ד"ר רינה גפני

מספרים חזקים

"טבעי" שבכתב-העת הנושא את השם "מספר חזק" תהיה כתבה העוסקת במספרים (שאלת היותם "חזקים" תלויה ועומדת בגישתו של כל אחד לנושא, וזו כנראה שאלה "פתוחה" עם תשובות רבות).

המספרים הטבעיים הם חלק בלתי נפרד מאתנו ולא נעסוק בשאלה הפילוסופית של מקורם; ידועה האמרה: "אלוהים ברא את המספרים הטבעיים וכל שאר המספרים הם מעשה ידי האדם" (ליאופולד קרונקר 1823 – 1891) – ואפשר להסכים או לא.

וסיפור קטן על מספרים ובעלי-חיים; בתצפיות שערכו על ציפורים מסוימות הבחינו בתופעה מעניינת, כאשר נמצאו בקן ארבע ביצים ולקחו אחת הציפור לא הגיבה, ואילו כשלקחו שתיים נטשה הציפור את הקן, זאת אומרת שהיא יכולה להבחין בין שתים לשלוש אך לא בין שלוש לארבע. רק לאחרונה נמצא, שאפשר ללמד שימפנזים למנות עד 9 והם אף יכולים להצביע על סדר המספרים.

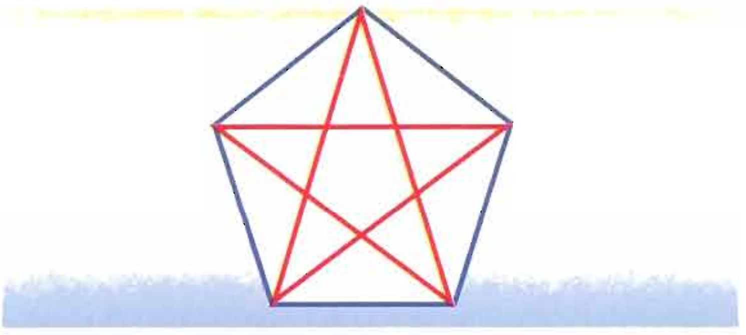
במאמר זה נעסוק בשלושה מספרים, קצת תכונות, קצת היסטוריה וקצת פיקנטריה- צאו וחשבו היכן וכיצד לשלבם בהוראה.

נתחיל במספר 5

החמש הקרוב ביותר אלינו, ובעצם בתוכנו, באצבעות ידינו, רגלינו ובחושינו.

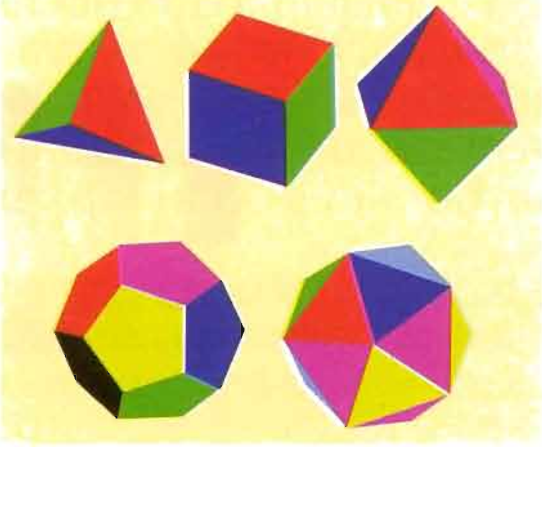
החמש בגימטריה הוא ממש אלוהי (ה'), ובמסורת ישראל ידועים **חמשת חומשי** התורה.

בגיאומטריה: המחומש המשוכלל הוא מצולע מיוחד, שכן אם נשרטט את כל אלכסוניו נוכל לראות שהם יוצרים כוכב, שבתוכו נמצא מחומש נוסף . וכך אפשר לציירם זה בתוך זה בלי סוף. הכוכב הנוצר מהאלכסונים הוא צורה שניתן לשרטט אותו במשיכת קולמוס -נסו ובדקו.



ומהמישור למרחב:
קיימים בדיוק **חמישה** גופים משוכללים, המכונים גופים אפלטוניים (אפלטון 427-347 לפנה"ס). הייחוד של גופים אלו בכך שכל פאותיהם בנויים ממצולעים משוכללים חופפים ובכל אחד מהקדקודים של הגוף יוצאים אותו מספר מקצועות:

- הארבעון -פרמידה משולשת (הטטראהדרון) -4 משולשים שווי צלעות.
- התמניון (האיקוסהדרון) – 8 משולשים שווי צלעות, גוף הבנוי משתי פרמידות מרובעות בעלות בסיס משותף.
- העשרימון (האיקוטהדרון) 20 משולשים שווי צלעות.



