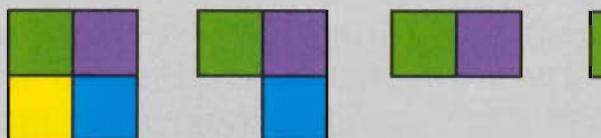


תמי גירון

פסיפס עץ מנטומיניו

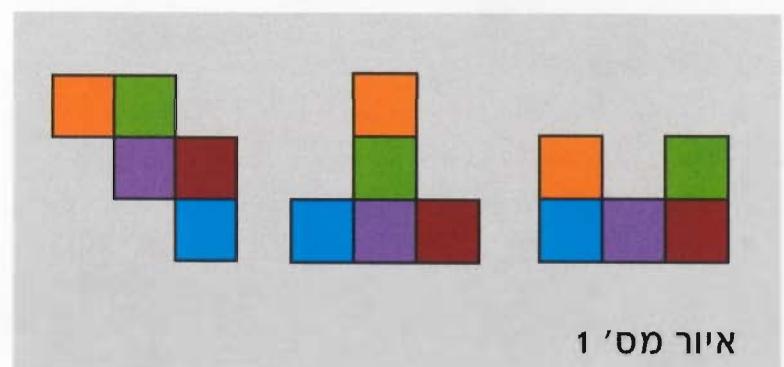
אלן. בשנת 1954 פרסם סטודנט למתמטיקה בן 22, סולומון גולומב (S.W. Golomb) מאוניברסיטת הרווארד שבארה"ב, מאמר על פאזהים אלו. גולומב ניסה להגעה לחוקיות שתבטא את מספר הצורות שאינן חופפות שאפשר ליצור ממספר כלשהו של ריבועים, אך לא הצליח. גולומב טבע לראשונה את המושג "פנטומינו" כחלק משפחת ה"פולימינו", שהן הצורות הבניות ממספר כלשהו של ריבועים ("מונומינו" – מריבוע אחד, "דומינו" – משני ריבועים, "טריאומינו" – שלושה ריבועים, "טטרומינו" – ארבעה ריבועים, "פנטומינו" – חמישה ריבועים וכך הלאה).



איור מס' 2

חוקיות אמנים לא נמצאה עד היום! וייתכן שאין היא קיימת כלל. אולם, עובדה זו לא מנעה את העיסוק באבני הפנטומינו. מציאת פתרונות שונים וחדים לריצוף מבנים בגודלים שונים, בעזרתו כל אבני הפנטומינו, הפכה לאתגר נפוץ שהופיע בעיתונים שונים העוסקים בשעשועי מתמטיקה.

הpentomino הן צורות הבניות חמישה ריבועים חופפים, הצמודים זה לזה בצלעותיהם. אפשר ליצור 12 צורות שונות של פנטומינו, שאין חופפות זו לזו. לפניכם כמה דוגמאות:



