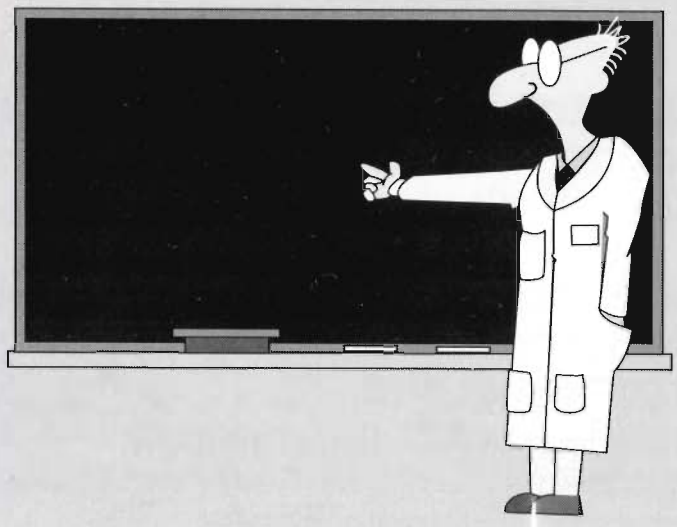
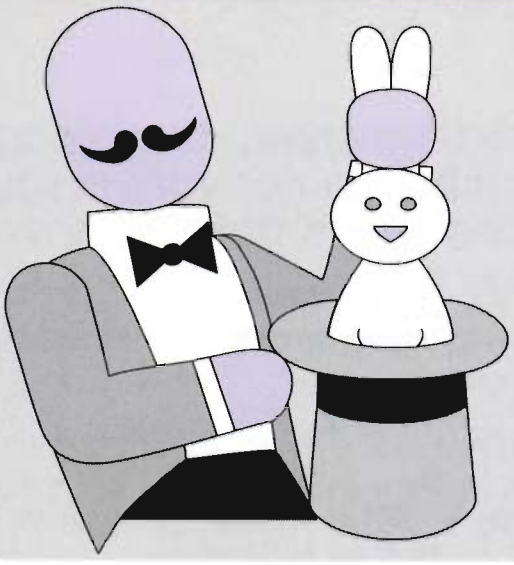




