מירי בן ארי ואיריס רוזנטל

חוקרים ויוצרים / יוצרים וחוקרים

"בעיות החקר במתמטיקה יכולות להיות משולות למסע לעולם בלתי ידוע. קיים מצב של תסכול, אי-ודאות עייפות וגם התרגשות, יופי ואתגר של גילוי.
אין שום בהילות להשיג, המסע מעניין בפני עצמו ולא ממתין ציון בסוף הדרך".
(Frederick W. Stevenson, 1991)

במאמר זה מתואר תהליך של פתרון בעיית חקר מתמטית הדורשת איסוף נתונים מספריים וגילוי הקשר ביניהם. במאמר מוצגת בעיה המדגימה את התהליך. הדוגמה שנבחרה פועלת בתחום המספרים הטבעיים עד 50 ודורשת ידע בסיסי בארבע פעולות חשבון. שלבי הפתרון מוצגים בהקבלה למיומנויות הקוגניטיביות הנדרשות. בעיה זו נוסתה בכיתה ה' בבית ספר "הגליל" בדרום תל אביב והתלמידים פעלו בקבוצות הטרוגניות. בהמשך יוצגו במקביל שלבי פתרון אפשריים ותהליך הפתרון כפי שנצפה בכיתה.

שני תחומי הלימוד העיקריים במערכת החינוכית בביה"ס היסודי הם: מקצועות העברית והמתמטיקה. יצירתיות נתפסת כחלק בלתי נפרד מתחום מקצועות העברית, ואילו המתמטיקה נתפסת, בדרך כלל, כמערכת של אלגוריתמים, כללים ונוסחאות, ולכאורה אין בה מקום לרעיונות חדשים.

לדעת הלומדים, עולם המתמטיקה כבר נברא ואין סיכוי שתלמיד ממוצע יעלה רעיון חדש. היצירתיות במתמטיקה והרעיונות החדשים שמורים לכאורה לגאונים כמו ניוטון או אינשטיין. תפיסה זו שגויה, ועלינו לשאוף לכך שעשייה יצירתית תהווה חלק בלתי נפרד מלימוד המתמטיקה בכל גיל, ושהאומץ לחקור יהווה חלק מן הכישורים שמפתח תלמיד בתהליך הלמידה שלו.
בעיות חקר טובות אינן תמיד בנמצא. מבעיה טובה אנו מצפים שתהיה מרתקת והעיסוק בה יעורר שאלות נוספות, המזמנות העלאת רעיונות מקוריים וחקר נוסף.

דיון במושג החקר המתמטי מעלה מאפיינים רצויים נוספים:

- המתמטיקה חייבת להיות בבסיס התפיסה.
- הבעיה תאפשר עיסוק מעניין לרמות שונות של לומדים, כך שייתכנו פתרונות ברמות שונות וכל פתרון יספק.
- חיפוש הפתרון יתבסס על השערה ואיסוף נתונים.
- ארגון הנתונים בדרכים שונות יכול להוות מקור לחקר נוסף, כך שהבעיה תוביל לבניית בעיות נוספות.

נביא לדוגמה את הבעיה הבאה:

בחרו שני מספרים חיובים שלמים (זהים או שונים). חברו אותם. כפלו אותם. חברו את המכפלה והסכום.

מהו המספר הגדול ביותר עד 50 שאינכם יכולים לקבל בתהליך זה?

כדי לפתור בעיה זו יש צורך באיסוף נתונים שיהוו חומר גלם לחקר.
לאחר איסוף הנתונים המספריים יש לארגנם. הנתונים ניתנים לארגון בדרכים שונות. הדרך הנבחרת לארגון חשובה, משום שהיא תקבע את כיוון החקר. ריכוז הנתונים, ארגונם והצגתם יאפשרו לגלות את הקשרים ביניהם. החוקיות שתתגלה בנתונים שנאספו תיבדק בנתונים נוספים לצורך אימות ההכללה.
בעיות חקר מסוג זה יכולות לזמן גם פעילות בגיליון האלקטרוני, המאפשר (בין השאר) איסוף נתונים רבים וארגונם, התמקדות בתהליך חקר ולא בחישובים, אפשרות לאישוש מסקנות בתחומי מספרים שונים ושימוש בייצוגים אלגבריים, טבלאיים וגרפים. יש לשקול את שילוב הגיליון בתהליך על-פי מידת תרומתו לפתרון הבעיה.[1]

שלבי פתרון אפשריים ותהליך עבודה כפי שנצפה בכתה ה' בבית ספר "הגליל" בתל-אביב:

הבנת הבעיה ויצירת הנתונים.