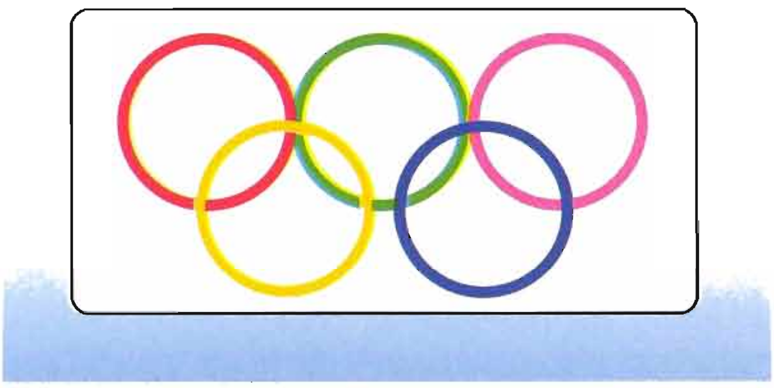
- הקוביה – 6 ריבועים.
- התריסריון (דודקהדרון) מורכב מ-12 מחומשים משוכללים.

נשאלת השאלה, מדוע לא נוכל לבנות גופים משוכללים מכל מצולע משוכלל?
כדי לענות על כך יש להסתכל על גודלן של הזוויות הנוצרות בכל מצולע. אנו יודעים שכדי לצור גוף יש צורך בשלושה מצולעים לפחות, וכי סכום הזוויות הנוצרות ליד כל קודקוד צריך שיהיה קטן מ 360^0. כעת ברור שנוכל לבנות גוף עם משולשים שווי-צלעות. כדי לבחון כמה אפשרויות יש עלינו למצוא n כך ש $n \times 60 < 360$ מאחר ו-n יכול לקבל את הערכים 3,4,5 נקבל שלוש אפשרויות לבניית גופים השונים במספר המשולשים היוצרים את הקודקודים ($3x60$ $4x60$, $5x60$). נוכל לבנות גוף עם ריבועים ($3x$ 90), וגוף עם מחומשים ($3 x 112$). אם ננסה לבנות גוף משוכלל עם משושים משוכללים נוכל לראות מיד ששלושה משושים יוצרים בדיוק 360^0, ולכן לא ניתן לצור עמם גוף משוכלל. ומכאן גם ברור, שמאחר שגודל הזווית של המצולע המשוכלל הולך וגדל ככל שגדל מספר הצלעות, הרי שלא נוכל לבנות גוף עם מצולעים משוכללים שמספר צלעותיהם גדול מחמש.

הפיתגוראים (המאה השישית לפנה"ס) שהתייחסו למספרים בהיבטים מיסטיים ונומרולוגיים ראו את המספרים הזוגיים כנקביים ואת האי-זוגיים כזכריים. ה **1** נחשב למיוחס ולמייצר של שאר המספרים, אך לא היה בעצמו מספר –הוא היווה את יסוד התבונה. המספר **2** שהיה המספר הנקבי הראשון היווה את יסוד הסברה (opinion); המספר **3**, המספר הזכרי הראשון הוא יסוד ההרמוניה; המספר **4** הוא יסוד הצדק; **והמספר 5** הוא יסוד הנישואין, בהיותו המספר הקטן ביותר שאפשרתי ליצור ממספר נקבי וזכרי, **6** הוא יסוד הבריאה.

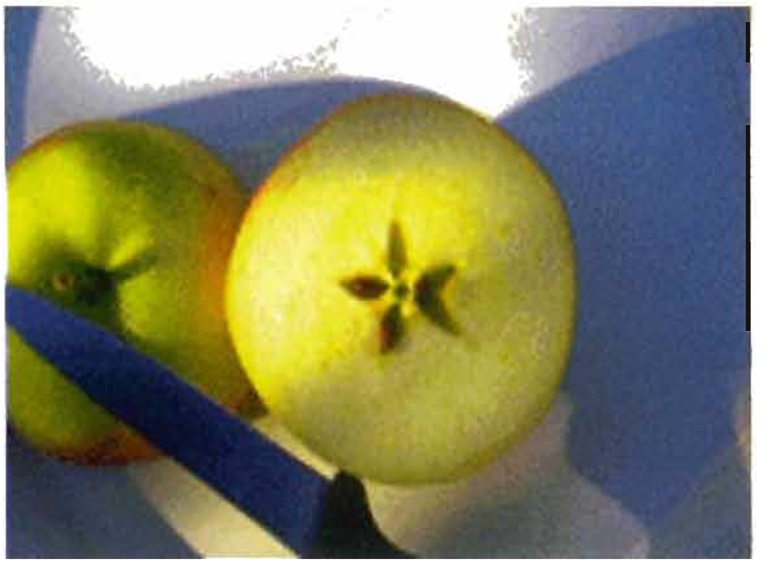
המספרים **3,4,5** מהווים את השלשה הפיתגוראית המפורסמת-אם נבנה משולש שאלו הן צלעותיו נקבל משולש ישר זווית שכן $5^2 = 4^2 + 3^2$. קשר זה נוצל כנראה בתקופה הקדומה לבדיקת אנכותם של קירות: הבנאים חתכו מקלות שיחס אורכיהם 3:4:5 ויצרו מהם משולש בעל זווית ישרה שאותה ניצלו לעבודתם.