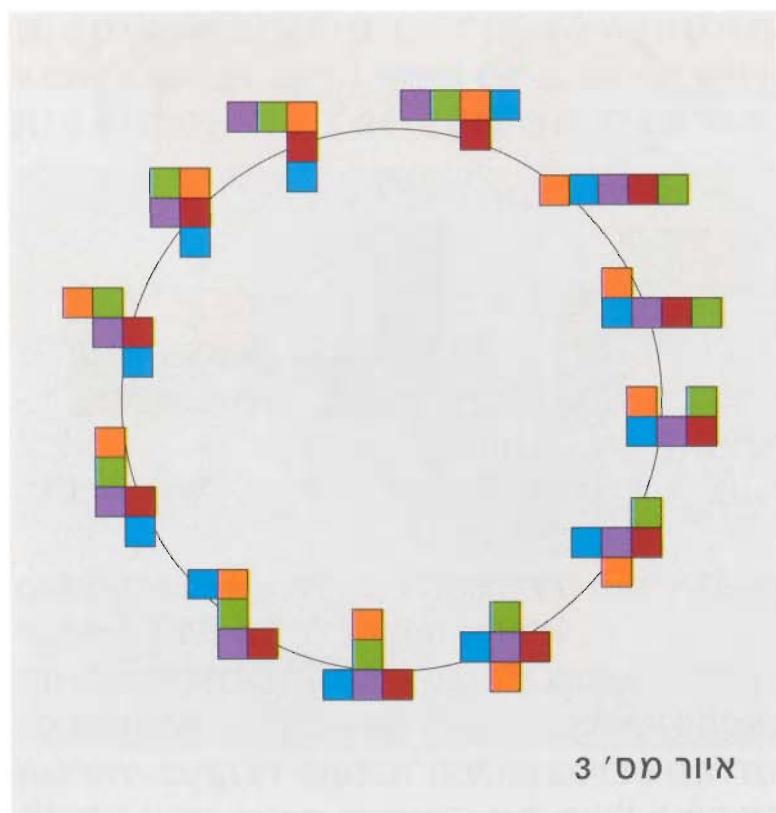
איור מס' 1

הפרסום הראשון של אבני הפנטומינו הופיע בשנת 1907 כחידת פאזל המלווה בסיפור. הסיפור מספר על משחק שחמט שמלך האנגלי וויליאם, שכבש את צרפת, נגגד יורש העצר הצרפתי. בעקבות התסקול המלווה בכיבוש מולדתו, משליך יורש העצר הצרפתי את חילו השחמט על וויליאם הקובל. בתגובה, מנפץ בנו של וויליאם את לוח השחמט על ראשו של יורש העצר הצרפתי. הלוח מתנפץ ל-13 חלקים שונים: 12 חלקים בניים חמישה ריבועים ואחד-בנוי מארבעה ריבועים. ובמובן, כמו בכל סיפור, אי אפשר להרכיב מהশברים את לוח השחמט והאתגר מפנה אל חובבי הפאנלים ועל בעלי חשיבה המקורית.

בשנים 1920 עד 1950 מופיעים פתרונות שונים לחידה זו, ומופיעים עוד פאזהים הבנויים מלבנים

(Fine Arts), בתערוכה שנקרה "הלוגיקה של האמנויות והאמנות של הלוגיקה" במאי 1997.

בעבודותיו, מञצל בילר תוכנות מתמטיות של אבני הפנטומינו, המאפשרות מחזריות ותרנספורמציות שונות ובונה יצירות פסיפס, שעוצמתן הוויזואלית נשענת על התכונות המתמטיות שלהן. בילר רואה ביצירות הפנטומינו מרכיבי שפה מושלמת שיש בה לוגיקה פנימית משלها: כל אחת מ-12 אבני הפנטומינו היא איבר אחד בקבוצת הסימנים בשפה שלו; כאשר הוא בוחר באופן אקראי איבר אחד ומבצע עליו פעולה של שינוי מקומו של אחד הריבועים המרכיבים את האיבר, הוא מקבל איבר אחר מtower הקבוצה. כאשר הוא חוזר ומבצע את אותה פעולה על האיבר החדש שקיבל, הוא מקבל איבר נוסף מtower הקבוצה. בדרך זו אפשר ליצור את כל אבני הפנטומינו בצורה מעגל אין סוף



איור מס' 3

מושיב המعالיות המבטה מצד אחד שלמות, מצד אחר אין-סופיות – מופיע ביצירות רבות של בילר.

ביטוי האין-סופיות מופיע גם בשימוש באבני פנטומינו בגדים שונים בתמונה; כאשר מופיעות אבני הפנטומינו בתמונה באותו הגודל, הן משמשות אלמנט סטטי. לעומת זאת, כאשר האבני הולכות וקטנות, נוצרת תחושת אין-סופיות ויציאה למשורים שמחוץ לתמונה.

בשנת 1958 הופיעה תוכנת המחשב הראשונה היוצרת פתרונות שונים לבניית מלbenים שונים מאבני הפנטומינו. העיסוק באבני הפנטומינו חדר גם לספרות העוסקת במידע הבדיוני. הספר קלארק (A.C.Clarke) מתייחס לאבני הפנטומינו בספריו: "2001: אודיסאה בחלל" שהתפרסם בשנת 1968 ("אף הוסרט לסרט"), וב- "אימפריה האדמה" שהתפרסם בשנת 1975.

