ד"ר אליאס עבוד וד"ר נימר ביאעה
המכון האקדמי להכשרת מורים ערביים

תפיסת המרחב אצל ילדים

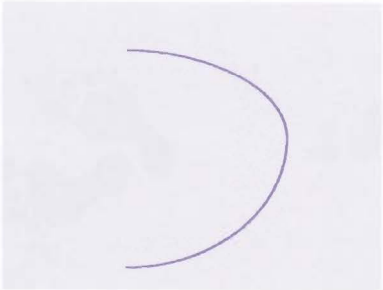
מבוא: מטרתנו במאמר זה להביא את היסודות של **תורת פיאז'ה** על אודות תפיסת המרחב אצל ילדים, ראה [Copeland, 1979]. אך נביא קודם סקירה מתמטית למושגים החשובים והדרושים לנו מתחום **הטופולוגיה**, [אלדורי, 1981, ליבוביץ כרך א', 1997].
זהו ענף חדש יחסית במתמטיקה אשר עוסק בין השאר בתכונות הגיאומטריות של הצורות במישור והגופים במרחב כאובייקטים "לא קשיחים". בניגוד לגיאומטריה האוקלידית, שדנה בנקודות, ישרים, צורות במישור ושל הגופים במרחב כאובייקטים "קשיחים".

ההבחנה הראשונית של פיאז'ה בנוגע לנושא זה היא ש"התפתחות התפיסה הגיאומטרית של הילד" הפוכה מ"ההתפתחות ההיסטורית של הגיאומטריה". הגיאומטריה שלמדו פעם בגנים ובחטיבות הצעירות כללה פעילויות מסוג חיבור קטעים בין נקודות ומיון צורות גיאומטריות על-פי מספר הצלעות או אורכי הצלעות, כמו משולש, ריבוע ומלבן וכו'. גישה זו נשענה על ההנחה שתפיסת הילד הראשונית היא אוקלידית, שהיא אכן התחלת הגיאומטריה מבחינה היסטורית. אך פיאז'ה הבחין שקביעה זו מוטעית, ושהתפיסה הראשונית של הילד היא טופולוגית.
הנימוק של פיאז'ה מסתמך על כך שהטופולוגיה מתארת ומנתחת את הצורות הגיאומטריות באופן שבו הילד תופס אותן בשלבי התפתחותו הראשוניים. לעומת זאת, הגיאומטריה האוקלידית מתארת ומנתחת את הצורות הגיאומטריות בצורה "קשיחה", רחוק מנקודת ראותו של הילד.

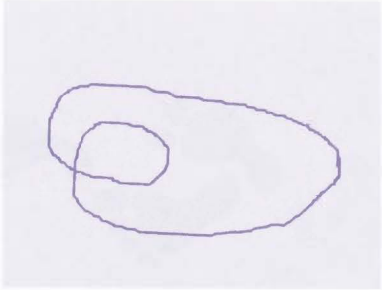
טופולוגיה (TOPOLOGY):

הטופולוגיה מקורה במאה ה- 19 ומדענים רבים תרמו לפיתוחה,
Jordan, Mobius, Euler, Lie, Cartan ואחרים.
אנטואיטיבית, טופולוגיה עוסקת בלימוד התכונות שנשמרות תחת **דפורמציה** של צורות (במישור או במרחב) ובמיוחד: כיפוף, מתיחה, כיווץ, הזזה וסיבוב, אך לא שבירה ולא קריעה ולא גזירה ולא הדבקה. משום כך, טופולוגיה נקראת בלשון עממית "גיאומטריית הגומי".
צורות **שקולות טופולוגית** הן צורות שאפשר לקבל זו מזו על-ידי דפורמציה (בספרות המדעית משתמשים במונח **הומאומורפיזם** במקום דפורמציה, ראה [אלדורי, 1981].
למשל, מבחינה טופולוגית אין הבחנה בין ריבועים, מעגלים ומשולשים במשור- כל אלה מהוות צורות שקולות טופולוגית צורות אלה נקראות במונחים מתמטיים **עקומים סגורים ופשוטים** (Simple Closed Curves).
עקום סגור ופשוט הוא כל קו שמתחיל ומסתיים באותה נקודה, אך לא חותך את עצמו, ראה ציורים 1 – 3.