והצצה קלה לסמל האולימפיאדה מראה, שהוא מורכב מחמישה עיגולים שזורים זה בזה, שכל אחד מהם מייצג יבשת.



בטבע נוכל למצוא פרחים רבים שמספר עלי הכותרת שלהם הוא חמש

נסו לחצות תפוח ולבדוק כיצד מסודרים הגלעינים

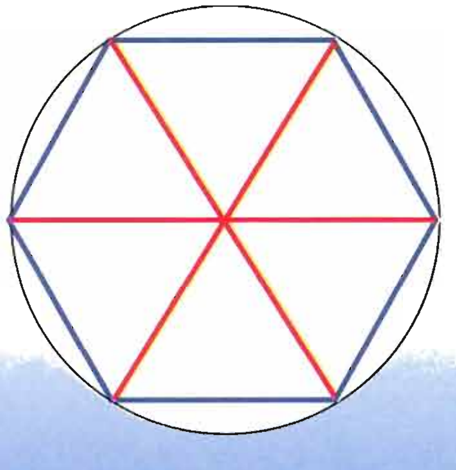


ולסיום נתבונן בכוכב הים

וכעת לשכן העוקב – 6

השש במקורותינו מתאר את מספר ימי הבריאה, ואת מספר סדרי המשנה (**שישה** סדרי משנה, חמישה חומשי תורה... אחד אלוהינו).

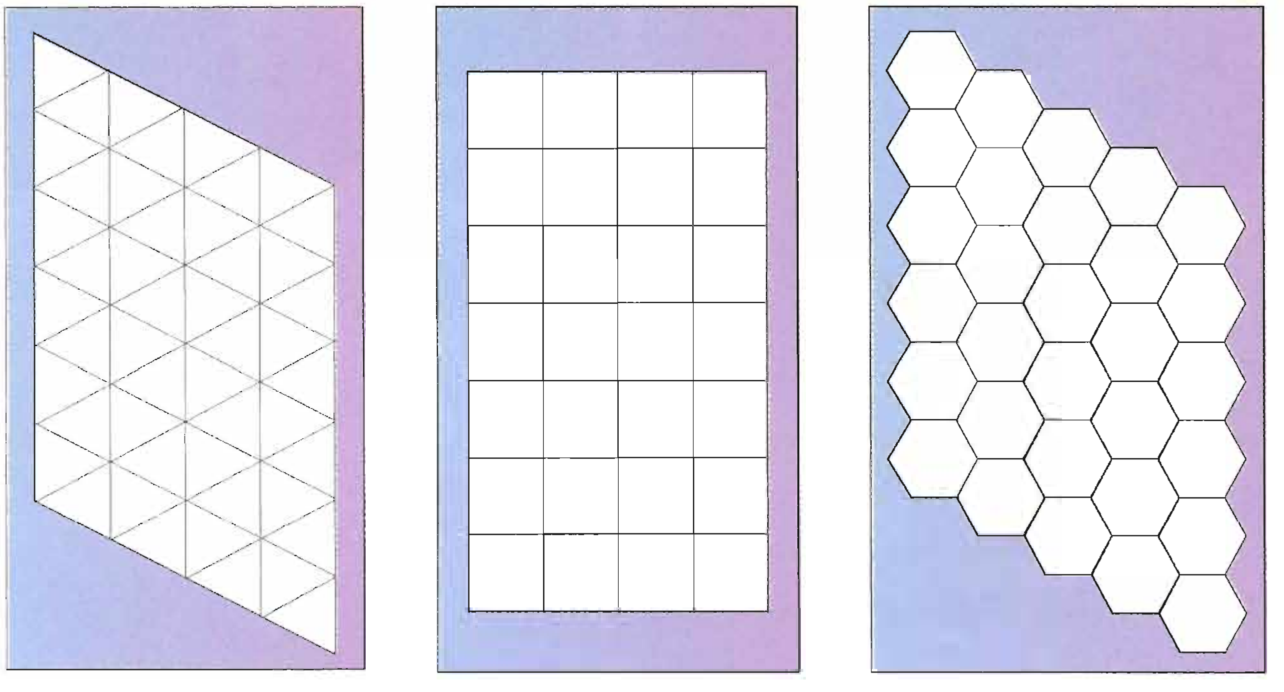
המספר **שש** נקשר למזל בהקשר למשחקי קוביה – מספר מבוקש המזכה לרוב ב"תור נוסף". בגיאומטריה **המשושה** המשוכלל הוא מצולע בעל עניין מיוחד: אפשר להפרידו לשישה משולשים שווי-צלעות, ואם נחסום אותו במעגל תהיה כל צלע שלו שווה באורכה לרדיוס המעגל.