גאולה ויצמן

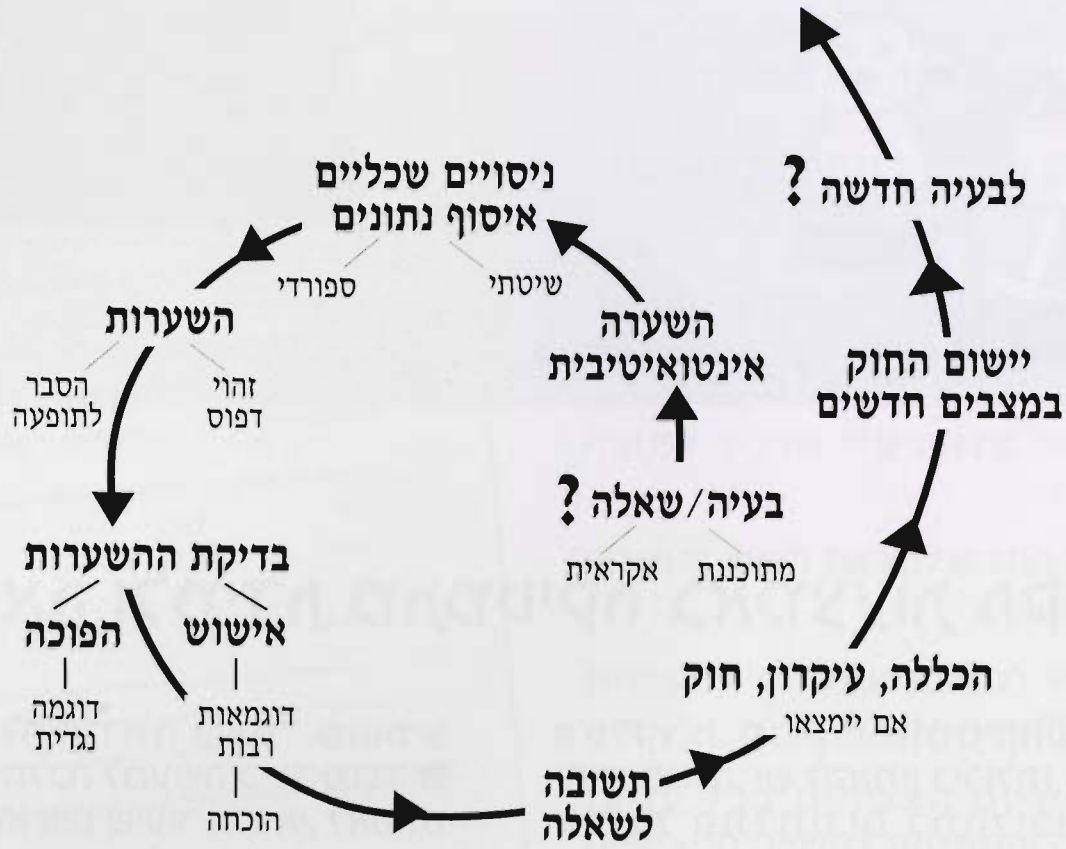
מודל להוראה ולמידת מתמטיקה באמצעות חקר

המאמר "אל המכפלה הגדולה ביותר" שהופיע בגיליון הקודם, תיאר הלכה למעשה כיצד מדברים ועושים מתמטיקה. זהו אינו שיעור אקראי, לאמיתו של דבר הוא מהווה דוגמה לרעיונות פדגוגיים הקשורים לדרכים ללמידה והוראת מתמטיקה שהתגבשו לתיאוריה.
המודל להוראה ולמידת מתמטיקה באמצעות חקר, המוצג להלן הוא תוצר של דיאלוג מתמשך בין תיאוריה למעשה, דיאלוג שמילא תפקיד מרכזי ביצירת המודל. מן הצד האחד, תיאוריות ומחקרים על תפיסות של מורים את המתמטיקה ודרכי הוראתה, ומגוון עשיר של רעיונות הקשורים לחינוך המתמטי, ומן הצד האחר, העבודה בשטח המספקת כר נרחב של הזדמנויות לנסות ולהתנסות ביישום עקרונות חדשניים בסדנאות, בשיעורי הדגמה, בעבודת ההדרכה ובמרכזי מורים. הדיאלוג הזה הוביל אותי לחשיבה מחודשת על המתמטיקה ועל דרכי הוראתה, ולעיצוב האני מאמין של המודל. שתי אמונות מרכזיות עומדות ביסוד המודל והן נוגעות ללמידה ולהוראת מתמטיקה:
א. **למידת מתמטיקה** היא תהליך הבניה פעילה של ידע, ולא קבלה פסיבית של מידע מן המורה. הלמידה מתרחשת בעקבות דיונים ברעיונות שהתלמידים מעלים במצבים העוסקים בפתירת בעיות. מכאן גם שהוראת מתמטיקה אינה העברת תכנים מן המורה אל התלמידים, אלא הוראה המערבת את התלמידים בתהליכים של "עשיית מתמטיקה".
ב. **היכולת לחשיבה מתמטית** אינה תכונה טבעית. יכולת זו נרכשת וניתנת לפיתוח באמצעות אימון ורפלקציה. מכאן שמתמטיקה אינה נחלתם של יחידי סגולה. יש להאמין ביכולתו של הפרט ולערב את כל התלמידים בתהליכים של "עשיית מתמטיקה".

ההשראה האחרונה לבניית המודל באה לי מדברים שאמר ז'ק איזלי- מתמטיקאי וחוקר ידוע של החינוך המתמטי: **"אם העוסקים בחינוך המתמטי ילמדו ליישם לתחום הוראת המתמטיקה את התובנות ואת התהליכים היוריסטיים שהוצעו למחקר המתמטי בידי פוליה ולקטוש, ועליהן תיבנה הבנתו של התלמיד, אזי מידת העניין של התלמידים וגם הישגיהם עשויים לגדול באופן משמעותי** (Easly, 1967).

נשאלת השאלה: מדוע לא ננסה לאמץ את רעיונו של איזלי? הרי אותן תובנות ואותם תהליכים היוריסטיים שעליהם הוא מדבר עשויים להיות רלוונטיים לא רק בחזית פתוח הידע, אלא גם בהצגה ובפתרון בעיות בהוראה אצל תלמידים. פוליה ולקטוש, בכתביהם על היצירה המתמטית, רואים במתמטיקה פעילות בלתי פוסקת המשלבת פתירת בעיות מעניינות, העלאת השערות מהדמיון, בדיקתן, רפלקציה עליהן, בחינת המסקנות באופן פורמלי, פרסום רעיונות לפיתוח ולביקורת על ידי הקהיליה המתמטית.
לקטוש, שאימץ אחדים מרעיונותיו של פופר על שיטות במדעי הטבע, טוען כי העובדות המתמטיות, כמו כל העובדות, הן פגיעות וחשופות להפרכה. בהסתמך על הרעיונות האלה בניתי בשלב ראשון

לוח 1



מודל חקר במתמטיקה, שהמרכיבים העיקריים בו הם: הצגת הבעיה, השערות ראשוניות, ניסויים ואיסוף נתונים, בדיקת השערות, תשובה לשאלה, הכללה, יישום העיקרון, רפלקציה עליו, ובחינה ביקורתית של המסקנות. (ראה לוח 1).

מודל חקר במתמטיקה

בהתייחס למודל חקר זה ראוי להאיר ולהעיר עניינים חשובים אחדים:

ישנן פעילויות חקר במתמטיקה שאינן פועלות על-פי הדגם הזה.

הצורה הספיראלית מושפעת מהתפיסה הרלטיביסטית של קון ושוואב, שכל מדע הוא בעל תוקף ארעי, כל פעולה מדעית, מקטינה אי-ודאות במובן מסוים ויוצרת אי-ודאות במובן אחר. כל עובדה הנחשפת פותרת, למעשה, בעיות שהיו קיימות ויוצרת גם שאלות חדשות (Khon, 1970; Schwab, 1978). הספיראליות במודל באה לבטא את התפיסה שהמתמטיקה היא פעילות אנושית בלתי פוסקת; הידע אינו תוצר מוגמר, והוא פתוח לבחינה מחדש, לחקירה ולהתמודדות חוזרת.

המתמטיקה היא מדע ניסיוני כשאר המדעים האמפיריים. ממש כשם שהדבר קורה במדעי הטבע, המתמטיקאי עורך תצפיות, ניסויים שכליים, והוא גם משתמש בניחושים אינטואיטיביים ובהיסק אינדוקטיבי שיש להם תפקיד מרכזי ביצירה המתמטית (פישביין ותירוש, 1993).

בשונה משאר המדעים האמפיריים, שם הסמכות היא האינדוקציה והתצפית, במתמטיקה הסמכות העליונה היא ההוכחה המדויקת. ההוכחה אינה מותירה אף פרצה, אף חוליה בלתי שלמה, ואף ספק קל שבקלים. לכן די בדוגמה נגדית אחת כדי להפריך השערה.

אם נתבונן במודל הזה, ניווכח שההקבלה בין הקהיליה המתמטית לבין כיתת המתמטיקה היא אפשרית וכמעט מובנת מאליה; באחת, מחקר לצורך הפקה ויצירת ידע, ובאחרת, למידה ובנייה של הידע; שני התהליכים הם בעצם תהליכים דינמיים ובלתי פוסקים. הכיתה תהיה מעין מיקרוקוסמוס של הקהיליה המדעית. הילדים יתנסו בתהליכים דומים לאלה שמתנסים בהם מתמטיקאים בעת יצירת הידע.

