

ואף על פי כן - בדידים

תגובה למאמר של תלמה גביש

צריכה לצאת תמיד אותה המסקנה. במקרה שלנו: אם מההקדמה "כמות וצבע אינם אותו הדבר" היא מסיקה שאסור ללמד באמצעות **צבעים**, הרי שמההקדמה "כמות וסמל אינם אותו הדבר" היא צריכה להסיק שאסור ללמד באמצעות **סמלים**. כדי לחוש את הדברים בחריפות נוכל לעשות תרגיל מעניין: מההקדמה "a ו-b אינם אותו הדבר", כל מסקנה שתוסק על a ו-b מסוימים (כאן "כמות" ו"צבע") צריכה להיות תקפה גם ל-a ו-b אחרים (כאן "כמות" ו"סמל"). נביא אם כן כמה ציטטות מדבריה של הכותבת ונחליף את המילה "צבע" במילה "סמל":

"אם נלמד מספרים בעזרת **סמלים** נסתכן בהפיכת האדם ל"עיוור מספרים".

ועוד: "מיותר לציין שהקשר בין **כמות לסמל** מופרך מיסודו. הצמדת **סמל** לכמות באמצעות ציור המייחד אותו אין לה הצדקה לא מצד ההיגיון ולא מצד הדידקטיקה, שכן להקניית טעות לוגית אין צידוק מכל צד שהוא. כך יוצרים פגיעה בייצוג הפנימי של המספר", וכן הלאה...

האם הכותבת מסכימה כעת, לאחר החלפת המילה "צבע" במילה "סמל", למסקנות שהיא עצמה הגיעה אליהן?

נראה לי שברור לכולנו שסמל הוא אמצעי לייצג את המספר, ואין הוא המספר עצמו. כך בדיוק גם הבדיד. הוא משמש ייצוג של המספר, ואין הוא המספר עצמו. הרי בהקדמות טענה הכותבת עצמה, שהמציאות מיוצגת באמצעות סמלים, מילים ותמונות. הצבע, הציור הגרפי והשם המילולי המתאים למספר הנם סמלים המאפשרים לנו להתייחס למספרים שהם עצמם מופשטים. הבדיד, כמו הסמל וכמו הכמות, הוא אחד מהייצוגים האפשריים (שבהמשך אסביר מעט את יתרונותיו).

אז אולי המסקנה היא שהשיקול הלוגי **לא תקף?** כלומר: אולי מההקדמות (שהן נכונות) ומהדברים

כאשר מנסים לבסס מסקנה על טענות מסוימות לא די בכך שהטענות יהיו נכונות, אלא צריך שהמסקנה אכן תצא מהן. למה הדבר דומה? נתבונן, למשל, בטיעון הבא:

"אוכיח לכם ש-10 מתחלק ב-7:

10 מתחלק ב-2 ? אכן כן.

10 מתחלק ב-5 ? בהחלט!

$7 = 2 + 5$? בוודאי.

אם כך: 10 מתחלק ב-7 "

דוגמה זו ממחישה את אשר הרגשתי בזמן שקראתי את המאמר של תלמה גביש: "אל תתנו להם בדידים". אין לי, ולא לרבים אחרים, מחלוקת בנוגע לרוב ההקדמות שנזכרו במאמר, ובוודאי שלא עם חוקרים כגון פיאזה, ויגוצקי, הוגו ברגמן ואחרים שבביבליוגרפיה המרשימה שבסוף המאמר. מה שאינני מצליחה להבין, מהו הקשר בין הקדמות אלה לבין המסקנה שהכותבת מגיעה אליה. משום כך אני מרגישה צורך לענות באופן ישיר לפחות על חלק מן הטענות שבמאמר.

הכותבת טוענת: "כאשר מלמדים את המספרים הטבעיים יש לזכור ש:

1. כמות וצבע אינם אותו הדבר

2. כמות וגודל אינם אותו הדבר."

אינני מכירה אדם שטען אי פעם ההפך! חבל רק שהכותבת לא הוסיפה:

3. כמות וסמל אינם אותו הדבר.

גם על כך, נדמה לי, אין מחלוקת. הסמלים שנבחרו לייצג את המספרים הרי הם שרירותיים לחלוטין, בדיוק כמו צבעי הבדידים. למשל: מדוע נבחר הציור 2 לייצג את המספר המציין כמות של שני עצמים? למה לא: @ או &?