גיבור אחד מסיפוריו הוא דונקן המתגורר בכוכב טיטיאן. טיטיאן הוא אחד מירחיו של כוכב הלכת שבתאי. בשל הרכבו שונה של האטמוספירה בכוכב, כוח המשיכה בטיטיאן קטן פי חמיש מכך המשיכה של כדור הארץ (שימו לב למוטיב ה- 5!) תושבי טיטיאן מתגוררים במנזרים ובמבנים אטומיים, ואת החמצן הדרוש להם הם כורים ממعبה האדמה. סבתו של דונקן שהיתה בין המתחלים הראשונים בטיטיאן והידועה בחכמתה, מציגה לפניה נכדה הקטן – דונקן, משימה: ליצור מהミשה ריבועים זחים צורות שונות. דונקן מצליח ליצור עשר מבין 12 צורות הפנטומינו. סבתו מראה לו את שתי הצורות החסרות וצובעת עבורה כל אחת מהצורות בצבע אחר. לאחר מכן מציבה לפניו סבתו משימה חדשה: להרכיב את המלבן 6×10 מ- 12 הצורות האפשריות. דונקן מנסה ומנסה ולא מצליח. כשהוא מתיאש חושפת סבתא את הפתרונות כשהיא מרים תוכנה במחשב. (שימו לב – מודיע שביבו שנכתב לפני שלושים שנה וצופה את ימינו (שנת 2001!) דונקן מופתע מהחכמה של סבתו ומופתע עוד יותר כשהוא שומע שיש 2,339 פתרונות שונים).

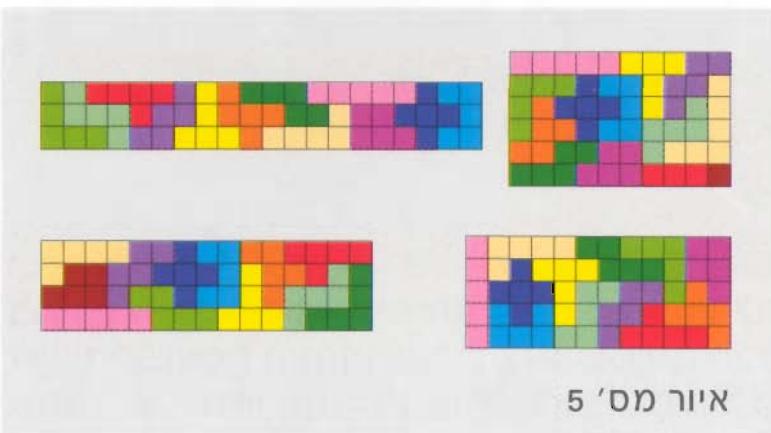
כשמתברג דונקן הוא נשלח אל כדור הארץ. לפני זאתו הוא נפרד מסבתו, אשר בשל גילה המופלג איינו בטוח שיזכה עוד לראותה. כמתנת פרידה מוסרת סבתא לדונקן קופסה מלבנית המשובצת באבני פנטומינו. כל אבן עשויה מחומר אחר ממחייב טיטיאן. כל שצורתה של האבן סימטרית יותר היא עשויה חומר יקר יותר. על כן, במרקזה של הקופסה ניצבת האבן שצורתה צלב, עשויה זהב.

פרופ' גינטר אלברכט בילר (Albrecht Buehler) הוא פיזיקאי, יליד גרמניה, העוסק בחקר הבiology של התא בבית-הספר לרפואה בשיקAGO שבארה"ב. בזמן החופשי יוצר בילר תמונות מפורניר (ЛОחות עץ בצבעים שונים) הבנוויות מאבני הפנטומינו. עבודותיו הוצגו בשיקAGO, בגלריה לאמנות

מצטמצמות לארבעה מלבנים בלבד. לאחר שיש לנו רק אבן אחת שמאפשרת ליצור מלבן שרוחבו רק יחידת שטח אחת, הרי שלא יוכל ליצור את המלבן 1×60 . מאותה סיבה נבחין, שאין בידינו מספיק אבניים המאפשרות ליצור מלבן שרוחבו רק שתי יחידות שטח, ומכאן שמספר האפשרויות מצטמצמו לארבעה מלבנים.

