

# צורה וארחה

גיאומטריה

## קיום ויחידות של משולשים

רינה גפני

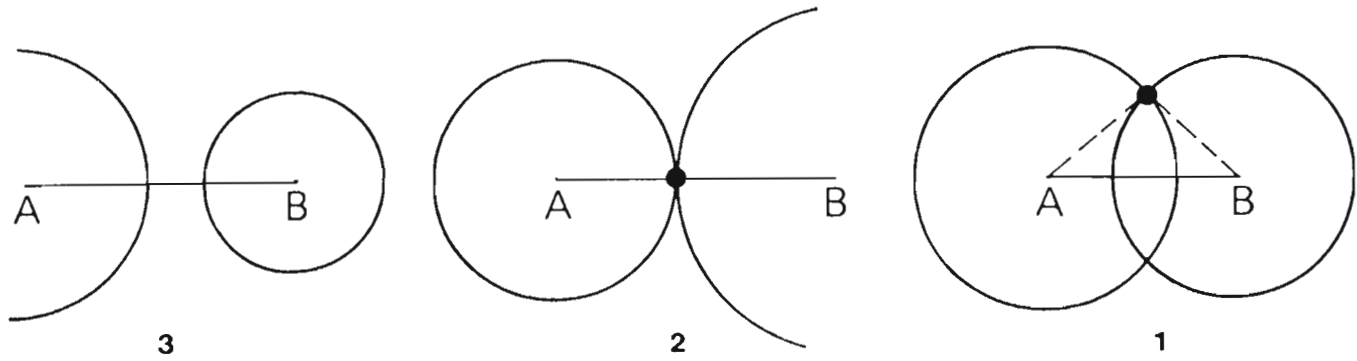
בשיעורי הגיאומטריה אנו עוסקים רבות במיון משולשים על פי צלעות (שונה צלעות, שווה שוקיים ושווה צלעות), וכן במיון על פי זוויות, (חד זווית, ישר זווית וקהה זווית). נקודת המוצא לדיון זה היא משולשים קיימים. במאמר זה נעסוק בתנאים החלים על הצלעות והזוויות כדי שניתן יהיה לבנות מהן משולש.

מבחינת שילוב הנושא בכיתה, ניתן ללמד בכיתה ב' את התנאים הקשורים בצלעות בלבד; בכיתה ג', לאחר הוראת פרק הזווית, ניתן לדון בתנאים הקשורים לצלעות וזוויות. דיון מעמיק ויסודי בנושא יכול להתבצע בכיתות ד-ו' כחזרה על פרקי משולשים והקדמה לחפיפת משולשים, או כהעשרה.

### א. תנאים הקשורים בצלעות

#### 1. בנייה

ננסה לבנות משולשים באמצעות קשיות באורכים שונים .  
לדוגמא באורכים: 5, 3, 7 ; 5, 3, 6 ; 5, 3, 2 ; 5, 3, 1 .  
דיון בממצאים וחיפוש דוגמאות נוספות יביאנו למסקנה הבאה:  
כדי שנוכל לבנות משולש משלושה קטעים נתונים, סכום האורכים של כל שניים מהם חייב להיות גדול מאורך הצלע השלישית. רצוי לתת תשומת לב גם למצבים בהם לא ניתן לבנות משולש, ולדון בגורמים לכך. בכיתה ה', כאשר עוסקים בבניית משולשים במחוגה וסרגל, אפשר לבצע פעילות זאת בעזרת מכשירים אלו.  
בשרטוט הבא נתאר את שלוש האפשרויות: 1- יש משולש, המעגלים נחתכים.  
2- אין משולש, למעגלים אין נקודות משותפות 3- אין משולש, המעגלים משיקים, נקודת ההשקה על הצלע .