זה היה בעצם חזונו הפדגוגי של פוליה:

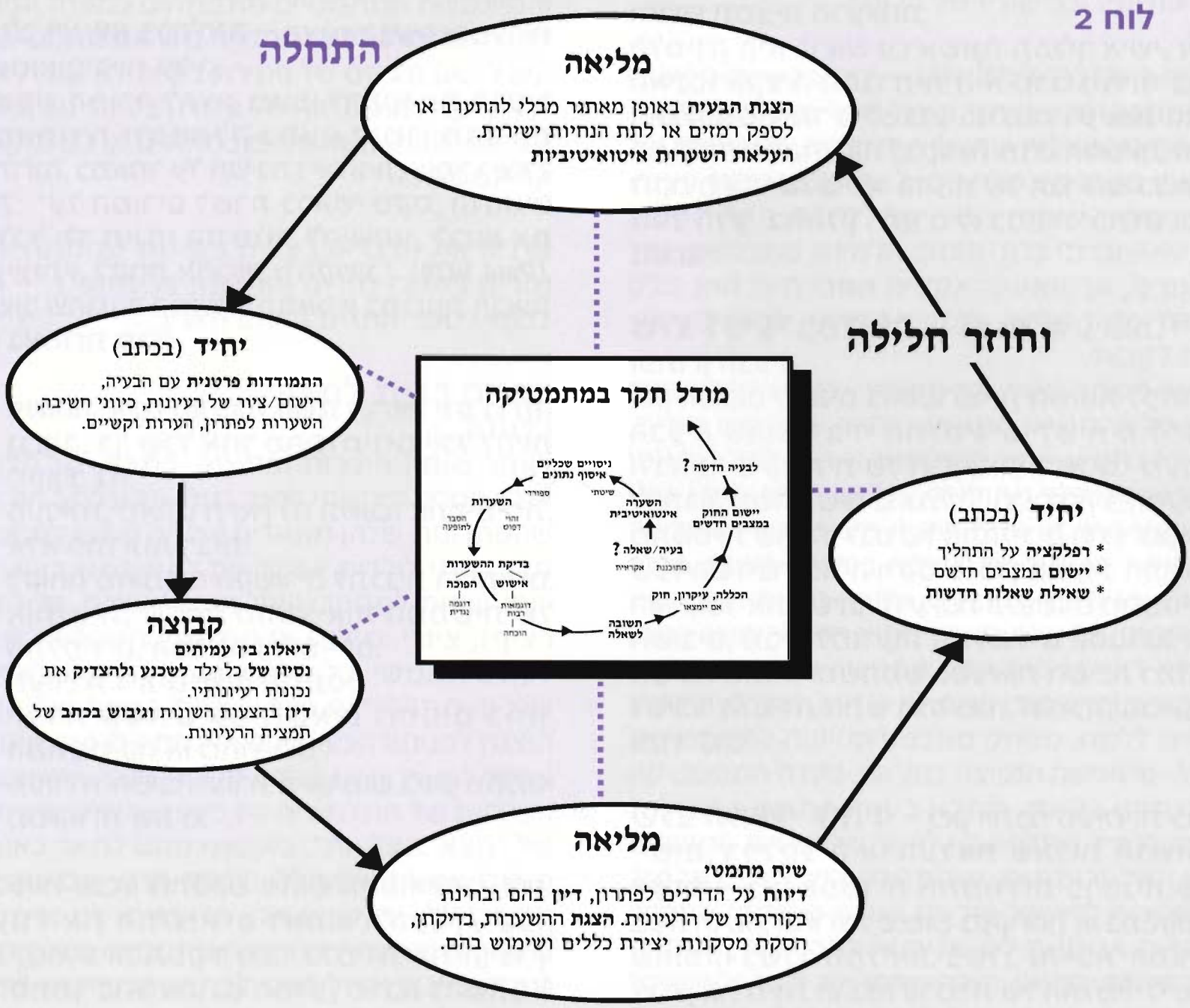
"כאשר תלמידים יוצרים השערות וכותבים עבורן הוכחות, הם מתנהגים כמו חברים בקבוצת עבודה

של מתמטיקאים; הם יוצרים ועושים מתמטיקה ומתחברים לממצאיהם"
(Polya, 1965)

חשוב להבהיר כי מודל החקר שתואר לעיל הוא רק מרכיב במודל ההוראה/למידה; התהליכים הקורים בכיתה בשעת התמודדות עם בעיה הם העיקר; הם מוצגים במודל השלם, מודל להוראה ולמידת מתמטיקה דרך חקר, היונק את רעיונותיו מהתפיסה הקונסטרוקטיביסטית החדשה.
המודל כורך את ההוראה בלמידה והופך אותה לאמצעי לטיפוחה של זו האחרונה. התהליכים המתוארים בו שונים מדפוסי ההוראה בכלל ובהוראת מתמטיקה בפרט. הללו מציגים את הלמידה כתהליך אישי-חברתי, המבוסס על עקרונות אחדים:

1. העלאת בעיה אותנטית לתלמידים, בעיה בעלת משמעות עבורם.
2. הבניית הלמידה לא סביב פרטי תוכן, אלא סביב רעיונות מרכזיים.
3. נקודת המוצא היא סגנונות החשיבה הייחודיים של התלמידים ונקודות המבט שלהם אשר באמצעותם הם בונים את הידע
4. הערכת הלמידה של המורה את התלמיד ושל התלמיד את עצמו נטועה היטב בתהליך ההוראה/למידה, ומהווה חלק בלתי נפרד ממנו.

לוח 2



במרכז מצוי מודל החקר והוא מקושר אל האליפסות המתארות את מהלכי הפעילות בכיתה. (ראה לוח 2) במודל ישנם שני סוגים של קשרים. החצים השחורים מתארים קשרים ניתנים לצפייה ומפורשים לתלמידים; הם מודעים למהלכים שבהם הם מתנסים בכיתה. הקווים המרוסקים מתארים קשרים בלתי נראים שעדיין אינם מודעים לתלמידים, אך מצויים בראשו של המורה; הוא מחובר היטב למודל החקר, ודואג שהמרכיבים העיקריים שבו יבואו לידי ביטוי בהתנסויות.
האליפסות מתארות את מהלכי הפעילויות הרצויות בכיתה משלב הצגת הבעיה , דרך מהלך ההתמודדות עמה במסגרת יחיד, קבוצה, מליאה, ועד לשלב של העלאת שאלות חדשות בעקבותיה, והצגה של בעיה חדשה המתחילה את התהליך מחדש.