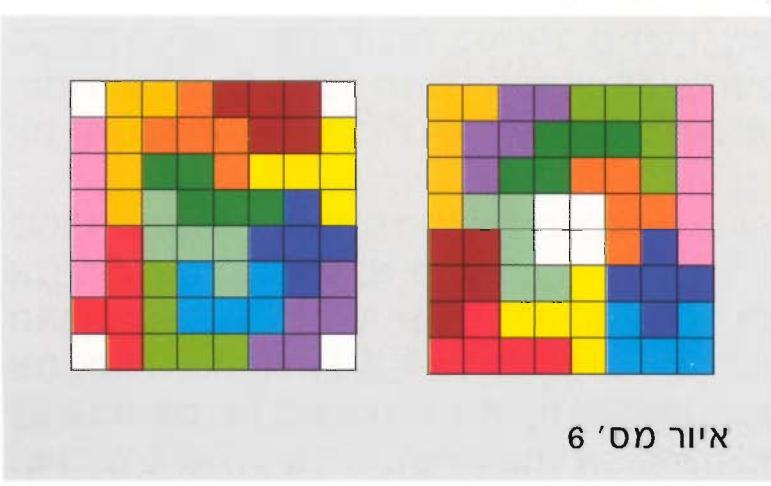
את ארבעת המלבנים האלו אפשר להרכיב במגוון אופנים: 2339 אפשרויות להרכבת המלבן 6×10 , 1010 אפשרויות להרכבת מלבן של 12×5 , 368 אפשרויות למלבן של 15×4 ושתי אפשרויות בלבד למלבן של 20×3 .

אפשרות אחת לכל מלבן מוצגת באירור מס' 5.



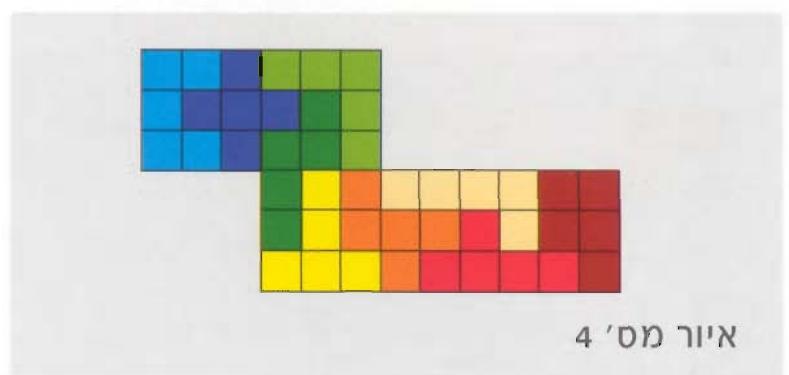
איור מס' 5

ומכאן נחזור ללוח השחמט שנופיע על ראשו של יורש העצר הצרפתי מאחר ושמדבר ב – 60 יחידות שטח, מספר שאינו ריבוע או ריבועים. ואולם, אם נצוף את מכל אבני הפנטומינו ריבוע. וכך נצוף את החלק ה – 13 הבניי מארבעה ריבועים, יהיו בידינו 64 יחידות שטח המאפשרות ליצור ריבוע. נגלה שגם כאן אפשר לחבר את אבני הפנטומינו בשלמות מפתיעה כשהן מותירות ריבוע חסוף של 2×2 בדיק במרכז, או לחילופין – ארבעת הריבועים שבקובוקודים נשאים חסופים.



איור מס' 6

אחד הרווחות המעניינים הבאים לידי ביטוי בשימוש באבני הפנטומינו הוא אפשרות הריצוף של האבניים. מתרברר שאט אבני הפנטומינו אפשר לרצף באמצעות אבניים אחרות קטנות יותר. את כל אבני הפנטומינו אפשר לרצף בעזרת תשע אבניים אחרות, השונות מהאבן המרצפת. מובן שגם את כל אחת מהאבניים המרצפות אפשר לרצף שוב בתשע אחרות, קטנות עוד יותר. גם כאן מופיע מוטיב האין – סופיות על – ידי יצירת נסיגת חוזרת בפעולות ריצוף האבניים המרצפות. דוגמה לאבן פנטומינו המרצפת מתשע אבניים אחרות מוצגת באירור מס' 4.