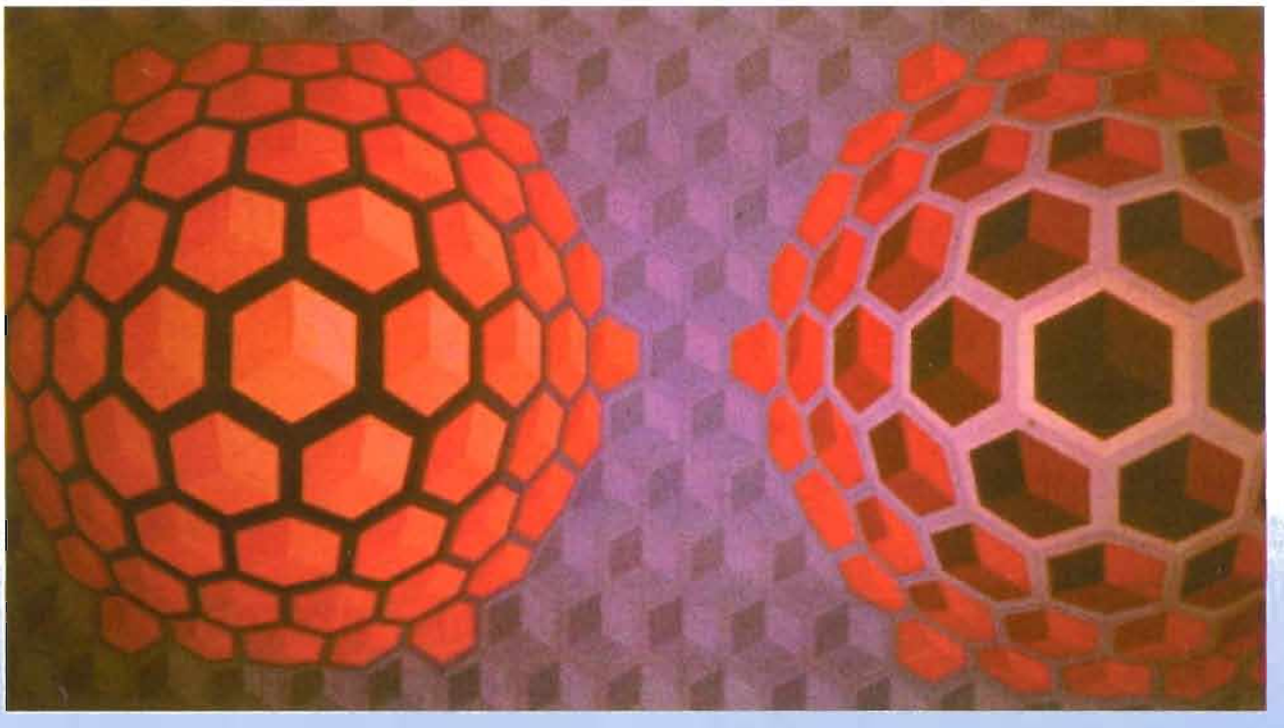


ותכונה נוספת וחשובה של **המשושה היא היותו** אחד משלושת המצולעים המשוכללים היחידים שעמם אפשר לרצף משטח בשמירה על הכללים הבאים: מותר להשתמש במצולע משוכלל מסוג אחד בלבד, ובכל הקדקודים של הריצוף אותו מספר מצולעים.

מדוע אפשר לרצף רק עם שלושת המצולעים המשוכללים הללו?

נסו לבחון את השאלה: מה גודלה של כל אחת מזוויות המצולע, והאם היא מהווה מחלק שלם של 360? וברור מכאן, שהמשולש שווה הצלעות יתאים לריצוף, שכן כל אחת מזוויותיו היא בת 60^0, וכך גם הריבוע – 90^0 , וכך גם המשושה שכל זווית שלו בת 120^0.





Victor Vasarely

ניצול אפשרות הריצוף באמצעות משושים רואים בחלת הדבש, מבנה המצטיין ביכולת אכסון.