מדוע כולנו מלמדים (אני משערת שגם הכותבת עצמה) את המספר הטבעי באמצעות סמל? הרי אם הכותבת תשתמש באופן עקיב בטיעונים שלה היא תיאלץ להגיע למסקנה, שאסור ללמד באמצעות סמלים! אסביר זאת: הכותבת מסתמכת ברבים מטיעוניה על שיקולים לוגיים. היא צריכה אפוא לקבל, שבטיעון לוגי תקף, מאותו סוג של הקדמות

המלומדים שהכותבת מצטטת מפי הוגו ברגמן (שלא עולה על דעתי לחלוק עליו) **לא נובעת** המסקנה שהוסקה? ועוד חבל שהכותבת לא הוסיפה:

4. כמות ומספר אינם אותו הדבר!

הכמות היא היבט חשוב של המספר, אבל בשום אופן אינה הדבר עצמו. אילו מספר היה רק "כמות", לא היה, למשל, מקום למספרים השליליים, שכן אין הם מייצגים כמויות.

אפילו במסגרת המספרים הטבעיים מספר אינו רק כמות. אקסיומות פיאנו, שמגדירות את המספרים הטבעיים, אינן בונות כל מספר מיחידות, אלא כל מספר מקודמו כמו בבדידים!

במילים אחרות, בדיוק באותה מידת החלטיות שבה טוענת הכותבת שבדיד אינו המספר (טענה נכונה לכל הדעות), אפשר לומר גם שכמות אינה המספר.

אפשר אפוא שוב לצטט בשינוי המתבקש: "אם נלמד מספרים בעזרת כמויות נסתכן בהפיכת האדם ל"עיוור מספרים" וכו'. גם כאן, כמו קודם, אחת משתיים: או שנצטרך, על פי אותו שיקול לוגי של הכותבת, להסיק ש"אסור ללמד מספרים בעזרת כמויות", או שנצטרך להודות שהמסקנה של הכותבת איננה מתקבלת מההקדמות – כלומר הטיעון אינו תקף.

ואולי צריך לראות את הדברים קצת אחרת? המספר הוא מושג מופשט, ואנו חייבים ללמד אותו בעזרת כלים מוחשיים. מדוע שלא נבחר בייצוגים שיבליטו היבטים שונים לו? לכל ייצוג כזה יש מקום ויש תפקיד:

הסמל מאפשר, למשל, כתיבה ותקשורת. הכמות – חשובה, למשל, להבנת ההיבט הכמותי של מושג המספר ולפתרון בעיות רבות הלקוחות מן הסביבה.

הבדיד – מאפשר הדגמה טובה של היחסים והפעולות בין המספרים הטבעיים ומבליט את הקשרים המתמטיים ביניהם (ראו פירוט בהמשך).

ולעניין אחר:

הכותבת טוענת, שכאשר יש לי בדיד, "זהו בדיד אחד בין שהוא גדול ובין שהוא קטן". כאן, מבלי משים, אולי היא מצביעה על אחד היתרונות הבולטים של הבדידים; המספר, כעצם מתמטי, הוא אכן מהות אחת! אנו אומרים, למשל: "5 הוא מספר