ציור1: עקומים סגורים ופשוטים



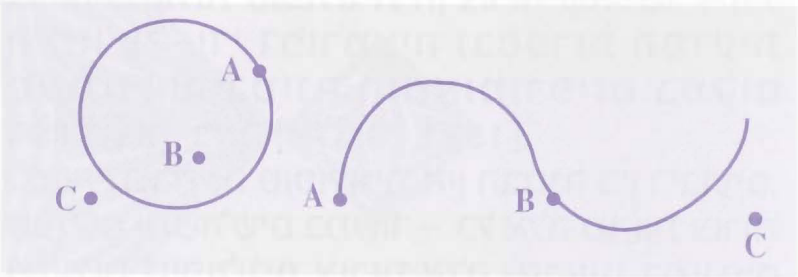
ציור 3: עקום פתוח ופשוט



ציור 2: עקום סגור אך לא פשוט

העקומים בציור 1 הם שקולים טופולוגית, מכיוון שאפשר לקבל כל צורה מהאחרת באמצעות כיווץ, מתיחה, עיגול, יישור או חידוד.
בציור 2 יש לנו עקום סגור אך לא פשוט, מכיוון שהוא חותך את עצמו.
בציור 3 יש לנו עקום פתוח ופשוט, שהוא מתקבל מהמעגל באמצעות גזירה ולכן אינו שקול טופולוגית למעגל, ולכן גם לאף עקום סגור ופשוט.

כל עקום סגור מקיף תחום שהוא אוסף הנקודות הנמצאות בתוך העקום. במקרה זה העקום נקרא **שפת התחום**, ונקודות העקום נקראות **נקודות שפה**. הנקודות שבתוך התחום נקראות **נקודות פנימיות**, וכולן ביחד נקראות **פנים**. **תחום סגור** הוא תחום שמכיל את הנקודות הפנימיות ואת נקודות השפה. נקודה **חיצונית** היא נקודה שאיננה פנימית ואיננה נקודת שפה.
לגבי עקום כלשהו, לא סגור, נקודות השפה הן נקודות הקצה, והשאר הן נקודות פנימיות, (ראה ציור 4).



ציור 4: נקודת שפה A ונקודה פנימית B ונקודה חיצונית C

שימור בטופולוגיה (Conservation)

שמורה (אנווריאנט) של פעולה מסוימת היא סגולה הנשמרת לאחר ביצוע הפעולה (על המישור כולו). למשל, המרחק, גודל הזווית והשטח הם שמורות בגיאומטריה האוקלידית לעומת הזזה וסיבוב במשור. אם מזיזים או מסובבים משולש במישור נקבל משולש חופף, כלומר בעל אותם אורכים של צלעות, אותם גדלים של זוויות ואותו שטח.

אך בטופולוגיה הדבר שונה, שהרי אין משמעות למרחק. כל הקטעים הם שקולים טופולוגית, ואפשר למתוח ולקבל קטע שקול באורך שונה. עם זאת קיימים שמורות בטופולוגיה לגבי פעולת הדפורמציה כמו למשל:
להיות עקום סגור או עקום פשוט הוא שמורה בטופולוגיה.
אנו נתרכז בפרט בארבעה יחסים שהשתמש בהם פיאז'ה המהווים שמורות טופולוגיות ונזכיר את המושגים המקבילים בטופולוגיה:

I. יחס "השכנות" (Proximity)
II. יחס "ההפרדה" (Separation)
III. יחס "הסדר" (Order)
IV. יחס "ההכלה" (Encloser)

יחס השכנות מקביל למושג הקשירות (Connectedness) בטופולוגיה (ראה ליבוביץ, כרך א' 1997, עמ' 125). למשל, עיגול מהווה מרחב קשור, אך איחוד של שני עיגולים זרים הוא מרחב לא קשור. הקשירות היא שמורה טופולוגית (ראה אלדורי, 1981 עמ' 287).