כבר במאה השלישית לספירה מתאר המתמטיקאי היווני פאפוס, במבוא בכרך החמישי של ספרו "אוצר המתמטיקה". בסגנון ספרותי וכדרך הפילוסופים הוא מתאר את תבונתם הרבה של הדבורים: "הסדר והניקיון של הדבורים וחסכונן המשקי ראויים באמת להערצה. הן, כנראה, חשות שהופקדה בידן המשימה להביא לבני אדם משולחן האלים את שיירי האמברוסיה בצורת דבש, ועל כן אין להתהלך במאכל באי זהירות ולשימו על הארץ או על איזה חומר מזוהם ובלתי משוכלל אחר. התאים להחזקת הדבש שהדבורים עצמן בונות מדונג, עשויים משושים ודפנותיהם צמודים זה לזה, שלא יחדור חומר זר ויטמא את טוהר צורתן. רק שלוש צורות הנדסיות ישרות קווים תקיימנה את התנאי הזה, אני מתכוון לצורות משוכללות בעלות צורות וזוויות שוות, ואלו הן: הריבוע, המשולש והמשושה. מתוך שלוש אלו בוחרות הדבורים, בכוח האינסטינקט הטבעי שלהן, בצורה בעלת מספר הזוויות הגדול ביותר, היינו המשושה, הואיל והוא יכיל כמות דבש גדולה יותר מאשר כל אחת משתי הצורות האחרות." (ש, דגון).

נוכל להתייחס לדברים גם באופן הבא:

נפח תא לאכסון הדבש יתקבל ממכפלה של שטח הבסיס בגובה התא,מאחר ואנו רוצים לבחון צורות אפשריות לריצוף חלת הדבש נבחן את היחס שבין שטח התא הנוצר להיקפו בהנחה שגובה התאים זהה בכל הריצופים.לצורך הבדיקה נבחר אורך צלע בכל מצולע כ-1 ס"מ וניצור תאים לדבש ממצולעים שונים:

- בשימוש בריבועים יהיה השטח 1 סמ"ר, והיקף התא 4 ס"מ.
- בשימוש במשולשים שווי-צלעות יהיה השטח $\frac{\sqrt{3}}{4}$ סמ"ר וההיקף 3 ס"מ.
- בשימוש במשושים יהיה השטח $\frac{6\sqrt{3}}{4}$ סמ"ר והיקף הקירות 6 ס"מ.

חשבו כעת את היחס של שטח להיקף.

ריבועים $1 : 4$

משולשים $\sqrt{3} : 12$

משושים $\sqrt{3} : 4$

וחידת המשושה:

מה בתוך המשושה?

3 קוביות? 6 מעוינים? 12 מעויינים?

כפי שראינו קודם, לא ניתן לבנות גוף משוכלל עם **משושים** משוכללים, ואם בכל זאת רוצים לבנות גופים עם **משושים אז אפשר לבנות מנסרה...**

לפנינו תיבת הממתקים שהיא **מנסרה "משושית"** - שני בסיסיה הם **משושים** ופאותיה הצדדיים הם מלבנים.

הייחוד של **השש** הוא בהיותו **מספר מושלם** (או בכינוי האחר **"מספר משוכלל"**). כבר ראינו קודם שהעיסוק במספרים היה חלק מתחביביהם של מתמטיקאים בכל הדורות, ובמיוחד לפני כ-2500 שנים, בעת העתיקה, אז התייחסו אל המספרים באופן מיסטי ולאו דווקא כאובייקטים עם תכונות מתמטיות. נצטט את אוגוסטינו ה"קדוש" (354-430), "**שש** הוא **מספר מושלם** ולא בגלל שאלוהים ברא את העולם בשישה ימים, אלא ההפך הוא הנכון, אלוהים ברא הכל בשישה ימים בגלל מושלמותו של המספר שש".

מהו מספר **מושלם**? מספר נקרא מושלם אם הוא שווה לסכום מחלקיו, לא כולל המספר עצמו:

$$6 = 3+2+1$$
$$28 = 14+7+4+2+1$$
$$496 = 248+124+62+31+16+8+4+2+1$$

אוקלידס ויוונים אחרים שאף הם חיפשו את היופי שבמתמטיקה עסקו רבות במספרים המושלמים. התייחסות למספרים המושלמים מוצאים בספרים שכתב אוקלידס למשל בספרו "היסודות" (Elements): " אם נכתוב סכום של מספרים החל ב-1 ונמשיך בכפליים כל מספר עד שהסכום שנקבל יהיה מספר ראשוני, ואם נכפול את האיבר האחרון בסכום זה נקבל מספר מושלם" נדגים את שיטתו של אוקלידס למציאת מספר מושלם:

$6 = 2 \times 3$	<==	$2+1=3$
$28 = 4 \times 7$	<==	$4+2+1=7$
$496 = 16 \times 31$	<==	$16+8+4+2+1=31$

אם נציג את סכום כסדרה של חזקות 2 הרי שנקבל:

$$1+2+4+8+16+\ldots+2^{k-1}=2^k-1$$

וטענת אוקלידס תיראה באופן הבא: "אם עבור $k>1$ מתקיים ש 2^k-1 ראשוני אזי $(2^k-1)\,2^{k-1}$ הוא מספר מושלם".
הטענה ההפוכה העוסקת בשאלה, אם כל מספר מושלם ניתן לכתיבה כ $(2^k-1)\,2^{k-1}$