ראשוני" ולא "חמש הם מספר ראשוני". ה"חמש" הוא עצם מתמטי שיש לו זכות קיום בפני עצמו, ולא רק כמייצג כמות. במסגרת המתמטיקה אנחנו מתעניינים ביחסים ובפעולות בין המספרים כשכל אחד מהם הוא מהות מתמטית אחת ויחידה. בפסוק החיבור: $5=2+3$ מעורבים שלושה מרכיבים שני המחברים והסכום, ולא חמישה מרכיבים (או 10 מרכיבים) שהם עצמים המייצגים באופן כמותי כל אחד משלושה המספרים שהוזכרו. חשוב להבין, שרק מתוך ראייה כזו יהיה אפשר מאוחר יותר להרחיב את עולם המספרים הטבעיים לעולמות רחבים יותר, כמו השלמים הכוללים מספרים שליליים, הממשיים (הכוללים מספרים אי-רציונליים), ואפילו המספרים המרוכבים. הקביעה שהכותבת קובעת לקראת סוף המאמר: "ברור שכדי לפתור בעיות במתמטיקה אנו נזקקים לפן הכמותי של המספר" פשוט איננה נכונה! רק אם נראה את המספר כעצם מתמטי עצמאי, ולא רק כמייצג כמות, נוכל להגיע לאותן רמות גבוהות יותר של המתמטיקה שבהן **אין לו משמעות של כמות**. לא נוכל להגיע רחוק אם נחפש פן כמותי בחילוק שברים, או בכפל של מספרים אי-רציונליים, או ביחס שבין צלע של ריבוע לבין אלכסונו. דווקא כאן, יש לבדידים תפקיד חשוב: **בצד הייצוג הכמותי**, שכבודו במקומו מונח, יש למספר גם ייצוג מסוג אחר, שמבליט את היותו עצם מתמטי בפני עצמו, שאפשר לעשות עליו פעולות.

ומכאן לתהליך המנטלי. הדברים המלומדים המצוטטים מקובלים גם עלי, אלא ששוב אינני רואה כל קשר ביניהם לבין המסקנות שהוסקו. כאן חשוב להבין, שאנו מלמדים באמצעות הבדידים לא את מושג המספר, אלא את היחסים והפעולות בין המספרים.

ההיבטים של מושג המספר שהכותבת מזכירה על פי פיאז'ה וויגוצקי הם ההיבטים הבסיסיים הנוגעים לכמות ושימור כמות. היבטים אלה נלמדים כבר בגיל הגן. בכיתה א' רוב רובם של התלמידים כבר מכירים את ההיבט הכמותי של מושג המספר, ורכשו כבר את שימור הכמות שלו. המטרה בכיתה א' היא לבנות מעל לרובד הזה של מושג המספר את הרובד של יחסים ופעולות בין מספרים. אילו תלמידים היו מגיעים לכיתה א' ללא יכולת של שימור כמות, לא הייתה כל אפשרות ללמד באופן

משמעותי את פעולות החשבון. עצם העובדה שתכנית הלימודים מורה ללמד את פעולות החשבון מעידה שיש הנחה מלכתחילה, שהתלמידים באים עם תשתית של מושג המספר כמייצג כמות, והבנה של שימור הכמות.

השימוש בבדידים להוראת הפעולות והיחסים בין המספרים לא רק שאינו נוגד בשום צורה את תורתם של פיאז'ה וויגוצקי, אלא עולה בקנה אחד עם תורה זו. בוודאי ובוודאי שאינו נוגדת את ההיגיון. לא זו בלבד שהבדידים אינם "פוגעים בתהליכי שימור ומקשים על התלמיד להכליל את המושג" אלא ממש להפך: הבדידים מסייעים בראיית ההכללה של פעולות החיבור והחיסור. דווקא בעזרת הבדידים התלמיד יכול לראות את הקביעות שבפעולות אלה, ואת היחסים הקבועים בין שלושת המרכיבים של החיבור: שני המחברים והסכום. כך הוא גם רואה את הכלליות שבקשר בין החיבור לבין החיסור. כאן בדיוק טמון אחד היתרונות הבולטים ביותר של הבדידים.

תיאורי המקרים שמביאה הכותבת לוקים כולם בבעיה משותפת: הכותבת ציפתה מן התלמידים שראינה "לקלוע" בתשובותיהם למה שהיא ציפתה מהם. התלמידים לא התקשו בחשבון, אלא התקשו בהבנת הציפייה של השואלת. למשל: הילדה הראשונה (בסיפור הבלוטים) לא הורגלה למטבע הלשון: "לעשות את התרגיל עם בלוטים". אין ספק, שאילו הייתה נשאלת באופן שיותר ברור לה, למשל: "יש כאן 2 בלוטים וכאן 3. כמה יש ביחד?" – היא הייתה יודעת לענות.

