המספרים הטבעיים

בת שבע אילני, נאוה אלמוג

עולם המספרים כולל סוגים שונים של מספרים. במאמר זה נתרכז במספרים הטבעיים, שהם המספרים השלמים החיוביים: 1,2,3,4,5,6,......

את החשיבות והמרכזיות שיש למספרים הטבעיים במתמטיקה ניתן למצוא אצל מתמטיקאים רבים. נביא מספר דוגמאות:

- "את המספרים הטבעיים יצר הקדוש ברוך הוא, את שאר המתמטיקה יצרו בני האדם". (Kronecker אצל פרנקל, 1942)
- "המספרים הטבעיים מהווים את חוט השדרה של כל המתמטיקה" (פרנקל, 1942).
- "המתמטיקה תלויה לגמרי במהות המספרים הטבעיים" (וייל, 1945).
- "לאדם המשכיל הממוצע של ימינו, נקודת המוצא של המתמטיקה היא סדרת המספרים הטבעיים" (Russell, 1919).

המספרים הטבעיים היו המספרים הראשונים שהשתמשו בהם בני האדם. היכרות אינטואיטיבית עם המספרים הטבעיים קיימת מאז קיומו של האדם במקומות שונים שלא היה ביניהם קשר. בתקופות קדומות השתמשו במספרים הטבעיים לצורכי מנייה ובשלב מאוחר יותר לצורך חישובים (Siu, 1979). בתחילה נזקקו בני האדם למעט מספרים. אריסטו (332-384 לפנה"ס) טען, כי "התראקים מונים עד ארבע בלבד ו...כי אין להם צורך בכמות גדולה משום דבר" (דגון, 1955). התפיסה המספרית היתה ישות מוחשית שלא ניתנה להפרדה מהעצמים גופם. מחקרים בחברות "פרימיטיביות" הקיימות בימינו ומחקרים הבודקים התנהגות של ילדים, מראים שיכולתם הטבעית של בני חברות קמאיות ושל ילדים קטנים להבחין בין כמויות מוחשיות אינה רבה יותר מיכולתן של חיות מסוימות. הקושי נובע, כנראה, מאי תפיסת המשמעות המופשטת של המספר. היכולת להבחין בין מספרים שונים נובעת משינוי קליטה חזותית בלבד, בשל החוסר במושג המופשט של סינתזה של יחידות בודדות (יפרח, 1990). "תחושה מספרית גסה, שאינה מפותחת משל ציפור, הייתה הגרעין שהצמיח את התפיסה המספרית שלנו (Dantzig, 1931, אצל יפרח, 1990).

עם זאת, כבר בתקופות קדומות היה שימוש מופשט במספרים בתרבויות שונות, אולם רק באמצע המאה ה-19 החלו מתמטיקאים לבסס את הבסיס הלוגי הפילוסופי למערכות השונות של המספרים (כמו הטבעיים, השלמים, הרציונלים, הממשיים, המרוכבים). המתמטיקאים הבינו, כי לעתים ניתן לקשר מספרים לעצמים מוחשיים ועל ידי כך לתת כלים ליישומים שונים, אולם קישור זה יכול לשמש כמוטיבציה בלבד ולא כהגדרה פורמלית. בגישה הפורמליסטית אין הכרח בחיפוש אחר המוחשי (אלמוג, 1988).

אף שהמספרים הטבעיים מוכרים לכל אדם, לאור הצורך שנוצר אצל המתמטיקאים לביסוס מערכות המספרים, זכו המספרים הטבעיים לביסוס פורמלי. ג'וזפה פיאנו, מתמטיקאי איטלקי (1932-1858), נתן ביסוס אקסיומטי למספרים הטבעיים, כמספרים סודרים. במאמר זה ננסח ונדגים את האקסיומות של פיאנו.