הוכחה בידי אוילר (1707 – 1783) רק עבור מספרים מושלמים זוגיים.
עד היום ידועים רק 38 מספרים מושלמים והמספר המושלם האחרון נתגלה רק השנה-מספר ספרותיו הוא 4197919 והוא $(2^{6972593}-1)\ 2^{6972592}$
כפי שנאמר, המספרים המושלמים העסיקו מתמטיקאים רבים, דבר שהוליד השערות שונות שחלקן נשארו פתוחות, חלקן הופרכו וחלקן הוכחו. לדוגמה, שאלת ספרת האחדות של מספר מושלם: מהתבוננות בשלושת המספרים שהיצגנו למעלה וממספרים נוספים שנמצאו, שיערו היוונים שכל מספר מושלם מסתיים ב-6 או ב-8, ואלו מופיעים לסירוגין. השערה זו הופרכה לאחר שנמצאו המספרים המושלמים החמישי והשישי ושניהם מסתיימים ב-6. ההשערה שכל מספר מושלם הוא זוגי היא עדיין בגדר בעיה פתוחה. החיפוש אחר מספרים מושלמים הוביל למציאת זוגות של **"מספרים רעים"**-אלו זוגות מספרים שסכום המחלקים של האחד שווה לשני. לדוגמה המספרים 284 ו 220:

סכום המחלקים של 220:

284=110+55+44+22+20+11+10+5+4+2+1

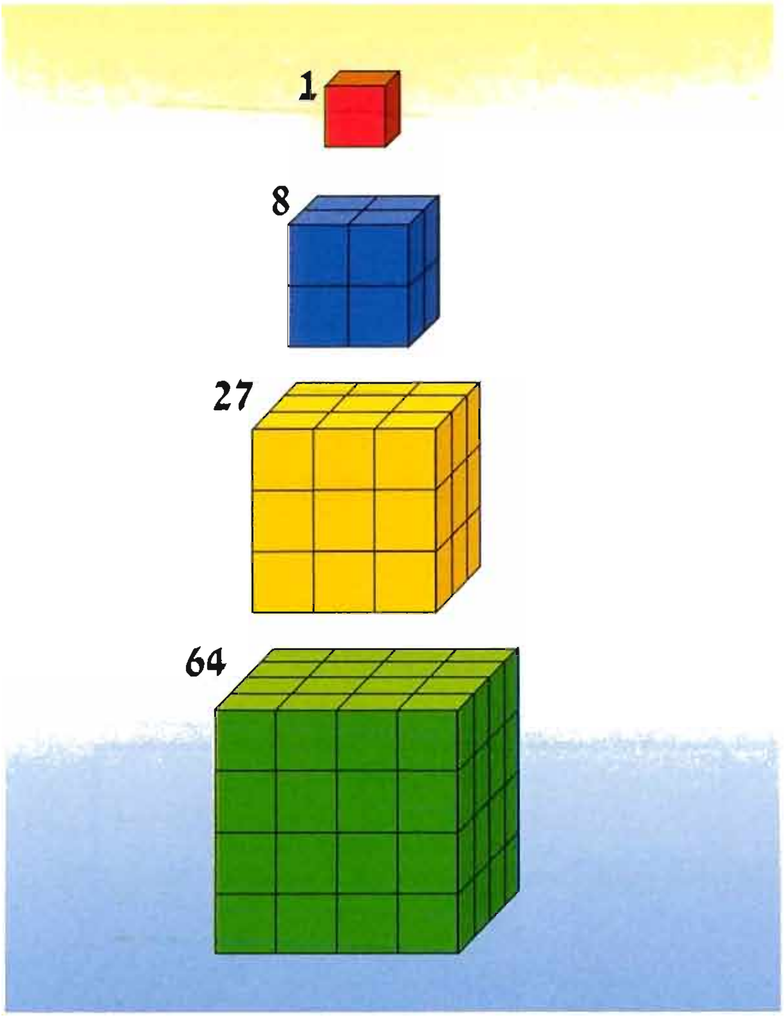
סכום המחלקים של 284:

220=142+71+4+2+1

עד עתה מוכרים 70 זוגות של מספרים רעים, אך טרם הוכרעה השאלה, אם מספרם סופי או אין-סופי.

כעת נעבור ונבדוק מה אפשר לומר על ה-8

8 הוא המספר הטבעי הקטן ביותר שהוא חזקה שלישית של מספר טבעי השונה ממנו $8=2^3$.