2 יחידות

נבחר שלושה קטעים שמהם הצלחנו לבנות משולש, ונבדוק האם המשולש שיצרנו הוא יחיד, כלומר אפשר להניח את המשולשים שניצור זה על זה בדיוק. נשנה את סדר הצלעות ונבדוק את המשולשים שהתקבלו. למשל, האם הקטעים 5, 3, 7 ו-3, 7, 5 ייצרו אותו משולש. ע"י שרטוט של הבנייה הראשונה, ניתן להשוות אליה כל בנייה אחרת.

מסקנה - שלוש צלעות קובעות את המשולש באופן יחיד (להזכירנו: הרי זהו משפט חפיפה צלע, צלע, צלע).

ב. תנאים הקשורים לזוויות

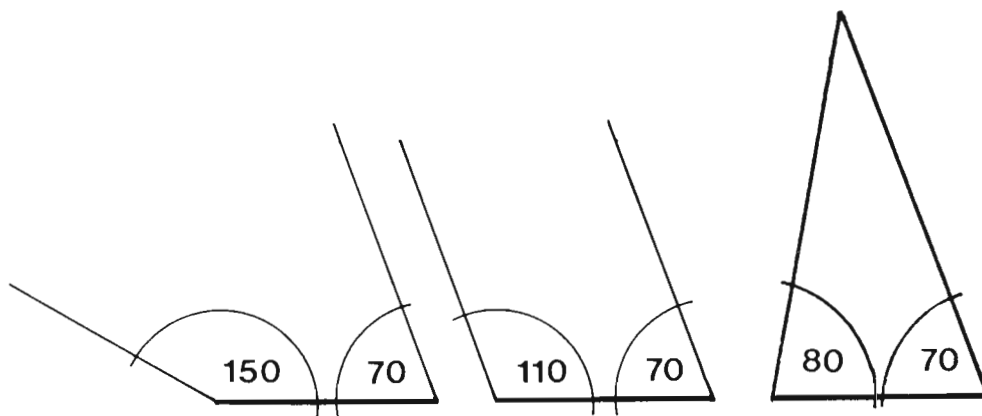
1 בנייה

נשרטט צלע באורך כלשהו, וננסה משני צדיה לבנות זווית, כך שקרן אחת של כל זווית היא הצלע הנתונה. נבחן את השאלה, מהם התנאים לכך שהקרניים הנתרות של כל זווית תיפגשנה, ומה קורה כאשר אינן נפגשות.

למשל - הזוויות שייבנו : 70, 80 ; 70, 100 ; 70, 110 ; 70, 150

ראה בשרטוט 2 את המצבים השונים של שתי הקרניים הנתרות.

שרטוט מס' 2



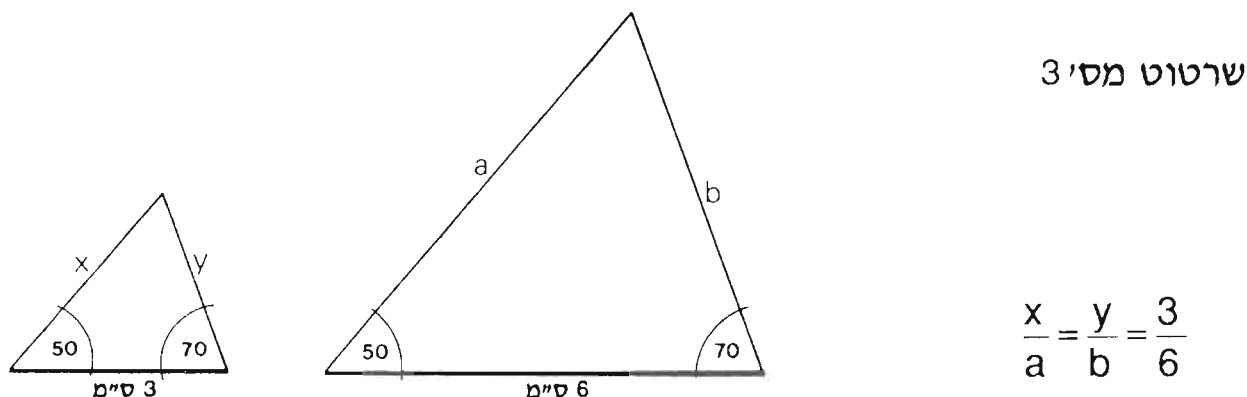
המסקנה שנקבל היא: כדי שנוכל לבנות משולש מצלע ושתי זוויות, הרי שסכום הזוויות חייב להיות קטן מ-180 מעלות. בדיקת המצבים בהם לא התקבל משולש תראה, שכאשר סכום הזוויות בדיוק 180 מעלות, נקבל שני קווים מקבילים. וכאשר סכום הזוויות גדול מ-180 מעלות, נקבל חיתוך של המשכי הקרניים בצדו השני של הקטע, והמשולש שייווצר לא יכיל את הזוויות הנתונות.