בשלב התחלתי זה הפותרים נחשפים לבעיה ומנסים להבין את כוונת הדברים.
התלמידים בחרו זוגות של מספרים בתחום ה-10 כפלו אותם, חיברו אותם וחיברו את שתי התוצאות. זהו השלב שבו המורה מבררת אם השאלה ותהליך איסוף הנתונים ברורים לילדים. התלמידים בחרו כמה זוגות מספרים והפעילו אותם על-פי ההוראות שניתנו בבעיה.

לדוגמה - זוג המספרים 3 ו- 5.

$5 \cdot 3 = 15$, $3+5 = 8$, $8+15 = 23$.

המספר שהתקבל הוא 23.

ודוגמה נוספת: מזוג המספרים 1 ו- 2 התקבל המספר 5.

$2 \cdot 1 = 2$, $2+1 = 3$, $2+3 = 5$

כעת נשאלו הילדים שתי שאלות: הראשונה היתה בקשה להשערה לגבי המספרים שיתקבלו בעקבות איסוף הנתונים, והשנייה נגעה לטווח המספרים שאותם יש לבדוק.
הילדים העלו השערות שונות לגבי האפשרות של קבלת המספרים. היו שטענו שאפשר לקבל את כל המספרים בתהליך זה. אחרים טענו שאולי אי

[1] בבעיה המוצגת כדוגמה במאמר זה אין קושי בחישוב וייצוג נוסף אינו תורם להבנת הבעיה, לכן שימוש בגיליון אינו מהותי.

אפשר לקבל מספרים ראשוניים או אי-זוגיים. בהמשך ניסו התלמידים לברר עם אלו מספרים כדאי לבצע את החקר. כך, למשל, הם גילו כי אין טעם לבדוק את זוג המספרים 5 ו- 8 משום שחיבור הסכום שלהם עם המכפלה שלהם יתן תוצאה גדולה מ- 50.

ארגון הנתונים (תוך כדי המשך יצירתם)

הילדים החלו לאסוף נתונים. הם עבדו תחילה לבד ולא באופן שיטתי. לאחר כמה דקות של עבודה ביקשה המורה להתבונן בתוצאות שהתקבלו. התלמידים לא הצליחו לזהות כל קשר בין התוצאות. המורה שאלה את התלמידים כיצד יהיה אפשר לארגן את הנתונים כך שתתאפשר בדיקת קשר כלשהו בין התוצאות (במידה ויש).

הילדים בקבוצה שנצפתה החלו לשתף פעולה. כל זוג ילדים בחר זוגות מספרים כך שאחד המספרים בזוג קבוע והשני מתחלף לפי הסדרה ... 3, 2, 1 הם הציעו לרכז את הנתונים בטבלאות.

זוג המספרים	הסכום	המכפלה	סכום התוצאות
1,1	2	1	3
1,2	3	2	5
1,3	4	3	7
1,4	5	4	9
1,5	6	5	11
.			
.			

זוג המספרים	הסכום	המכפלה	סכום התוצאות
2,1	3	2	5
2,2	4	4	8
2,3	5	6	11
2,4	6	8	14
2,5	7	10	17
.			
.			

זוג המספרים	הסכום	המכפלה	סכום התוצאות
3,1	4	3	7
3,2	5	6	11
3,3	6	9	15
3,4	7	12	19
.			
.			

חיפוש התבנית

במהלך חיפוש הפתרון עלו שאלות נוספות שנבעו מתהליך איסוף הנתונים וארגונם. למשל, מה הקשר בין התשובות שמתקבלות? האם אפשר להמשיך להשלים את העמודות בלי לחשב ועוד. שאלות אלו כיוונו את התלמידים לחיפוש קשרים בין התוצאות. הם זיהו היווצרות של סדרות בטבלאות השונות. ההפרשים בכל סדרה היו שונים והם תארו התפתחות הסדרות. בשפה שלהם. "זה עולה בדילוגים של....".

הילדים חיפשו את המקור לשוני. הם ניסו לבדוק אם קיים קשר בין הסדרות השונות שנוצרו בטור של סכום התוצאות לבין זוגות המספרים שאותם בדקו.

הקשר שגילו היה, שבכל סדרה הטור של סכום התוצאות גדל בסכום של זוג המספרים הראשון שאותו כפלו וחיברו. לדוגמה, כאשר זוג המספרים הראשון היה 1,1 טור סכום התוצאות גדל ב- 2 וכאשר הזוג היה 2,1 טור סכום התוצאות גדל ב- 3. ארגון הנתונים חשף חוקיות מתמטית שאותה ניסו התלמידים להסביר, אך התקשו לנמק.

