \times 71 \\ \hline 3,5645 \end{array}$$

ההסבר: הסבילתי על הגרבי של רון והגלפתי את מקום הספרות את 6 שמתי במקום המאת ואת 7 בעשרות של המספר השני.

הילדים התבקשו לכתוב תחילה באופן פרטני את הרעיונות שלהם לפתרון הבעיה: הם העלו רעיונות שונים; רובם הסבירו באמצעות דוגמאות ספציפיות ולא הצליחו להכליל. שני ילדים בלבד הגיעו לרמת הפשטה גבוהה והכלילו ברמה של אלגברה מילולית; אחד מהם אף הפתיע והציג את הפתרון בשפת סמלים.

אנה

אקראי את הספרה הגדולה ביותר ושתי אלה בעשרות של המספר השני. אחר-כך שתי את הספרה הגדולה שאמריה במאות של המספר הראשון בגלגל-ספרתי. את הספרה הכי קטנה שתי ביחידות שלו. נשארו לי שתי ספרות. את הגדולה יותר שתי בעשרות של הזרם הראשון, ואת הקטנה ביחידות של המספר הדו-ספרתי.

אריאל

סימנתי באלף בית את הספרות בסדר עולה:

א - הספרה הקטנה ביותר

ב - הספרה שאמריה

ג -

ד -

ה - הספרה הגדולה ביותר

ושתי במקומות הריקים כמו שהיה בדוגמה הראשונה שלק עז האו, שהסביר בהגלגל המשק.

א	ג	ד
---	---	---

גורם תלת ספרתי

ה	ב
---	---

גורם דו ספרתי

המכפלה הגדולה ביותר

ביקשתי מהתלמידים לבדוק את נכונות השיטה שהציע אריאל בדוגמאות משלהם ולמלא בטבלה בדף. אחר-כך גם בחנתי זאת בדוגמאות אחדות במליאה; בחרנו ספרות ועל התלמידים היה למצוא את המכפלה הגדולה ביותר. ביקשתי מהתלמידים לכתוב בשפתם את הכלל של אביב.

(אינני נוהגת לכתוב כללים על הלוח ולתת לתלמידים להעתיק, אלא לנסח אותם בלשונם על בסיס התנסויותיהם).

היה לי ברור שרוב הילדים לא ירדו לגמרי לסוף דעתו; ההסבר שלו הצביע על הבנת הקשר בין מחוסר למחסר. שיבחתי את ההסבר אך לא פירטתי, כדי שלא להסיח מהעניין המרכזי שבו דנים.

ג. פעילות בקבוצות – משחק

המורה: מצאנו את המכפלה הגדולה ביותר וראינו שהצלחנו לעשות זאת רק לאחר ניסויים רבים. עתה תתנסו במשחק זה בקבוצה.

כל קבוצה קיבלה חוגה להגדרת הספרות, "טוש" צבעוני, חצאים ושלישי דפים. הדגמתי להם כיצד לרשום את הספרות על שליש הדף ואת התרגיל של המכפלה הגדולה ביותר על חצי הדף. כל קבוצה צריכה להציג תוצאות של שני סיבובים לפחות. מסובבים את החוגה חמש פעמים או יותר ורושמים את הספרות שעלו בה. כל ילד בקבוצה מנסה להגיע למטרה – המכפלה הגדולה ביותר, ורושם במחברתו את תרגיל הכפל שבחר. התלמידים משווים ביניהם; התלמיד שהגיע למכפלה הגדולה ביותר זוכה ב-10 נקודות, ורושמים את התרגיל שלו, שקלע למטרה, על חצי הדף.

ד. דיווח, דיון והעלאת השערות במליאה

לאחר כרבע שעה החל איסוף הנתונים. נציג של כל קבוצה תלה אחד או שניים מהניסויים שלה על לוח הפולגל: הספרות, תרגיל המכפלה הגדולה ביותר, ובמהלך הדיווח הוספתי עוד עמודה – הספרות בסדר יורד (בנוי כדוגמת הדף), ובד בבד הילדים רשמו דוגמאות בדף העבודה.

המורה: התבוננו בדוגמאות שאספנו, האם יש קשר בין כל התרגילים, הרומז לנו איך להגיע למטרה?

אנה

מה שטו, הספרה הכי גדולה גהייה בעשרות של המספר הדו-ספרתי.

כדי לוודא אם הבינו, ביקשתי מהתלמידים להדגים תוך כדי שימוש בנתונים שבלוח הקולקטיבי. במהלך השיחה התבקשו התלמידים למלא את העמודה האחרונה בדף ובפולגל. היתה כאן הזדמנות לדון במושגים סדר עולה וסדר יורד.

המורה: התבוננו באוסף הדוגמאות, האם ישנה, לדעתכם, שיטה להגיע למכפלה הגדולה ביותר בניסוי אחד בלבד?