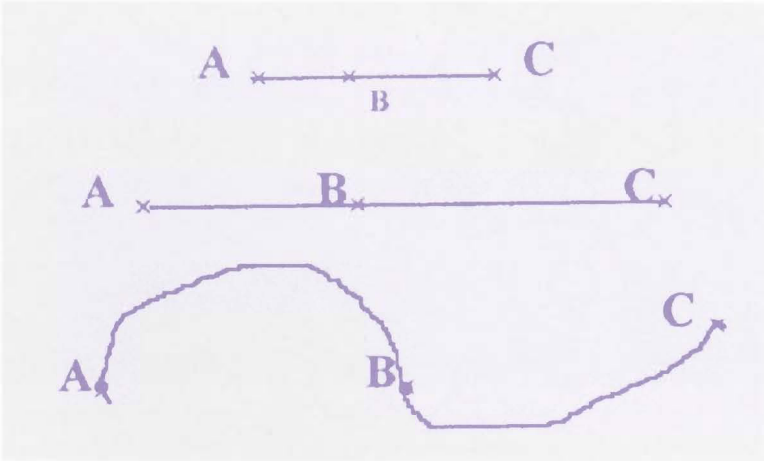
יחס ההפרדה בטופולוגיה מסתעף לכמה משמעויות. יש הפרדה בין נקודות, יש הפרדה בין נקודה לקבוצה סגורה ויש הפרדה בין קבוצות סגורות (ראה ליבוביץ, כרך ג,' 1998).
ההפרדה היא שמורה טופולוגית בתנאים מסוימים על הדפורמציה [ליבוביץ, כרך ג', 1998]. השימוש של פיאז'ה ביחס ההפרדה בא להבליט את ההפך משכנות.
למשל, ברישום דיוקן של איש העיניים מופרדות (לא שכנות) מקו המתאר של הראש ואילו האוזניים שכנות (מחוברות) לקו המתאר של הראש.

יחס הסדר מקביל לשימור כיוון התנועה לאורך השפה של תחום תחת דפורמציה רציפה.

יחס ההכלה נקרא גם "להיות בתוך" או "בין" או "מקיף" או "מוקף על-ידי" והוא מקביל למושג הפנים (Interior) של תחום. הפנים הוא שמורה טופולוגית ומתבטא בעובדה שנקודות פנימיות לעולם נשארות פנימיות תחת דפורמציה רציפה (ראה הגדרת רציפות (אצל אלדורי, 1981 עמ' 107); והגדרת הומאומורפיזם (אצל אלדורי, 1981 עמ' 275).

נמחיש את הדברים בדוגמא הבאה:
ניקח במשור קטע של קו ישר, נציין עליו שלוש נקודות ונקודה חיצונית ונפעיל את הדפורמציות הבאות:

מתיחה וכיפוף, ראה ציור 5.



ציור 5: מתיחה וכפוף של קטע

נשים לב לשמירת היחסים הטופולוגיים בכל שלב:
א. הנקודה A שכנה (קשורה) לעקום.
ב. הסדר נשמר, אי אפשר להגיע מ- A ל- C בלי לעבור ב- B .
ג. B היא נקודה פנימית ואילו A ו- C הן נקודות שפה.

תפיסת הילד את המרחב על-פי פיאז'ה:

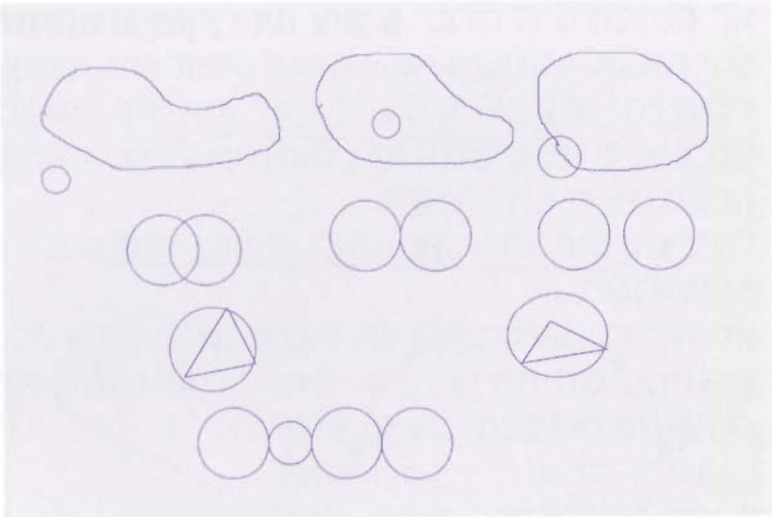
הרושם ההתחלתי של ילד עד גיל שלוש מהמרחב שהוא חי בו, שהוא משהו מאוד לא מסודר. הצורות בעיניו אינן קשיחות, הן משתנות. הדלת נראית אחרת כאשר היא נפתחת. אמו נראית אחרת כאשר היא מתקרבת אליו. הפנים של אמו נראים אחרת כאשר היא מסתובבת וכו'.
ילד בן שלוש, ארבע שנתבקש לצייר ריבוע או משולש, שהן צורות קשיחות ושונות בגיאומטריה האוקלידית, מצייר מעגל או עקום סגור, ואלה שקולים טופולוגית.
בנוסף, ילד בגיל הזה יכול להבחין בין צורות סגורות לבין צורות פתוחות (ציורים 1 ו- 3).
אך הילד בגילאי שלוש עד שבע אינו מבחין באורך או בכמות שהם פרמטרים מהגיאומטריה האוקלידית. למשל, הוא חושב שהמרחק בין שני עצמים גדל יותר אם שמים באמצע עצם שלישי. והוא חושב שכמות המים משתנה אם שופכים אותם מכוס אחת לכוס אחרת בעלת בסיס גדול יותר. לעומת זאת, הילד מבין טוב את היחסים הטופולוגיים שדיברנו עליהם.
בציירו דיוקן של איש, הילד מקשר את האוזניים לראש וזה סימן שהוא מבחין ביחס "השכנות". בנוסף הוא "מפריד" בין האף, הפה והעיניים. לפני שהילד מבחין בין משולשים, מרובעים ומעגלים הוא יכול לצייר צורה בתוך צורה, למשל מעגל בתוך מעגל, משיקים ולא משיקים, וזה סימן שהוא בקיא ביחס ההפרדה והשכנות.
יחס "הסדר" משחק תפקיד חשוב בחיי היום-יום של הילד.
הוא מבחין בסדר הפעולות של פתיחת דלת, הדלקת האור, כניסת מישהו לחדר.
באופן דומה הוא ער לסדר בזמן, זמן האוכל, זמן השינה וכו'...
הילד מבין טוב את יחס "ההכלה". הוא מבחין שהוא נמצא "בתוך" החדר, הכלב נמצא בחצר, האף "מוקף ע"י" הפנים, האף "בין" העיניים.
הילד בגיל ארבע עד חמש משחזר סדור של דברים בתנאי שיש לו מודל לפניו. בגיל שש עד שבע יכול לבנות מודל של עצמים מסודרים על סמך מודל נתון.