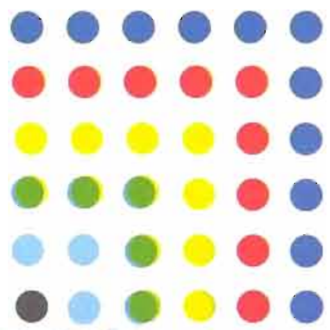


אם נתבונן בקשר שבין הקוביה הראשונה בסדרה (1^3) והקוביה השנייה (2^3) נוכל לשים לב שצלעה של הקוביה גדלה פי 2, ואילו נפחה גדל פי **8**. וכך גם לגבי הקשר שבין שאר הקוביות לקוביה הראשונה: באופן כללי, אם צלע הקוביה גדלה פי n – נפחה גדל פי n^3.

בעיה זו מתקשרת לאחת הבעיות הקלסיות שהעסיקו את היוונים ונקראת בשם "הכפלת הקוביה": האם ניתן באמצעות סרגל ומחוגה למצוא קוביה שנפחה כפול מנפח קוביה נתונה? לבעיה זו מקורות מיתולוגיים: במאה החמישית לפנה"ס השתוללה באתונה מגפת דבר, כדי לנסות להפסיק את המגפה נתבקשו היוונים לבנות מזבח חדש כפול בגודלו מהקיים. הם בנו מזבח שצלעו כפולה מצלע המזבח הקיים, דבר שלא הביא להפסקת המגפה....

ואם בחזקה שלישית עניננו נוכל להציג בעוד קשר מעניין שבין n^3 למספרים אי-זוגיים. תחילה נזכיר את הקשר שבין ריבועי מספרים למספרים אי זוגיים.

אחד מתרגילי ההכללה הידועים הוא לבקש מילדים למצוא את סכום האי–זוגיים החל מ–1 ועד–19. בתהליך הפתרון של בעיה זו אפשר לבחון את מודל הנקודות הבא:



$$1+3+5+7+\ldots+2n-1=n^2$$

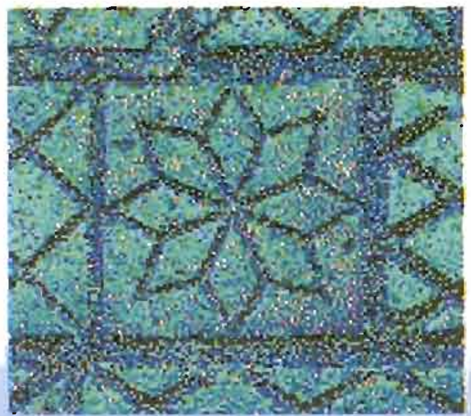
כעת נציג את המספרים האי–זוגיים בצורה שונה במקצת ונקבל את הקוביות כפי שמוצג בטבלה.

							הסכום
1							1^3
3	5						2^3
7	9	11					3^3
13	15	17	19				4^3
$n(n-1)+1$	$n(n-1)+3$					$n(n-1)+2n-1$	n^3

הערה קטנה לחישוב הסכום בשורה האחרונה: נשים לב שאנו משתמשים במסקנה לגבי הקשר שבין סכום אי–זוגיים לריבועים, שכן הגודל $n(n-1)$ חוזר על עצמו n פעמים, ואליו יש להוסיף את סכום האי–זוגיים.

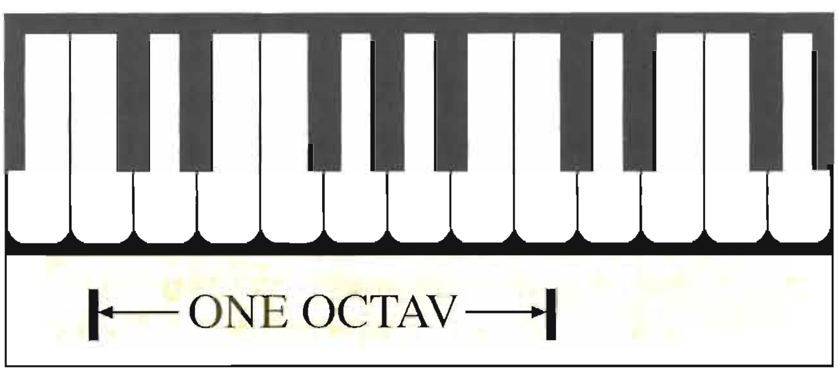
$$n(n-1)+1+n(n-1)+3+\ n(n-1)+5+\ \ldots\ n(n-1)+2n-1=$$

$$n(n-1)n+(1+3+5\ldots+\ 2n-1)=n(n-1)n\ +\ n^2=n^3$$



בגיאומטריה מצולע בעל שמונה צלעות נקרא מתומן, וגוף בעל שמונה פאות שהן משולשים שווי צלעות הוא האוקטאהדרון.

שמונה רגליים לעכביש ולעקרב, וכמובן שמונה זרועות לתמנון.