בכתיבה אלגברית אפשר להציג זאת כך:

1. כאשר אחד המספרים הוא 1 והשני K ‏(k=1,2,3...)
איברי הסדרה הם מהצורה:
$(1+k)+(1k)=1+k+k=1+2k$

ההפרש בין שני מספרים סמוכים בסדרה זו יהיה 2:
$1+2(k+1)-(1+2k)=2$

2. אם 2 הוא אחד המספרים תתקבל סדרה של ...5,8,11,14. במקרה זה הנוסחה תהיה:
$2+3k$ כאשר ...K= 1,2,3.
$(2+k)+(2k)=2+k+2k=2+3k$
במקרה זה הפרש שני מספרים סמוכים הוא $[2+3(k+1)]-(2+3k)=3$ ולכן הפרש הסדרה הוא 3.

3. אם 3 הוא אחד המספרים תתקבל הנוסחה: $3+4K$ והפרש הסדרה יהיה 4 וכך הלאה.

בדיקת ההכללה בעזרת נתונים נוספים

לאחר שהילדים גילו את חוקיות הסדרות שנוצרו הציעה להם המורה לבדוק אם מסקנה זו תהיה נכונה לגבי כל זוג מספרים שיבחרו. למשל, מה יהיה הפרש הסדרה שתיווצר בתהליך מסוג זה מזוג המספרים 1 ו – 9?

התאמת נוסחה והצדקתה

מחקר המקרים הפרטיים יכולנו להגיע להכללה הבאה: אם **m** הוא אחד המספרים, תתקבל הסדרה הבאה: **$m+(m+1)k$ כאשר.... $K=1,2,3$**.

להצדקת הנוסחה נצא מהגדרת הבעיה נציג זאת בצורה הבאה: לכל זוג מספרים **m** ו– **n** אם נחבר **n+m** , נכפול **m** ב– **n** , ונחבר את התוצאות נקבל:

$$(m \cdot n) + (m + n) = m + (m + 1)\, n$$

כעת אם נבחר עבור **n** את המספרים 1, 2, 3... נקבל את הסדרות שהופיעו בטבלה. מציאת הנוסחה שייכת לשלב האינדוקטיבי של החקר, ואילו הצדקתה שייכת לשלב הדדוקטיבי שלו. השאלה המקורית הייתה למצוא את המספרים עד 50 שאינם יכולים להתקבל מפעולות הכפל והחיבור.

על מנת לענות על השאלה המקורית הציעה המורה לבנות טבלת מספרים מ– 1 – 50. כל מספר שהתקבל בפעילות הקודמת נמחק. מספרים מסוימים נמחקו פעמים מספר משום שהופיעו בסדרות שונות.

1	2	3	4	~~5~~	6	~~7~~	~~8~~	~~9~~	10
~~11~~	12	~~13~~	~~14~~	~~15~~	16	~~17~~	18	~~19~~	~~20~~
~~21~~	22	~~23~~	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	28	~~29~~	30

בטבלה המוצגת כאן המספר הגבוה ביותר שלא נמחק היה 30.
אם היינו ממשיכים עד 50 היינו רואים ש– 46 הוא המספר הגבוה ביותר.

תהליך הניפוי הזכיר לתלמידים את נפת ארטוסטנס ולכן היו משוכנעים שהמספרים שלא ימחקו יהיו גם הם ראשוניים. כאשר 3 נמחק ו– 4 לא נמחק הופרכה השערה זו.

השאלה נפתרה בחלקה.
המורה שאלה את הילדים: מה משותף למספרים שלא נמחקו? שאלה זו גררה ניסיון למצוא את המשותף למספרים שלא נופו בלוח הזה. מה שהתגלה היה, שלמספרים שלא נמחקו יש קשר למספרים הראשוניים. כל המספרים קטנים ב– 1 מהמספר הראשוני שאחריהם, או בניסוח אחר: כולם נמצאים מקום אחד לפני מספר ראשוני. האם ניתן להוכיח זאת בצורה אלגברית? אם נסתכל על המספרים שהצלחנו לקבל הרי שכולם מהצורה **$m+(m+1)n$**. כיצד ייראה מספר העוקב למספר זה?

$$m+ (m+1)n+1=m+1+(m+1)n= (m+1)(n+1)$$

כלומר המספר העוקב יהיה תמיד פריק! ולכן מובטח לנו, כי כל מספר העונה לצרכי הבעיה והתקבל בחישוב יבוא **לפני מספר פריק**. זאת אומרת שלא נוכל, על–פי תנאי הבעיה, לקבל מספרים שיבואו לפני מספרים ראשוניים.