מסקנות:

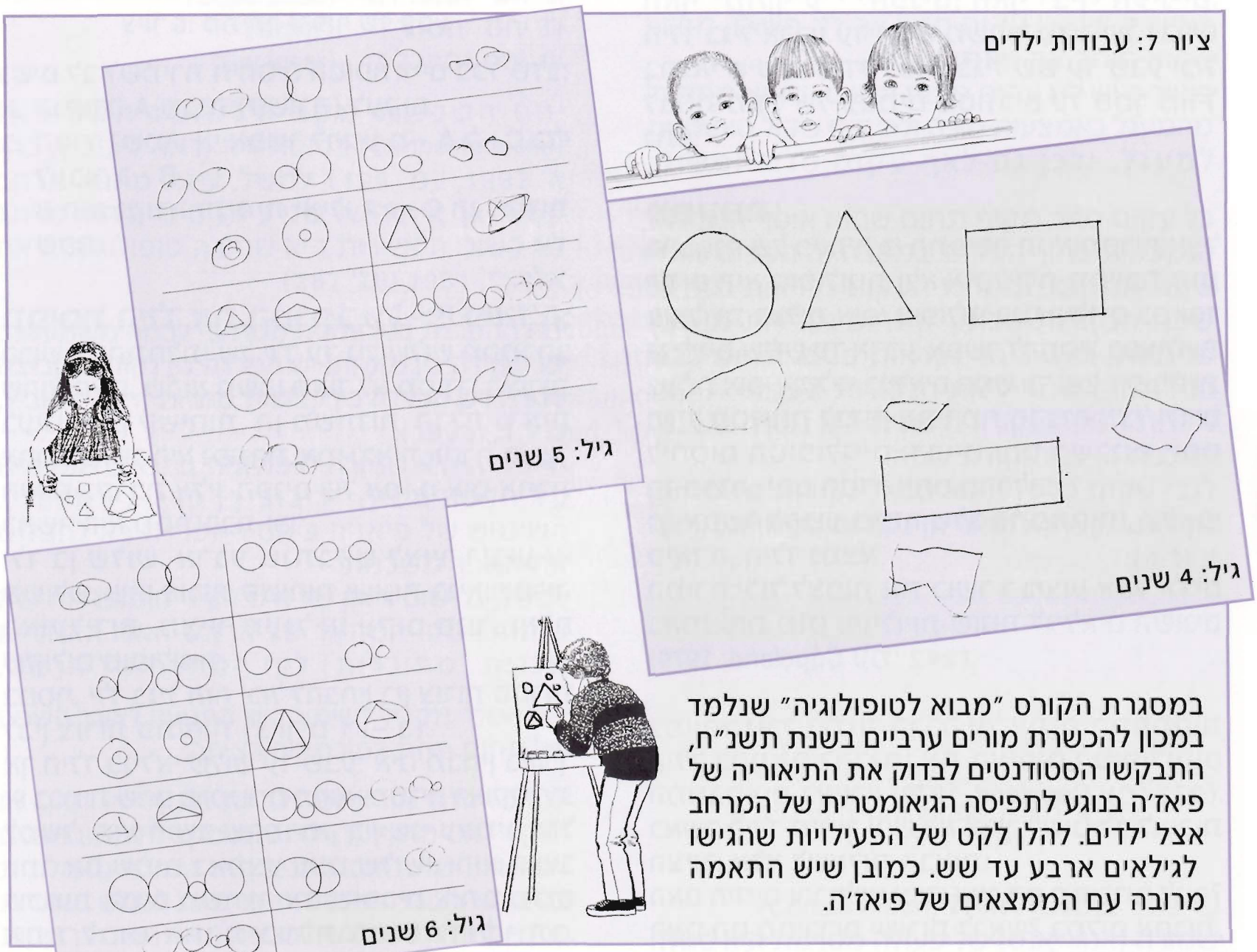
ההבחנה של פיאז'ה כי התפיסה הגיאומטרית אצל ילדים היא טופולוגית ולא אוקלידית מחייבת מתן פעילויות בעלות אופי טופולוגי בגני הילדים במיוחד לגילאים שלוש עד ארבע. אפשר להתחיל בפעילויות בעלות אופי אוקלידי בגילאים חמש עד שש. הפעילויות הנ"ל מסייעות לבדוק את רמת ההבנה אצל ילדים ליחסים הטופולגיים, דהיינו יחס השכנות, יחס ההפרדה, יחס הסדר ויחס ההכלה.
כך אפשר לקבוע באיזה שלב התפתחותי, על-פי פיאז'ה, הילד נמצא.
המורה יכול לצפות את כושר הביצוע אצל ילדים באמצעות מתן פעילויות שונות לגילאים השונים (Copeland, 1979 עמ' 242).