שלב ראשון במליאה – הצגת הבעיה והשערות אינטואיטיביות עליה.
תפקיד המורה להציג באופן דרמטי את הבעיה המאתגרת ולהסתלק כמעט לגמרי מהוראת פתרונה. במאמר על חשיבה דיאלוגית, אומר ריצ'רד פול: "על המורים לשרת כראשי טקס, הדואגים שלכל ילד תינתן הזדמנות להישמע, לבטא את רעיונותיו, לקחת אחריות ולהקשיב". (**Paul 1978**).
חשוב שהבעיה המוצגת תתאפיין בתכונות הבאות או באחדות מהן:

- פשוטה, אינה מורכבת ואינה דורשת ידע ברמה גבוהה, כך שכל אחד מהתלמידים יוכל להיות מעורב בה.
- מעניינת, מאתגרת ואין לה תשובה אחת מידית, אלא פתרונות רבים.
- לקוחה מחומרים הקשורים לתכנית הלימודים.
- אותנטית, לקוחה מהמציאות הממשית של התלמידים, הסביבה והיום-יום.
- מעוררת דיונים ושיח מתמטי.
- יוצרת קשרים עם נושאים נוספים בתוך המתמטיקה או מחוץ לה.
- מעודדת חשיבה יצירתית ושימוש בידע מתמטי ממקורות שונים.

בבעיות שבהן מתבקש ניחוש אינטואיטיבי, רצוי לעודד את התלמידים לאמוד ולהעריך, שכן, לאינטואיציות תפקיד נכבד בלמידה, ועליהן צריך להסתמך בהוראה. גם המדען מרבה להשתמש בניחושים אינטואיטיביים במהלך עבודת החקר.

אין ספק, שעם הזמן יש לטפח בהדרגה את "הניחוש המושכל", הדורש הצדקה והנמקה ומשמש בסיס להשערות הגיוניות ונבונות.

שלב שני ביחידים – התמודדות פרטנית עם הבעיה.
זהו שלב חשוב והכרחי המאפשר לכל פרט לחשוב על דרכי הפתרון, לתאר בכתב את דרכי החשיבה והקשיים שלו, ולהתבטא באופן מקורי. לבד מן התועלת לתלמיד, יכול המורה להשתמש במידע זה להערכת הלומד. חשיפת דרכי חשיבה מקוריות ואסטרטגיות לפתרון, חשיפת קשיים, שגיאות ותפיסות מוטעות.

שלב שלישי בקבוצה – דיאלוג בין עמיתים וגיבוש תמצית הרעיונות.
הלמידה היא בראש ובראשונה תהליך אישי, אך האינטראקציה החברתית היא מרכיב חיוני בה. התלמידים לומדים לשכנע בנכונות רעיונותיהם, הם לומדים להתנסות בנקודות מבט חלופיות. הם לוקחים אחריות בייצוג הדעות של חבריהם. כל ילד נוטל חלק בתהליך, תורם לו כמידת יכולתו וגם נתרם.

שלב רביעי במליאה – הצגת הרעיונות, דיון ופתרון הבעיה.
כאן המקום לדיונים באסטרטגיות השונות לפתרון הבעיה שהוצגו בידי התלמידים, לשיח מתמטי ולבחינה ביקורתית של הרעיונות השונים. מעבר לפתרון, משתמשים בהנמקה, בהצדקה ובהסקות מתמטיות שהן לב לבם של התהליכים ההיוריסטיים שעליהם דיברו פוליה ולקטוש. כאן מתערב המורה; הוא קושר את השיחה לרעיונות ולמושגים מתמטיים חשובים, מביא למודעות התלמידים אסטרטגיות חשיבה שונות, ומשתמש בשגיאות חשיבה כמנוף לשיפור הלמידה. התערבותו בונה, תומכת, מסייעת ומדריכה.

שלב חמישי ליחיד – כאן ייתכנו פעילויות כגון יישום, רפלקציה או העלאת שאלות חדשות.
יישום – כאן אפשרית התמודדות פרטנית עם בעיה חדשה, הדורשת שימוש בעקרונות או במסקנות שהוסקו בשלב המליאה. בשלב זה יכול המורה לבחון את מידת ההבנה והיכולת של התלמיד ליישם את העיקרון שלמד בהתמודדות עם בעיה חדשה.

רפלקציה – התהליך המטקוגניטיבי חשוב מאוד. התלמיד חושב על הלמידה של עצמו. חשיבה זו מביאה כלשונו של פרקינס (1992) לרכישה, להבנה ולהפעלה של ידע. שאילת שאלות חדשות היא מיומנות חשובה לא פחות ממתן תשובות, ויש לטפח אותה לא פחות מטיפוח מיומנויות לפתרון בעיות. אחת האסטרטגיות הידועות היא אסטרטגיה שניתן לכנותה בשם:...? What if – בהשראתה של מריון וולטר (Walter,1970). עיקרה של אסטרטגיה זו הוא שינוי נתון אחד של הבעיה המקורית והחלפתו בנתון אחר תוך כדי חקירה של כיצד ישתנה הפתרון. בשלב זה אין חייבים לעסוק בכל הפעילויות המוצעות. המורה יבחר על–פי שיקול דעתו בכל פעם באחת מהן. מאחר שבשלב זה מבטא התלמיד את עצמו בכתב, למורה כאן הזדמנות לחשוף ממדים סמויים ביכולותיו ובכישוריו של הלומד.

ושוב חזרה למליאה – דיון בבעיית היישום שניתנה, או פתיחת מעגל חוזר מאופיין בהצגת אחת מהשאלות שהעלו התלמידים. זהו תהליך של מעין מעגל קיברנטי המזין את עצמו מתוך עצמו. הרעיון העיקרי הוא, שהלמידה היא תהליך אישי–חברתי בלתי פוסק; הלמידה מתרחשת אצל הפרט, אך האינטראקציה החברתית היא חלק בלתי נפרד ממנה, ותפקיד ההוראה לסייע לתהליך זה לקרות.