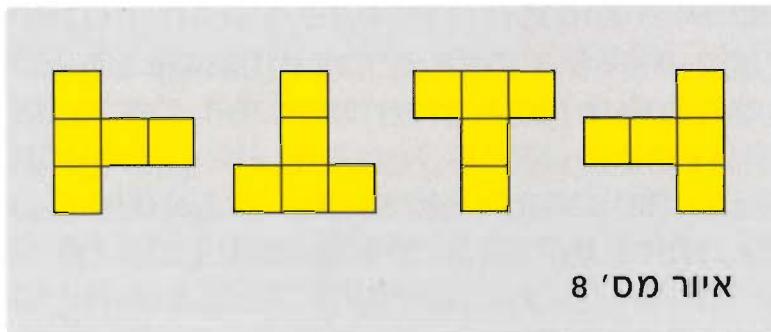


איור מס' 4

המלבנים המרצפים באבני הפנטומינו מהווים גם הם מוטיב מרכזי ביצירותיו של בילר. העובדה שאפשר להרכיב מכל אבני הפנטומינו צורות גיאומטריות פשוטות כמו מלבנים מתפרשת אצל בילר במיוחד לפשטות ולשלמות. פשוטות זו מלאה בדי – שימוש, לנוכח העובדה שאפשר ליצור מאותן האבניים מלבנים שונים ובה בעת לרצף את אותם המלבנים מהרכבים שונים של אבני הפנטומינו. בתמונה "התירה הקסומה" רואים שכארן מרצף בילר את המלבן באבני פנטומינו שונות, נוצרת תחשוה סטאטית, וכל מלבן נראה כמו מישור עצמאי מושלם. מהמלבנים הנמצאים במשורים שונים כביכול, בונה בילר אלמנטים תלת – ממדיים (תיבות), המזכירים את עבודותיו של הצייר וסארלי. לעומת זאת, כאשר ריצוף המלבנים חוזר על עצמו באמצעות אותן אבני פנטומינו, קיימת תחשוה דינמית של מישור אין – סופי.

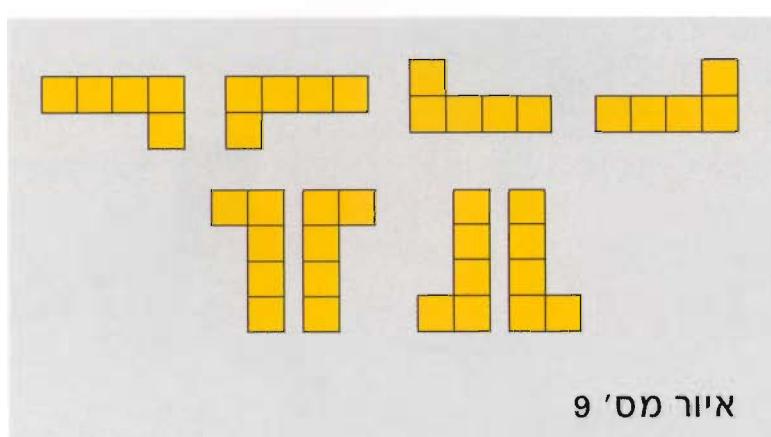
כאשר אנו בוחנים את האפשרויות להרכבת מלבנים מכל אבני הפנטומינו אנו שמים לב, שאף על פי שיש לנו 60 יחידות שטח ריבועים, שלכאהורה אפשר לבנות מהן את המלבנים הבאים: 1×60

במישור ארבע דרכים שונות. לדוגמה: האבן שצורתה T (איור מס' 8).



איור מס' 8

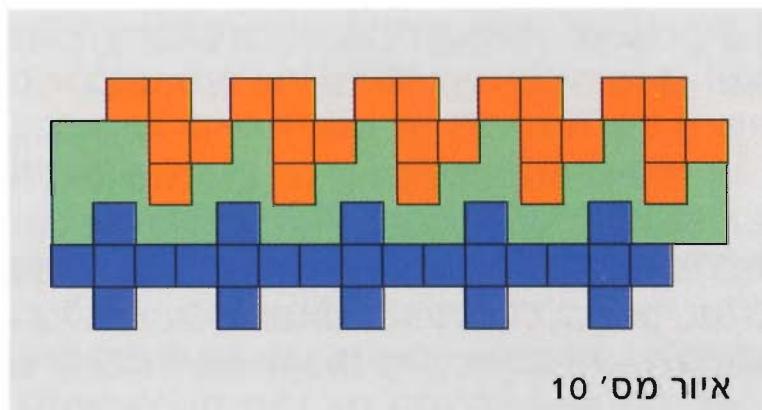
האבנים שאינן סימטריות לחלווטין, כמו האבן שצורתה T, ניתנות להציג בשמונה דרכים שונים במישור (איור מס' 9).