למה הדבר דומה? נניח שאבקש מילדה שלא למדה את החיבור בעזרת בדידים להראות לי את התרגיל $2+3$ בבדידים, אין ספק שהיא לא הייתה מבינה את שאלתי והייתה מנסה אולי לצייר 2 ו-3 בעזרת הבדידים. האם המסקנה הייתה, שהילדה "אינה יודעת חשבון ומחליפה את הסמל במשמעות?" ביטוי כמו "לעשות את התרגיל בבלוטים", בדיוק כמו "לעשות את התרגיל בבדידים", איננו ביטוי מתמטי, אלא הסכם תקשורתי בינינו לבין תלמידינו, ולפיו, כשאני אומר ביטוי זה אני מתכוון שיפעלו כך וכך על פי מה שקבענו. הבעיה נעוצה בכך שהכותבת לא הבהירה לתלמידה את ההסכם התקשורתי שלה!

התלמידה השנייה, שנשאלה: "כמה עפרונות יש כאן", חשבה ככל הנראה שטריוויאלי מדי לענות

"שלושה", ובטח המראיינת לא התכוונה לדבר פשוט כל כך. לכן היא ענתה באופן מפורט: "אחד ארוך, אחד בינוני ואחד קטן". כשהמראיינת עוד הוסיפה: "תחשבי היטב" בוודאי חשבה התלמידה: "היא בטח רוצה איזושהי תשובה עוד יותר מתחכמת", ואז היא הלכה לרמה גבוהה יותר של היחסים ביניהם: "אחד ועוד חצי ועוד רבע". תשובתה, לדעתי, פשוט מקסימה, אלא שלצערה, ועוד יותר לצערי, היא לא קלעה לרצון המראיינת. אינני מקבלת בשום אופן את המסקנה שהיא "לא יכלה לומר פשוט שיש על השולחן שלושה עפרונות"; היא בוודאי הייתה יכולה לומר זאת, אלא שזה באמת נשמע לה פשוט מדי. (אגב, גם אם לא הייתה המראיינת כותבת זאת, אפשר היה להבחין לפי תשובותיה שתלמידה זו מצטיינת!) במקרה ד', שעל פניו נשמע באמת בעייתי, יש משום "הטמנת פח" מצד הכותבת. היא נכנסה לתוך סיטואציה שבה עסקו בבדידים ושרבבה את אבני החצץ. התלמידים חשבו לתומם שאבני החצץ אמורים לייצג את הבדידים הלבנים! שוב יש כאן מצב של ניסיון מצד התלמידים להבין: "למה היא מתכוונת" אני מאמינה, שאם הייתה שואלת את אותה השאלה במנותק מן הסיטואציה המתוארת, היו עונים לשביעות רצונה. למה הדבר דומה? נניח שחבורת ילדים משחקת במשחק "חמש אבנים", ואני מושיטה להם חמש קוביות עץ ושואלת: "האם יש לי כאן חמש אבנים?" סביר שהם יענו: "כן". האם אני צריכה לצעוק: "אוי, הם לא יודעים שזה מעץ, הם חושבים שזה מאבן!"

אגב, בנושא המוזכר, המבנה העשרוני, לא נתקלנו בקושי מיוחד של התלמידים לעבור מן הייצוג בבדידים לייצוג בכמויות (כאשר הם מבינים מה רוצים מהם).

ולבסוף, הטענה שהתלמידים מגיעים לכיתה ח' עם המחשבה שמספר הוא אורך וצבע מופרכת מעיקרה. הוראת החיבור והחיסור בעזרת הבדידים מהווה שלב אחד בהוראת הנושא השלם: השלב שבו רוכש התלמיד את הכלים המתמטיים. לאחר שלב זה מגיע תורו של שלב היישום, שבו משתמש התלמיד בידע המתמטי שרכש לצורך פתרון מצבים שונים מחיי יום-יום (שבהם יש, כמובן, מצבים רבים של חיבור וחיסור כמויות). בשלב זה מוצג המספר לא רק בבדידים, אלא גם בקבוצות המבליטות את ההיבט הכמותי שלו. אין כל שחר

3. הבדידים מאפשרים בדיקה מיידית ונוחה של פעולות החיבור והחיסור. הבדיקה הנשענת על השוואת אורכים נעשית בהרף עין בניגוד לבדיקה שנשענת על מניית כמויות.