ה. סיום – שאילת שאלות חדשות

לקראת סיום השיעור חזרתי לרעיונות הראשונים שהעלו התלמידים בראשית השיעור.
שאלתי: כיצד ובמה היינו כולנו חוקרי מתמטיקה קטנים?

הנחיתי אותם לסקור את מה שעשינו, הפניתי אותם לרעיונות שהם עצמם העלו. כל ילד שהתייחס לרעיון מסוים התבקש להדגים אותו בדברים שנעשו או ההפך תיאר מעשה והיה צריך לקשור אותו לרעיון שהועלה. נוצרה סכימה ראשונית של מודל חקר; הגדרת בעיה, איסוף נתונים, ניסויים רבים, השערות, בדיקתן ודיונים עליהן, אישוש/ הפרכה של ההשערות פתרון הבעיה, הכללות ושאלות חדשות העולות בעקבות הבעיה. סכמה זאת יש לבנות בתהליך ממושך ורק לאחר התנסויות רבות, הדומות בתהליך לפעילות המתוארת. בסיום השיעור ביקשתי מהילדים לחשוב על שאלות חדשות הנובעות מהמשחק או הקשורות בו. שאילת שאלות היא דרך טובה, בעיני, להעריך תפקודי חשיבה של התלמידים.

להלן הצעות של תלמידים לשאלות חדשות (הדברים מובאים כלשונם).

1. מה יקרה אם שתי ספרות יהיו אותו דבר?
2. באיזה שיטה נוכל להגיע לתוצאה הכי קטנה?
3. אם צריך להרכיב מספר אחד עם ארבע ספרות ומספר אחד חד ספרתי, איך נגיע לתוצאה הכי גדולה?
4. איך זה יהיה אם יהיו רק 4 ספרות ונצטרך לכפול מספר דו-ספרתי במספר דו-ספרתי?

השתמעויות

בדיון שנערך עם המורות בעקבות השיעור הועלו הדגשים חשובים העשויים לתרום לעיצוב גישות פתוחות יותר בהוראת מתמטיקה, גישות המפתחות מיומנויות חשיבה גבוהות, כגון חשיבה אינדוקטיבית, העלאת השערות, דיון ושיח, הסקת מסקנות, שאילת שאלות ועוד.

במה נתרמו התלמידים?

- הם היו שותפים פעילים בפתרון הבעיה וכל אחד תרם למאמץ כמידת יכולתו.
- הם בנו למעשה את הטקסט המתמטי ששימש בהמשך בסיס ללמידה ולחקירה.
- הם השתמשו באופן פעיל בידע שרכשו על המבנה העשירי ופעולת הכפל, כפל בעל-פה בעשרות ומאות שלמות; הם השתמשו במושגי

השוואה, סדר עולה ויורד, גורמים ומכפלה, ספרות ומספרים.

- עבורם היתה חוויה של גילוי מידע חדש, ויש יסוד להניח שרבים מהם הבנו את הידע שלהם. התקיים דיאלוג בקבוצה, התלמידים התנסו במיומנות של עבודת צוות, והם למדו להתנסות בנקודות מבט חלופיות. כל אחד תרם וגם נתרם.
- הם חוו מתמטיקה כתהליך של פתרון בעיות המעודד יישום ושימוש בידע, ולא כתהליך קבלה פסיבי של מידע מוגמר מהמורה, שאותו יש לתרגל או לשנן.

מה תרם המורה ובמה נתרם?

המורה, זימן לתלמידים מצב שאיפשר להם להתנסות בתהליך של "עשיית מתמטיקה" על כל המשתמע מכך. תפקיד המורה להציג בעיה מאתגרת, לסייע לתלמידים לבטא את רעיונותיהם בניסיון להתמודד אתה, להקשיב באופן ביקורתי לדברי אחרים, לעודד שיח מתמטי ולמידה שיתופית. "אם לא נעצב סביבה שילדים יוכלו לגלות בה את המושגים הפעילים שלהם הם עלולים להיעשות ולהישאר בורים חסרי תקנה בכל המדובר ביישום של ידע" (R.Palul, 1978).

אין ספק שזה יהיה השכר הגדול ביותר שהמורה יכול לצפות לו. ואשרי המאמין ועושה . . .

בביבליוגרפיה

Lermam, S. (1990). Alternative perspectives of nature of mathematics and their influence on the teaching of mathematics. British Educational Research Journal, 16(1), 53-61.

Thinking Mathmatically. Mason, J. (199). Addition-Wesley Publishing Wokingham, England.

Smart Schools Perkins, D. (199).

Richard, P. (1987). "Dialogical Thinking: Critical Thought Essential to the Acquisition of Rational Knowledge and Passions". In J. Baron and R. Sternberg (eds), Teaching Thinking Skills - Theory and Practice. W. H. Freeman and Company.