במיוחד נוכל ללמוד הרבה על אודות התפתחות הילד בהתאם להבנתו את היחסים הטופולוגיים המתבטאים בציוריו (Copeland, 1979 עמ' 233).
כאשר הילד מצייר איש לא צריך לשים לב לאיכות הציור, אלא לשאלות הבאות:
האם הידיים והרגליים צוירו ואיך הם מחוברים לגוף?
האם הם מחוברים ישירות לראש? במלים אחרות, האם הילד מבחין ביחס השכנות רגל-גוף או יד-גוף מצד אחד, ומצד אחר האם הוא מבחין ביחס ההפרדה בין יד-ראש ורגל-ראש מצד שני.
האם הילד מבחין ביחס הסדר: רגל-גוף-ראש?
האם בציור שלו יש הפרדה בין העיניים, האף והפה?
לבסוף נוכל לבקש מהילד לצייר צורות גיאומטריות

(ציור 6) ולוודא אם הוא מבחין בין היחסים השונים, (רשימה ארוכה יותר אפשר למצוא אצל **Copeland, 1979**).
פיאז'ה מצא כי בגיל חמש עד שש הילד יכול להבין את יחס "ההכלה", ובגיל שש עד שבע הוא יכול לשחזר את כל הצורות בציור 7, ללא כל קושי.



ציור 6: צורות עם יחסים שונים ביניהם



ציור 7: עבודות ילדים

במסגרת הקורס "מבוא לטופולוגיה" שנלמד במכון להכשרת מורים ערביים בשנת תשנ"ח, התבקשו הסטודנטים לבדוק את התיאוריה של פיאז'ה בנוגע לתפיסה הגיאומטרית של המרחב אצל ילדים. להלן לקט של הפעילויות שהגישו לגילאים ארבע עד שש. כמובן שיש התאמה מרובה עם הממצאים של פיאז'ה.

מקורות:
1. אלדורי רחל ואחרים, 1981 טופולוגיה (מתמטיקה לחטיבה עליונה), האוניברסיטה העברית בירושלים.
2. ליבוביץ דניאלה, 1997 טופולוגיה קבוצתית, כרך א. תל-אביב, האוניברסיטה הפתוחה.
3. ליבוביץ דניאלה, 1997 טופולוגיה קבוצתית, כרך ב. תל-אביב., האוניברסיטה הפתוחה.
4. ליבוביץ דניאלה, 1998 טופולוגיה קבוצתית, כרך ג. תל-אביב., האוניברסיטה הפתוחה.
5. Copeland R W. (1979), How Children Learn Mathematics, Macmillan (4th edition).