הנחת היסוד (אקסיומה) הראשונה:

> בקבוצת המספרים הטבעיים **N** לכל איבר **a** יש עוקב אחד ויחיד. נסמן את העוקב ל-**a** ב-**a'**.

המושג "עוקב" מתפרש אצלנו כאיבר הבא בתור בקבוצה של איברים המסודרים לפי סדר מסוים. לדוגמה: בקבוצת המספרים הטבעיים העוקב של 2 הוא 3 ($2'=3$), בקבוצת המספרים הזוגיים העוקב של 2 הוא 4 ($2'=4$) ובקבוצת המספרים הראשוניים העוקב של 7 הוא 11 ($7'=11$).

ברור כי האקסיומה הראשונה מתאימה לקבוצת המספרים הטבעיים. נשאלת השאלה, אם אקסיומה זו מספיקה כדי לתאר את קבוצת המספרים הטבעיים ורק אותה.

נביא דוגמאות אחדות שיבהירו כי לא ניתן להסתפק בהנחת היסוד הראשונה:

א. נתבונן בקבוצה $\{4, 5, 6, 7\}$

ונגדיר: $4'=5$; $5'=6$; $6'=7$; $7'=7$.

על-פי ההגדרה מתקיימת בדוגמה זו הנחת

היסוד, שלכל איבר יש עוקב אחד ויחיד, אולם ברור כי הקבוצה אינה כוללת את כל המספרים הטבעיים.

ב. נתבונן בקבוצת המספרים השלמים
...., 4, 3, 2, 1, 0, −1, −2, −3...
בקבוצה זו לכל איבר יש עוקב אחד ויחיד (לדוגמא: $-7'=-6$; $0'=1$; $8'=9$) והיא כוללת אמנם את קבוצת הטבעיים, אך לא אותם בלבד.

ג. נתבונן בקבוצה {1,2,3} ונגדיר $1'=2$; $2'=3$; $3'=1$.
על פי ההגדרה מתקיימת הנחת היסוד כי לכל איבר יש עוקב אחד ויחיד אולם ברור שגם קבוצה זו אינה כוללת את כל המספרים הטבעיים.

דוגמאות אלה, שמקיימות את האקסיומה הראשונה, ממחישות את העובדה כי אקסיומה זו אינה מספיקה להגדרת המספרים הטבעיים.

בדוגמה א׳ אנו רואים כי המספר 7 הוא עוקב של 6 וגם עוקב של 7, כלומר לשני איברים שונים יש אותו עוקב. האם מניעת תופעה זו תספיק להגדרת המספרים הטבעיים? האקסיומה השנייה מטפלת בסוגיה זו.

הנחת היסוד (אקסיומה) השנייה:

בקבוצת המספרים הטבעיים N:
לאיברים שונים יש עוקבים שונים
אם $a \neq b$ אז $a' \neq b'$.

ברור כי גם אקסיומה זו מתאימה לקבוצת המספרים הטבעיים ואולם נשאלת השאלה אם שתי האקסיומות מספיקות כדי לתאר את כל המספרים הטבעיים ורק אותם.
מבדיקה של דוגמאות ב ו- ג אפשר לראות, ששתיהן מקיימות גם את האקסיומה השנייה ואף-על-פי-כן אינן מתארות את המספרים הטבעיים, מה שיוצר צורך בהנחת יסוד נוספת.
בדוגמאות אלה, שאחת מתארת קבוצה אין סופית ואחת קבוצה סופית, כל אחד מהאיברים משמש עוקב ולכן אי-אפשר למצוא איבר שמשמש איבר ראשון של הקבוצה. האקסיומה השלישית מטפלת בסוגיה זו.