ראוי להעיר באופן חד משמעי, כי המודל לא נועד לבטל דרכים או סגנונות הוראה שנוקטים מורים, אלא להציע אחת החלופות שרצוי לשלב באופן קבוע במהלך ההוראה. במשך הזמן, ניתן אולי לאמץ דרך זו, היות שהיא מציגה ראייה חדשה במיקוד הוראת מתמטיקה בפתרון בעיות. בדרך כלל, בגישה המקובלת, פתרון בעיות הוא נושא מתמטי; אך אינני סבורה שהוא ראוי להיחשב ככזה, אלא ראוי שיהיה חלק מהקשר שבו מתמטיקה נלמדת ומיושמת; שאם לא כן הוא הופך לעוד נושא שיש ללמדו, מנותק מתכנים ומזיקות למתמטיקה. על–פי הגישה הנפוצה בהוראה, נועדה המתמטיקה לפתרון בעיות. פתרון בעיות נתפס כפעילות שהתלמיד מתנסה בה לאחר שרכש את המושגים או האלגוריתמים, ושהמטרה היא לתת לתלמיד אפשרות ל"יישם" מיד את הנושא ש"למד", בפתרון בעיות הנוגעות למושגים או לטכניקות, במקרה זה קיימת, לדעתי, סכנה שהתלמיד יקבל "רצפטים" לפתרון בעיות בהתאם לנושא הנלמד, ואותם הוא מחקה ואחר–כך משחזר בפתרון בעיות דומות. כך הוא אינו מעורה בהקשר של הבעיה, ולעתים קרובות אף אינו מפעיל את החשיבה. יתרה מכך, התלמיד מגבש לו אמונה שכל הבעיות המתמטיות ניתנות לפתרון מהיר, ללא מאמץ וללא כל צורך בהבנה כיצד באמת קשורה המתמטיקה, שבה הוא משתמש, לסיטואציות ממשיות.

המודל מציע גישה שונה של הוראה ולמידת מתמטיקה באמצעות פתרון בעיות ולא לשם פתרונן.

ערכן של הבעיות אינו רק בהיותן מטרה בלמידת מתמטיקה, אלא בעיקר בשל היותן אמצעי עיקרי ל"עשיית מתמטיקה". הוראת הנושאים המתמטיים נטועה בתוך הסיטואציה שהבעיה מזמנת, והעקרונות והמיומנויות המתמטיים מתפתחים כמענה הגיוני לבעיה המוצגת. לפיכך המטרה בהוראת מתמטיקה, היא ליישם מצבים של פתירת בעיות לא שגרתיות. דרך זו עדיפה מהדרך של פתרון בעיות פשוטות ורגילות, שבהן משתמשים במושגים או בטכניקות המתמטיות.

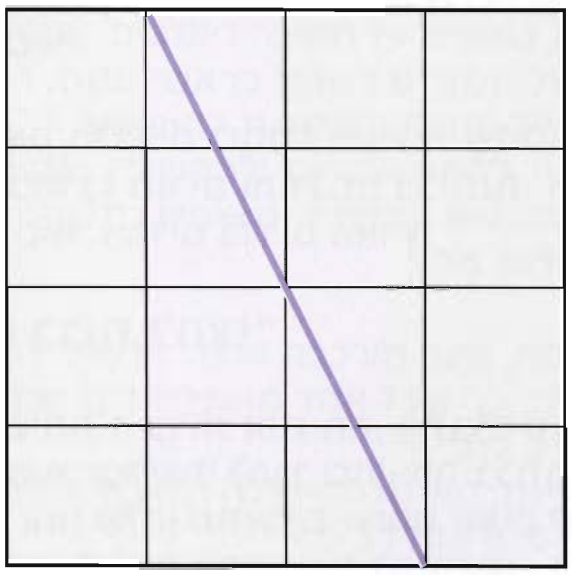
אדגים את הדברים בעזרת פעילות שנוסתה עם מורים במרכז מורים והודגמה בכיתות ד' – ה' בבתי– ספר אחדים בדרום הארץ.

"פנים רבות לחצי"

הדגמה:

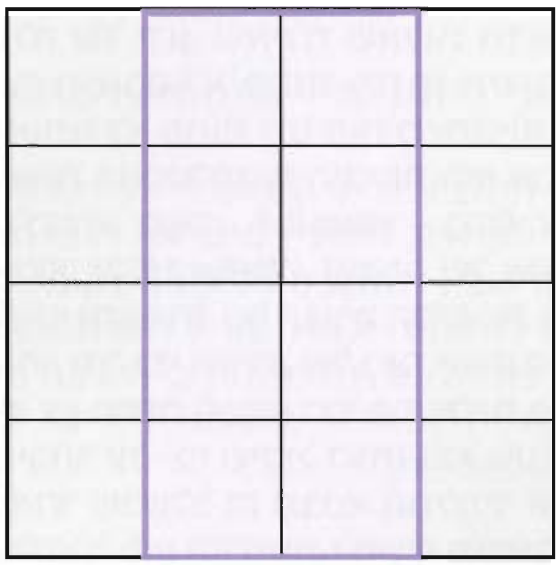
לאחר שיחת היכרות ופתיחה, כתבתי על הלוח את המספר וביקשתי לחבר בעל–פה/בכתב חידות שהפתרונות שלהן מתארים ייצוגים שונים למספר חצי. נתתי לילדים אפשרויות להשתמש בצורות ייצוג שונות למספר: ייצוג מוחשי (שלם, בדיד או רציף), ציורי, מילולי או מתמטי, תיאור הקשור לעולם הממשי. כל תלמיד והבחירה שלו. לאחר שנכחו התלמידים ברב–גוניות הייצוג של חצי הוצגה לפניהם הבעיה הבאה: בכמה דרכים שונות אפשר לחצות ריבוע בעזרת קו אחד בלבד. התשובות המידיות של התלמידים היו כצפוי: האלכסון והקו של "חצאי הצלעות". ביקשתי מהם לתאר באופן מילולי את הקווים הללו ולנמק מדוע אכן נחצה הריבוע על–ידי קווים אלו. הדיון זימן לנו שימוש במושג קו סימטריה ובהנמקה מתמטית. התלמידים "נתקעו" כאן והחליטו כי לפתרון הבעיה יש שתי דרכים בלבד. ניסיתי לפתוח להם כיוונים נוספים