בכיתה ה׳, כמובן, הסתפקו במציאת הפתרון – זיהוי המספרים וחיפוש המשותף לקבוצת המספרים, ולא עברו לשלב הדדוקטיבי של החקר.

הרחבת המשימה

לאחר גילוי התשובה ביקשה המורה מן הילדים להתבונן במה שעשו ולנסות לשאול שאלות חקר נוספות. הצגת שאלות עם גילוי הפתרון הוא אחד מגילויי היצירתיות בתהליך החקר. שאלות לדוגמה שעלו היו:

- מה משותף למספרים שנמחקו פעם אחת בלבד? שתי פעמים שלוש פעמים וכו׳
- מה יקרה אם התנאי יהיה ששני המספרים חייבים להיות שונים?
- מה יקרה אם נחסר במקום לחבר? בעקבות שאלה זו נוסחו שתי גרסאות של הוראות:
  - בחר שני מספרים חיוביים. חסר את הקטן מהגדול.

כפול אותם. חבר את ההפרש והתוצאה.
מהו המספר הגדול ביותר עד 50 שאינך יכול לקבל?

- בחר שני מספרים. חבר אותם. כפול אותם. חסר את התוצאה הקטנה מהגדולה. מהו המספר הגדול ביותר עד 50 שאינך יכול לקבל?

- מה היה מתגלה לו היינו מארגנים את הנתונים באופן אחר?

למשל, לו היינו בונים מן הנתונים שהתקבלו לוח מספרים, כמו למשל הלוח הבא:

15	13	11	9	7	5	3
23	20	17	14	11	8	5
31	27	23	19	15	11	7
39	34	29	24	19	14	9

המורה עודדה את הילדים להמשיך ולחקור את השאלות שהעלו. חקר השאלות השונות יגלה שחלק מן השאלות טובות ומובילות לחקר מעניין נוסף, וחלקן אינן מובילות לחקר. חלקן ניתנות לפתרון מידי וחלק קשות מדי. החשוב הוא לשאול שאלות. תלמידי הכיתה טענו, כי אחרי שיחקרו ויגלו עוד דברים הם בטח ישאלו עוד שאלות - יחקרו אותן, ישאלו שאלות אחרות, "עד אין סוף...". זוהי בעצם תמצית העניין - כשחקר מוביל לחקר.

לסיכום

זוהי משימה המתאימה לפעילות בקבוצה הטרוגנית. כל אחד מתלמידי הכיתה אסף חלק מהנתונים; איסוף הנתונים מכל חברי הקבוצה איפשר את מציאת הפתרון.

גילוי הפתרון ברמות השונות שלו (בכל דרגת עומק) השלים את השלב האינדוקטיבי של החקר, ולגבי התלמידים בכיתה ה' סימן גם את סוף תהליך פתרון הבעיה. תלמידים בוגרים יותר יכולים לחפש דרך לנסח את החוקיות גם בדרכים פורמליות, כמו בניית נוסחה, דבר שמעיד על יכולת הפשטה והבנה מעמיקה של הבעיה. מקצת מהתלמידים יוכלו להמשיך בתהליך לשלב הדדוקטיבי בחקר ויחפשו הצדקה לפתרון. סיום שלב זה מתרחש בתוך פרק זמן בלתי מוגדר.

עם זאת, חשוב לציין כי גם פותר שלא מגיע לשלב הדדוקטיבי מסוגל להמשיך ולחקור כיוונים אחרים ושאלות נוספות.

היצירתיות מהווה חלק חשוב בתהליך בשני השלבים, האינדוקטיבי והדדוקטיבי; היא מתבטאת באסטרטגיות שנבחרו לפתרון; בהגדרת המונחים, בקביעת המשתנים, במציאת החוקיות ובהצגת הפתרון. גילוי אחר של יצירתיות מתבטא ביוזמה של חקר חדש, היכול גם לנבוע, כמו בדוגמה זו, מחקר קודם.

ניתן לומר, כי ההיבט היצירתי בתהליך אכן אינו מסתיים לעולם, ובכך שנזמן לתלמידינו מצבים שבהם יוכלו ליצור שאלות, לחקור אותן וליצור שאלות נוספות נאפשר להם להבנות את הידע המתמטי שלהם בכוחות עצמם.

בבליוגרפיה:

Fredric w. Stevenson,Exploratory Problems in Mathematics, University of Arizona, 1991.