איור מס' 9

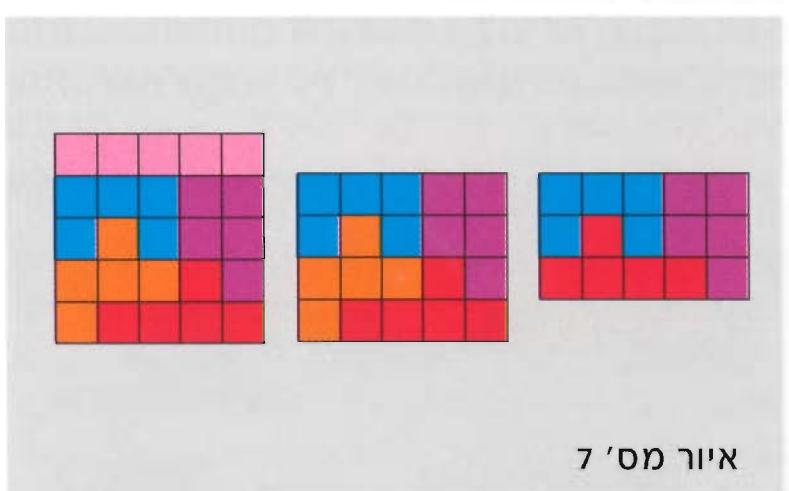
בסך הכל אפשר להציג את אבני הpentומינו ב- 63 צורות שונות במישור.

acht הדריכים להדגשת המשחקים התלת ממדים בתמונה היא להשתמש בחחלים הנוצרים בין אבני pentomino. מובן שהיחידות המרכיבות את החלים שצורתם כצורה כל אחת מאבני pentomino, אפשרות זו נוצרת כתוצאה של פועלות הזהה באותו טכניקה שימושתה בה הציר אשר כדי ליצור את המוטיבים החזוריים על עצם בציורי. נדגים כיצד פועלת טכניקה זו באבני pentomino (איור מס' 10).



איור מס' 10

אם לא די בשלמות נבחין שאפשר לרצף ריבוע של 9x9, כשהאנו מותירים חלל בצורה צלב במרכזו, ובארבע הפינות נשארים ריבועים של 2×2 שאינם מושלמים (כדי לנסות!) מלבדים אחרים שאפשר להרכיב מאבני pentomino הם מלבדים הבנויים מחולק מאבני pentomino. המספר הקטן ביותר של אבני השונות זו מזו שאפשר להרכיב מהן מלבן הוא שלוש אבני. כפי שמצופה מ"שפה מושלמת", אפשר להרכיב מלבדים מארבע אבני pentomino, חמישה אבני וכן הלאה.



איור מס' 7

אם נתבונן על המלבנים המתקיים,שים לב לעובדה, שאחת האפשרויות להציג מלבדים מכל מספר של אבני pentomino היא הרכבת מלבדים לצלע אחת שלהם בנוייה מחמש ריבועים. בסדרת מלבדים זו נשים לב, שמספר אבני pentomino המרכיבות את המלבן שווה לאורך הצלע השנייה של המלבן (איור מס' 7).