לחשיבה; חילקתי להם דף ובו ריבועים שבהם משורטטות משבצות כקווי עזר (16 משבצות שוות), וביקשתי מהם לחקור אפשרויות חצייה נוספות – ועדיין דממה. התלמידים "ננעלו" כנראה על קו ישר בלבד. הערתי את תשומת לבם שבבעיה לא צוין באיזה קו מדובר. ואז נראה שאורו עיניהם. מכאן ואילך החלה התלהבות למלא את חלל הכיתה. התלמידים כולם, בלא יוצא מן הכלל, נרתמו למשימה למצוא אפשרויות רבות ככל האפשר לתאר חצי ריבוע. כל תלמיד הציג לפני המליאה את ההצעה שלו על גבי שקף ונדרש להביא הסבר לנכונות הפתרון. כל נימוק נבדק לגופו. במהלך השיעור בנינו רשימה של נימוקים ושבכל פעם הוספנו לרשימה סוג נימוק חדש שהועלה. הובאו נימוקים שונים, כגון חפיפת צורות, מנייה של משבצות וחצאי משבצות, השלמת חלקים לריבועים או למלבנים בתוך הצורה, ובכיתה ה' אף נימקו באמצעות חישובי שטחים. באחד השיעורים הציג תלמיד את הפתרון הבא:



הוא טען שזהו קו סימטריה. התלמידים שללו את הנימוק לאחר בדיקה. ביקשתי מהם לחפש נימוק שונה. אחד התלמידים השתמש בנימוק של צורות חופפות, ותלמיד אחר נעזר בהסבר על אלכסון החוצה מלבן וטען שכל חלק מורכב מחצי המלבן האמצעי ועוד ארבע משבצות. זוהי דוגמה לשיח מתמטי פורה שבו תלמידים שונים השתמשו בידע מתמטי שונה על מנת להסביר תופעה מתמטית. הדיון היה ערני; תלמידים שלפי עדות המורה בדרך כלל אינם מעורבים בשיעור באופן פעיל, העזו לעמוד מול הכיתה ולהסביר את דרך הפתרון שלהם. הפעילות הייתה פורה היות שהתלמידים תרמו לדיון ונתרמו.

פתרון אחר שהוצג בשיעור הביא להתפתחות הדיון בכיוון מעניין שלא התכוונתי אליו:



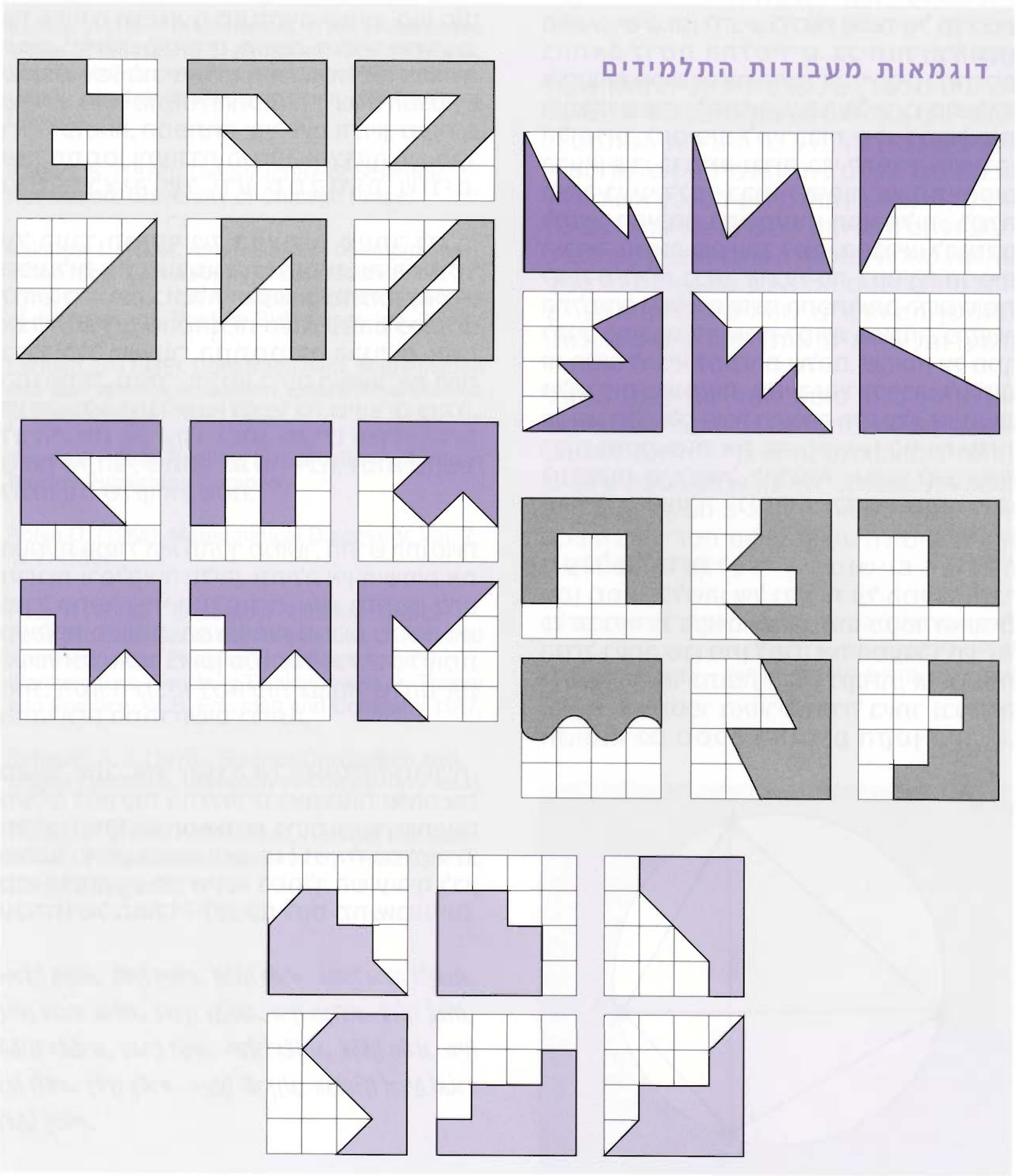
תלמידים אחדים טענו כי הפתרון אינו תואם את תנאי הבעיה – קו אחד. התלמיד עמד על דעתו שזהו קו אחד שבור וסגור שצורתו מלבן, והרי השאלה כלל לא הגבילה באיזה סוג קו מדובר. תלמידים רבים הסכימו אתו, ורק תלמיד אחד טען שהקו הסגור בשני קטעיו הקצרים "גוזל" מהשטח של שמונה המשבצות האמצעיות ואז לא מקבלים שני חצאים. כאן הייתה הזדמנות פז להתערב ולהסביר לתלמידים שבתורת הגיאומטריה הקו הוא דמיוני כאילו היה "דק מאוד מאוד" עד שאין לו שטח ואין לו עובי, והוא בעל ממד אחד בלבד – ממד אורך, ולכן יש לקבל את הפתרון. בהמשך הדיון הגענו להכרה, שיש מספר רב מאוד של אפשרויות לקבלת חצי, כי אפשר למעשה לשרטט משבצות כקווי עזר ככל שהמכשירים יאפשרו לנו. הדיון הזה זימן למורה אפשרות להציג לתלמידים את השאלה הפתוחה: מה היה קורה אילו...