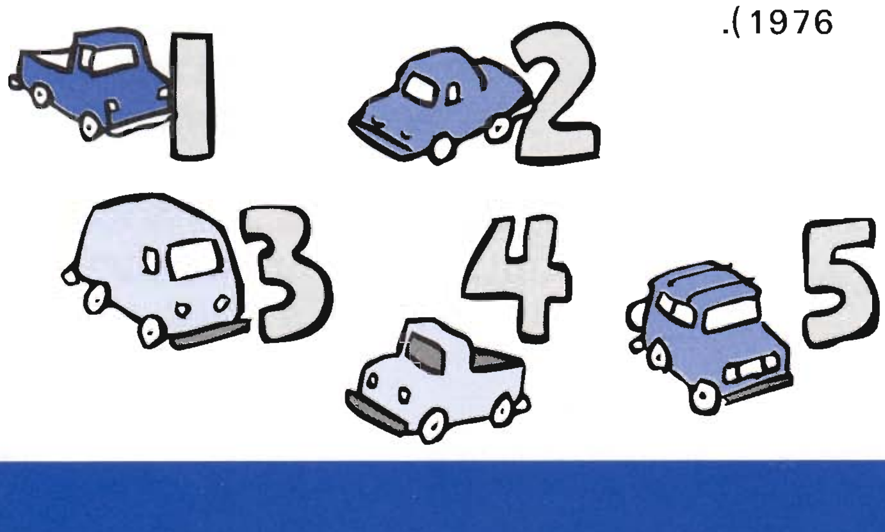
הנחת היסוד (אקסיומה) השלישית:

בקבוצת המספרים הטבעיים N
קיים איבר יחיד שאינו עוקב של אף איבר.
נסמן איבר זה ב- 1.

בדוגמאות ב ו- ג כל איבר משמש עוקב של איבר אחר, ולכן לא קיים איבר שאינו עוקב של אף איבר – כפי שנדרש באקסיומה השלישית. לכן הקבוצות המתוארות בדוגמאות אלה אינן מהוות את קבוצת המספרים הטבעיים.

מה נוכל לומר על קבוצת מספרים שמקיימת את שלוש האקסיומות?
לפי האקסיומה השלישית קבוצה זו כוללת את 1.
על-פי האקסיומות הראשונה והשלישית קיים בקבוצה עוקב ל-1 והוא אינו 1 בעצמו, היות ש-1 אינו עוקב של שום איבר. נסמן עוקב זה ב-2.
גם ל-2 קיים עוקב בקבוצה והוא אינו 1 (שכן 1 אינו עוקב) ואינו 2 מכיוון שעל-פי האקסיומה השנייה 2 אינו יכול לשמש עוקב לשני איברים שונים. נסמן את העוקב של 2 ב-3. כך אפשר להמשיך הלאה, ולכן הקבוצה חייבת להיות אין סופית.

נביא דוגמה הממחישה שגם שלוש אקסיומות אלה אינן מספיקות להגדרת המספרים הטבעיים. נבחר את קבוצת הרציונלים השליליים איחוד עם המספרים הטבעיים. לכל מספר רציונלי שלילי x נגדיר כעוקב את המספר המתקבל מהכפלתו ב-2 ($2x$) ולכל מספר טבעי נגדיר כעוקב את המספר הגדול ממנו ב-1. בקבוצה זו לכל איבר יש עוקב יחיד, לאיברים שונים יש עוקבים שונים והאיבר היחיד שאינו עוקב של אף איבר הוא המספר 1.
מתקיימות אפוא שלוש האקסיומות, אולם ברור שקבוצה זו אינה קבוצת הטבעיים (אשנב למתמטיקה, 1976).



כדי להשלים את אפיון המספרים הטבעיים ניסח פיאנו אקסיומה נוספת.

הנחת היסוד (אקסיומה) הרביעית - אקסיומת האינדוקציה:

> בקבוצת המספרים הטבעיים N,
> לכל קבוצה חלקית של N שנסמנה A,
> אם 1 שייך ל-A ואם לכל איבר של A
> גם העוקב שלו בקבוצה A אזי N=A.