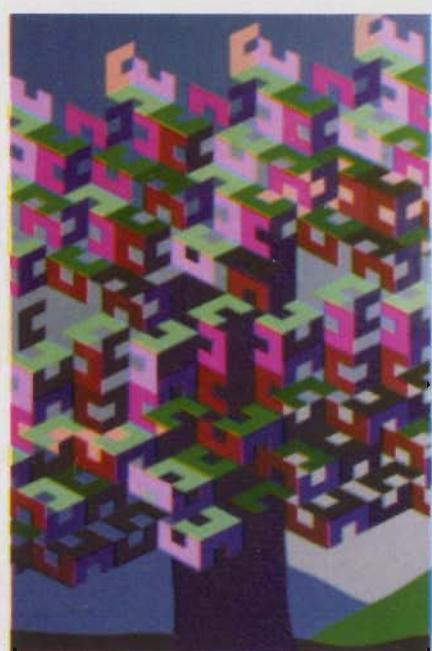
האפשרויות הרבות והמגוונות לייצור מלבדים שונים מתאפשרות לא רק מצירופים שונים של אבני pentomino. אלא גם כתוצאה של שיקוף או סיבוב של כל אחת מאבני pentomino. ביליר משתמש בשיקופים בצירום אופקיים ואנכיים בלבד ובסיבובים בזווית שען כפולות של 90° . השימוש בטרנספורמציות השונות למרחב מעשיר את העולם הוויזואלי הנוצר מאבני pentomino ומרחיב את האפשרויות אל מעבר ל- 12 הוצאות הבסיסיות.

מספר האפשרויות המתאפשרות מטרנספורמציות אלו תלוי בסימטריה של כל צורה; האבן שצורתה צלב סימטרית לחלווטין ולכן גם אם נסובב אותה לא נקבל צורות שונות (לכן היא נחשבת למושלמת ביותר), לעומת זאת, את האבני שיש להן ציר סימטריה אחד אפשר להציג

אבני הפנטומינו מאפשרות פעילות רבות עם תלמידים:

1. מציאת 12 אבני הפנטומינו.
2. בניית כל אבני הפנטומינו כתוצאה של שניי מיקום ריבוע אחד. אפשר לצאת מאבניים שונים, ובכל מקרה ליצור את כל האבניים וכל אחת פעם אחת בלבד.
3. ריצופים שונים של מלבנים בגודלים שונים, מרובעים אחרים, מצולעים אחרים, צורות סימטריות שונות ועוד כיד הדמיון הטובה. אפשר להשתמש בכל אבני הפנטומינו, באבן אחת החזרת על עצמה או בחלק מהאבניים.
4. משחק הפנטומינו על לוח שחמט: משחק לשני משתתפים כשל אחד מצד בכל 12 אבני הפנטומינו. כל אחד בתורו מניח אבן אחת. הראשון שאינו מצליח להניח אבן מסיים המשחק. אפשר לחזור את האסטרטגיות שצדאי לנוקוט כדי לזכות במשחק.
5. חקירת החוקיות של המלבנים AX5.
6. ריצופים של כל אבן באמצעות תשע אבני קטנות יותר – ומה יהיה היחס בין הריבוע הבסיסי הבונה את האבן הגדולה לבין הריבוע שיבנה את תשע אבני הפנטומינו המרכפות? ואם נמשיך ונרצף כל אחת מהאבניים באבני קטנות יותר – מה יהיה היחס?
7. לחזור אם כל אבני הפנטומינו הן שוות היקף כפי שהן שוות שטח.
8. איך מגאים ל – 36 אפשרויות להציג אבני הפנטומינו במישור כדי ליצור ריצופים שונים? באמצעות חקירה זו אפשר הגיע לדרגות הסימטריה השונות של אבני הפנטומינו השונות.
9. עבודה יצירתיות בדומה לעבודותיו של בילר: ייצור תיבות, תמונות הנוצרות על-ידי נסיגה, על-ידי חזזה, סיבוב, תמונות היוצרות מעגל אין-סופי, תמונות עם אלמנטים בלתי-אפשריים (אשר), תמונות עם הדמיה מרחבית (וסארלי), ועוד כיד הדמיון הרחב שלכם ושל התלמידים.
10. פאלרים וריצופים נוספים בעזרת אבני הפנטומינו אפשר למצוא בבליגרפיה.

מיצירותיו של בילר:



בבליאוגרפיה

אתרי האינטרנט:

<http://pubweb.acns.nwu.edu/~gbuehler>
<http://www.pentomino.tvnet.hu/>

http://sue.csc.uvic.ca/~cos/ecos/e_pentI.htm
<http://www.xs4all.nl/~gp/pentomino.html>

<http://teams.lacoe.edu/documentation/classrooms/jeannie/geometry/6-8/activities/pentominos/pentominos.html>

גבעול, נ. מדע בדיוני ובעיות פנטומיננו, מדע כג 9, (1979)