התלמידים נתבקשו לחבר שאלות חדשות על ידי שינוי אחד הנתונים בבעיה המקורית והוצעו השאלות הבאות:

מה היה אילו...

1. השתמשנו בריבועים של 3X3? 5X5? או יותר?
2. נדרשנו ליצור חצאים חופפים בלבד?
3. נדרשנו להשתמש באחד מהקווים : קו ישר, קו עקום או קו שבור בלבד?
4. הייתה מגבלה לשרטט קו העובר דרך צלעות המשבצות או קדקודיהן בלבד?
5. היה עלינו לחצות מלבן בקו אחד? (הכוונה למלבן שאינו ריבוע – ג"ו)

כפעילות סיום נתבקשה כל קבוצה להכין קולאז׳ הבנוי מחצאים צבעוניים שונים זה מזה בצורתם ולהדביקם על כרטיסיית בריסטול A4. הם הציגו ״יצירות צבעוניות״ של ה״חצי״, שהתחברו לקולאז׳ כיתתי ססגוני. הרי לפניכם דוגמאות אחדות מהתוצרים:



הפעילות בכללה איפשרה מעורבות של רוב התלמידים. באמצעות הדרישה לנמק כל פתרון הזדמנה האפשרות להעמיק מושגים מתמטיים חשובים. ההתנסות זימנה לתלמידים שימוש פעיל בידע קודם מנושאים מתמטיים שונים, כגון סוגי קווים, מדידות, סימטריה, חפיפה, תכונות מרובעים, שטחים. הפעילות יצאה מראייה סגורה וסטריאוטיפית של ייצוג מושג מתמטי, והתפתחה לייצוגים המבטאים ראייה פתוחה, המפתחת יצירתיות ודמיון, מעוררת שיח מתמטי ומעודדת הנמקה והצדקה, וכן חקר ואינטגרציה של ידע ממקורות שונים.

על הערך המוסף של הפעילות מיותר לדבר; הפעילות עודדה למידה שיתופית, והיה אפשר לחוש בביטחון ביכולת "לעשות מתמטיקה" גם אצל תלמידים שהמחנכות העידו עליהם כסבילים בדרך כלל בשיעורי המתמטיקה הרגילים. אחת התלמידות, מלינה, סיכמה בתום השיעור את חוות דעתה עליו: "חבל שאין לנו הרבה שיעורים כאלה, לא הרגשנו איך עובר הזמן, חקרנו ויצרנו צורות שונות של חצי, פיתחנו את החשיבה, למדנו שחשוב לנמק וגם שלקו אין שטח.*

הטמעת המודל היא תהליך ממושך, הדורש התנסויות מרובות ורפלקציה עליהן. תחילה אין חושפים את מודל החקר לפני התלמידים, אלא מזמנים להם פעילויות מכוונות, המצמיחות מצבים של פתירת בעיות ומבטאות באופן סמוי את מרכיביו. לעומת זאת, המורה מביא למודעות גבוהה שלהם את התהליכים המתרחשים בכיתה.

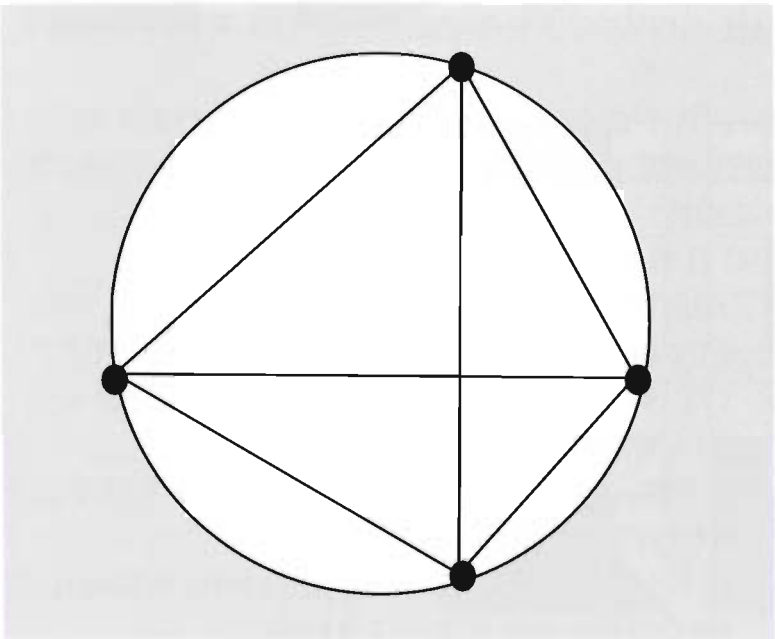
מאוחר יותר, אחרי סדרה של התנסויות מרובות, מעלים למודעות התלמידים באמצעות שיחה את תהליכי החקר שבהם התנסו. בתום שיעור, שתיאורו פורסם בגיליון הקודם (מס' 17) נשאלו התלמידים: מהו הדמיון בין מה שעשו במהלך השיעורים לבין עבודתו של החוקר? לפניכם לקט מתשובותיהם:

איפשנו סקרות פשינו ניסויים, מצאנו רמזים, אספנו הרבה בוגמאות גילינו בדרים חדשים, פגרנו מגלומה, היינו סקרנים, שאלנו שאלות שסרנו השסרות פגרנו רסיה, איפשנו משורות מצאנו סובות היינו כמו רלשים, גילינו קשרים, הגסנו למסקנות האמצנו להגיס למטרה ראסל ניסויים.

אם נעיף מבט חוזר במודל החקר, ניווכח שהתלמידים ציינו בתשובותיהם כמעט את כל המרכיבים החשובים המופיעים בו. בעזרת רעיונות שהם עצמם מעלים, חושפים לפניהם את המודל על מרכיביו השונים. יש כמובן להציגו בדרגות שונות של מורכבות בהתאם לרמת התלמידים. בכיתות הנמוכות והבינוניות מפשטים את המודל ומתייחסים למרכיבים העיקריים שבו. בהמשך, עם העלייה ברמה ובגיל הלומדים, מוסיפים למורכבות שלו. למשל, את הרעיון שדי בדוגמה נגדית כדי להפריך השערה, חשוב בעיני ללמד בכתות היסוד. אין מתייחסים למושג ההוכחה במשמעותו הפורמלית; במלה הוכחה, הכוונה כאן יותר למתן הסבר או להנמקה לוגית מילולית בכתב או בעל פה. בחטיבת הביניים התלמידים בשלים מבחינת התפתחותם הקוגניטיבית להגיע לתובנות הקשורות למושג ההוכחה. בהקשר זה חשוב להביא למודעות שלהם, שהיסק על סמך גילוי דפוס בדוגמאות מחייב זהירות רבה; לעיתים אין הוא תקף ולכן חובת ההוכחה חלה עליו, ודוגמאות רבות המאששות את ההיסק אינן בחינת עדות לתקפותו. כך למשל, להדגמה, אפשר להציג את הבעיה הקשורה לנקודות ולקטעים במעגל:

מעגל ונקודות

סמן מספר כלשהו של נקודות על המעגל וחבר כל זוג נקודות בקווים ישרים. מהו מספר האזורים הגדול ביותר שבו ניתן לחלק את המעגל בדרך זו? לדוגמה, כאשר נתונות ארבע נקודות, אזי שמונה אזורים הוא מספר האזורים הגדול ביותר (במקרה זה, הוא גם מספר האזורים הקטן ביותר).



תוך כדי התנסות בפתרון ובדיונים מגלים התלמידים שהחוקיות "נשברת" ושהתבנית המתגלה בדוגמאות היא בסיס טוב להשערה חכמה, אך זו עדיין טעונה הוכחה.

סוף דבר

הניסיון מלמד, שבעבודה עקבית ומאומצת התהליכים האלה נטמעים באמצעות ההתנסויות והופכים בהדרגה חלק מן התרבות המתמטית בכיתה. נוצר אקלים כיתה המעודד חשיבה מתמטית ודיאלוג מתמיד בין התלמידים. הם אחראים לבניית רעיונותיהם ולהעלאת השערות ובדיקתן. בסביבה זו הצגת שאלות חשובה לא פחות ממציאת פתרונות. התלמידים בונים את הידע של עצמם בתהליך מתמשך הם חוקרים, שואלים שאלות, משערים השערות, בודקים אותן, מסיקים מסקנות.

זהו תהליך בלתי פוסק, המזין את עצמו. המודל הוא חלק מהותי מהסביבה הלימודית שעל המורים לבנות בעבור התלמידים כדי להביאם ללמידה משמעותית. ואכן, "אם לא נעצב סביבה שילדים יוכלו לגלות בה את המושגים הפעילים שלהם, הם עלולים להיעשות בורים חסרי תקנה בכל המדובר ביישום של ידע" (Paul, 1978).

*את הסרט על השיעור במלואו אפשר להשיג במרכז מורים דימונה - שיעור בערד;
או במרכז מורים חמדת הדרום - שיעור בנתיבות.

ביבליוגרפיה

פישביין, א', תירוש, ד' המתמטיקה והמציאות, (מאמר שלא פורסם) (1993).
אוניברסיטת תל-אביב.

Easley, J. (1967) in Lerman, S. (1986). Alternative Views of the Nature of Mmathematics and Their Possible Influence on the Teaching of Mathematics. Unpublished doctoral dissertation., University of London

Khun T. S. (1970). The Structure of Scientific Revolution. University of Chicago Press.

Lakatos, I. (1986). A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics? In T. Tymoszko (ed.). New directions in the Philosophy of mathematics. Boston: Birkhauser. (pp. 29-48).

Lerman, S. (1989). Constructivism, Mathematics and Mathematics Education. Educational Studies in Mathematics, 20, 211-223.

Mason J. (1992). Thinking Mathematically. Addison Wesley Publishing Company.

Polya G. (1965). Mathematical Discovery, Vol. 2. N Y: Wiley.

Paul, R.(1978). " Dialogical Thinking: Critical Thought Essential to the Acquisition of Rational Knowledge and Passion" in J. Baron and R. Stenberg (eds.) Teaching Thinking Skills — Theory and Practice. W. H. Freeman and Company 1987.

Schwab, J. J. (1978). Science Curriculum and Liberal Education. University of Chicago (in Press).

Walter, M. (1970) .What if not. Harvard Graduate School of Education Reprinted by TRUEX press, (Oxford England).