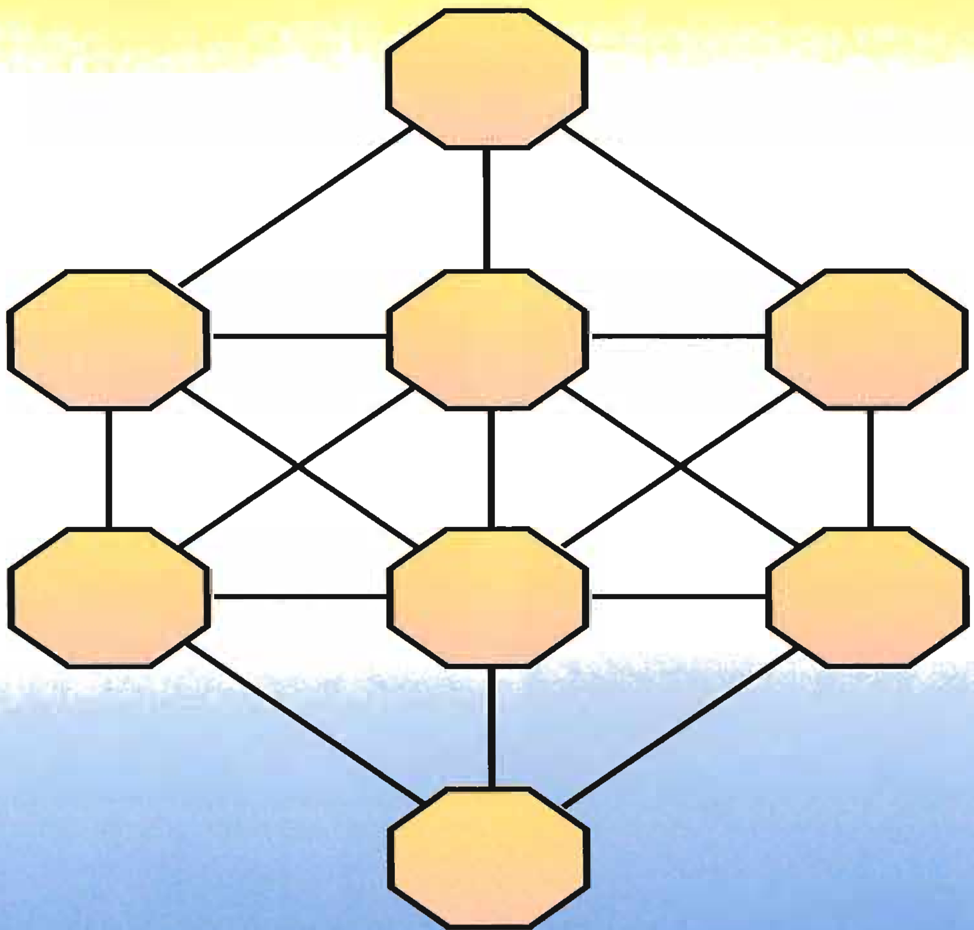
את השמונה אפשר למצוא גם במוסיקה בדמות האוקטבה, שהיא אינטרוול שבו 13 תווים. אם נתבונן בתמונה נראה שהם מחולקים באופן הבא: שתי קבוצות של שחורים, הראשונה בת שני תווים והשנייה בת שלושה תווים, בין השחורים קבוצה אחת של לבנים המונה שמונה תווים. ואם רוצים להשתעשע עם המספרים, אז מה מזכירה הסדרה:

. . . 13, 8, 5, 3, 2?

ועוד תעלול של השמונה:

1 x 8 + 1 = 9
12 x 8 + 2 = 98
123 x 8 + 3 = 987
1 234 x 8 + 4 = 9 876
12 345 x 8 + 5 = 98 765
123 456 x 8 + 6 = 987 654
1 234 567 x 8 + 7 = 9 876 543
12 345 678 x 8 + 8 = 98 765 432
123 456 789 x 8 + 9 = 987 654 321

לסיום חידה בשמונה:
שבצו את המספרים 1 - 8 בשרטוט הבא כך ששני מספרים עוקבים לא יהיו מחוברים בקו.



תודה לד"ר בנו ארבל ממכללת בית ברל על העזרה והרעיונות.

ביבליוגרפיה

אונגרו שבתאי, "מבוא לתולדות המתמטיקה", אוניברסיטה משודרת, הוצאת משרד הבטחון
ברגמיני דוד והעורכים של לייף, "מתמטיקה – הספריה המדעית של לייף", הוצאת ספריית מעריב
דגון ש, תולדות המתמטיקה הקדומה, הוצאת דביר
הלוי אברהם פרנקל, "מבוא למתמטיקה", הוצאת מסדה
שישא אלעזר, "מתמטיקה ומתמטיקאים",הוצאת מסדה

www.nottingham.ac.uk/education/number/
www.group.dcs.st-and.ac.uk/~history