אם A היא קבוצה חלקית ל-N המקיימת את הדרישות של אקסיומת האינדוקציה הרי ש-1 שייך ל-A, ומכאן שגם העוקב שלו 2 שייך ל-A וכך הלאה. כלומר, קבוצה A מכילה את כל המספרים הטבעיים שבתודעתנו ורק אותם.

אקסיומת האינדוקציה משמשת כלי חשוב בהוכחת טענות רבות במתמטיקה. נדגים את השימוש באקסיומת האינדוקציה בהוכחת הטענה הבאה:

> הביטוי $n(n^2+17)$ מתחלק ב-6 ללא שארית
> לכל n שהוא מספר טבעי.

נסמן ב-A את קבוצת המספרים n שעבורם $n(n^2+17)$ מתחלק ב- 6.

יש להוכיח כי הקבוצה A היא קבוצת המספרים הטבעיים.

התנאי הראשון באקסיומת האינדוקציה הוא: 1 שייך ל-A.

נבדוק אם 1 שייך ל-A: $1(1^2+17)=18$, ואכן 18 מתחלק ב-6 ללא שארית, כלומר 1 שייך ל-A.

התנאי הנוסף המופיע באקסיומת האינדוקציה הוא: לכל איבר של A, גם העוקב שלו נמצא ב-A.

נניח כי k הוא איבר ב-A, כלומר $k(k^2+17)$ מתחלק ב-6 ללא שארית, ונראה שגם k+1 הוא איבר ב-A, כלומר $(k+1)[(k+1)^2+17]$ מתחלק ב-6 ללא שארית.

$$(k+1)[(k+1)^2+17]=$$
$$(k+1)(k^2+2k+1+17)=$$
$$k^3+2k^2+k+17k+k^2+2k+1+17=$$
$$k^3+17k+3k^2+3k+18=k(k^2+17)+3k(k+1)+18$$

הביטוי הסופי שקבלנו הוא סכום של שלושה מחוברים. נראה כי כל מחובר מתחלק ב-6 ללא שארית.

$k(k^2+17)$ מתחלק ב-6 ללא שארית לפי ההנחה.

18 מתחלק ב-6 ללא שארית.

מבין שני המספרים k ו- k+1 (שהם מספרים עוקבים) אחד הוא מספר זוגי, ולכן מכפלתם מתחלקת ב-2 ומכפלתם ב-3 מתחלקת ב-6. כלומר, הביטוי $3k(k+1)$ מתחלק ב-6 ללא שארית.

לכן גם הסכום מתחלק ב-6 ללא שארית, כלומר k+1 הוא איבר ב A.

מכיוון שמתקיימים כל התנאים של אקסיומת האינדוקציה הרי ש A=N.

אם כך, לאקסיומות פיאנו יש תרומה חשובה למתמטיקה - הן בביסוס מערכות המספרים והן ביצירת כלי המשמש להוכחות מתמטיות.

ביבליוגרפיה:

אלמוג, נ' (1988). אספקטים הוראתיים הקשורים בהרחבה מהממשיים למרוכבים. עבודת גמר לקראת התואר "מוסמך". אונ' ת"א

אשנב למתמטיקה (1976). תל אביב: האוניברסיטה הפתוחה.

דגון, ש' (1955). תולדות המתמטיקה הקדומה. תל אביב: מסדה.

וייל, ה' (1945). פילוסופיה של המתמטיקה. ירושלים: חברה להוצאת ספרים על ידי האוניברסיטה העברית.

יפרח, (1990). ספרות ומספרים. ירושלים: כרטא.

פרנקל, אה"נ. (1942). מבוא למתמטיקה. תל-אביב: מסדה.

Russell, B. (1920). Introduction to mathematical philosophy. London: G. Allen & Unwin.

Siu, F.K. & Siu, M.K. (1979). History of mathematics and its relation to mathematical Education. International Journal of Mathematics Education and Science Technology, 10, 561-567.