4. השימוש בבדידים להוראת החיבור והחיסור מאפשר לעקוף בשלב הראשון של הלמידה את הבעייתיות שבשימוש בשפת יום-יום, שבה מילים יכולות לקבל משמעויות שונות, על פי ההקשר. למשל: המילה "ביחד" מתפרשת בדרך כלל כפעולת חיבור. פרשנות זו עלולה להכשיל במקרים מסוימים. נתבונן בדוגמה שמספרת עליה ד"ר סתוי מניסוייה עם ילדים בנושא הטמפרטורה. כאשר שואלים ילדים מה יהיה חום המים שיתקבל אם ישימו יחד כמות שווה של מים קרים ומים חמים, כולם יודעים לענות שהמים שיתקבלו יהיו מים פושרים. ואולם כאשר שואלים את אותה השאלה עצמה בצירוף מספרים: מה תהיה טמפרטורת המים שתתקבל אם ישימו יחד כמות שווה של מים שהטמפרטורה שלהם היא 20° ומים שהטמפרטורה שלהם 60° , רבים מן התלמידים עונים 80° (כי: $20+60=80$). בבדידים, לעומת שפת יום-יום, לכל פסוק אריתמטי ניתנת משמעות מוחשית, מדויקת ומוגדרת היטב.

5. הוראת החיבור והחיסור נעשית בשני שלבים:

- שלב ראשון – הבנת מהות החיבור והחיסור והשליטה בתרגילים שלב זה נלמד באמצעות הבדידים.
- שלב שני – פתרון מצבים שונים מחיי יום-יום, והתמודדות עם שפת יום-יום. בשלב זה מודגמים המצבים בעזרת קבוצות (מודל כמותי).

שני המודלים – הבדידים והקבוצות – משלימים זה את זה ומבליטים היבטים שונים של החיבור והחיסור.

ביבליוגרפיה

אחת, שתיים ו...שלוש, מתמטיקה לבית-הספר היסודי, מדריך למורה לספר 2, תל/מטח.

נשר פרלה (1981) אפיסטמולוגיה, למידה ובית-הספר.

לטענה, שההוראה בעזרת הבדידים משאירה את התלמידים עם הדימוי שמספר הוא רק בדיד. זאת ועוד: בכל שלב בלימודיו ניתנים לתלמיד מודלים שונים שמתאימים לנושא הנלמד, למשל: כמויות (להבלטת ההיבט הכמותי), בדידים (להבלטת קשרים ופעולות בין מספרים טבעיים), גזרות עיגול וריבועים מחולקים (להכרת היבטים שונים של השברים), משטחים ואחר כך דסקיות וחשבוניות (להבנת המבנה העשרוני) חצים (להכרת המספרים המכוונים), ועוד.

אף אחד מהמודלים האלה איננו "המספר עצמו", אבל כל אחד מהם מדגים ומבליט היבטים חשובים שלו, וקשרים חשובים בתוך עולם המספרים. דווקא משום כך יש סיכוי טוב שהתלמיד יבין באמצעות המודלים השונים את המושג המופשט שנקרא "מספר" וידע להשתמש בו לא רק בהקשר של "כמות", אלא גם בהקשרים אחרים, "תוך – מתמטיים" ו"חוץ – מתמטיים".

אז למה כן בדידים?

1. הבדידים מדגימים את המספר כ"מהות אחת", בנוסף לראייתו כמתאים לקבוצת מספרים (פירטנו לעיל).

2. הבדידים מדגימים היטב את פעולות החיבור והחיסור בין מספרים טבעיים:

- ההצגה בבדידים ממחישה את המבנה של שלושה מספרים – שני המחברים והסכום. כל שלושת המספרים נראים היטב בתבנית השלמה.

- התבנית מציגה בזמן אחד את כל תרגילי החיבור והחיסור ומחזקת את היחסים בין שלושת המרכיבים ואת הקשר בין פעולת החיבור לבין פעולת החיסור.

- ההצגה בבדידים ממחישה את העובדה, שפעולת החיבור ופעולת החיסור הן פעולות בינריות, שכן לכל שני בדידים מתאים בדיד שלישי.

- פעולת חיבור במספרים טבעיים מודגמת בעזרת הבדידים תמיד באותו האופן, וכך מתקבלת התמונה הכוללת של מהות החיבור, במקום אוסף של מקרים פרטיים.

- השימוש בבדידים מבליט, שהפעולה היא חיבור מספרים, ולא מניית יחידות.