בהמשך לדיון זה ניתן לדון בשאלות נוספות הקשורות למיון משולשים עפ"י זוויות: האם ייתכן משולש בעל שתי זוויות ישרות? וקהות? בכך ניתן להסביר את ההבדל בין ההגדרות של משולש ישר זווית וקהה זווית - בהם אנו דורשים קיום זווית אחת ישרה או קהה, לבין הגדרת חד זווית, בה אנו דורשים שלוש זוויות חדות.

2 יחידות

בדיקת יחידות הבנייה תוכיח, שאם בבנייה נשתמש באותו אורך צלע, נקבל עבור זוג

זוויות נתון משולש יחיד. אך אם נשנה את אורך הצלע, ניתן לבנות משולשים רבים באמצעות זוג זוויות נתונות, אך בכולם יהיה יחס שווה בין הצלעות. שרטוט 3 ידגים את המשולשים הבאים: משולש א': אורך הצלע 6 ס"מ, והזוויות 50, 70; משולש ב': אורך הצלע 3 ס"מ, והזוויות 70, 50. מדידת אורכי שתי הצלעות הנתונות בכל בנייה תראה כי היחס ביניהן הוא 2:1 (להזכירנו: הרי המקרה הראשון בו הצלע היתה קבועה הוא משפט החפיפה- זווית, צלע, זווית. ואילו המקרה השני שייך למשפטי הדמיון- זווית, זווית).



### ג. תנאים הקשורים לצלעות זוויות

#### 1 בנייה

ננסה לבנות משולש כאשר נתונות לנו שתי צלעות זווית.

#### מקרה א: הזווית בין הצלעות.

מצב זה הנו פשוט וללא הגבלות. משרטטים את הצלע הראשונה, ליד אחד הקצוות בונים את הזווית הנתונה, כך שקרן אחת שלה היא הצלע המשורטטת. על הקרן השנייה מודדים את הצלע השנייה.

אם רוצים לבנות את המשולש מרצועות, מקלות או כפיסים, אזי מחברים תחילה את הרצועות זו לזו, אך משאירים אפשרות תנועה (למשל, אפשר לחבר בסיכה מתפצלת); בעזרת מד זווית מפסקים את הרצועות לפי מידת הזווית הנתונה ומוסיפים את הצלע השלישית כך שתחבר את שני הקצוות (אורכה של צלע זו ייקבע לפי הצורך, שכן איננה שייכת לנתונים).

#### מקרה ב: הזווית אינה בין הצלעות.

במצב זה עלינו לשרטט את הצלע הראשונה ואחייך בקצה אחד לבנות את הזווית, כך שקרן אחת שלה היא הצלע המשורטטת. ובצדה השני של הצלע המשורטטת לבנות את הצלע השנייה הנתונה.

אם רוצים לבנות מרצועות, אזי נזדקק הפעם לשלוש רצועות, שתיים תהיינה הצלעות הנתונות, וכדי שנוכל לזהותן נצבע אותן בצבע כלשהו, נניח אדום. ורצועה נוספת, רצוי שתהיה ארוכה במיוחד (כדי שממד האורך שלה לא יהווה מכשול), תשמש בתור הקרן החופשייה של הזווית, ותיצבע בצבע שונה, נניח צהוב. תהליך הבנייה הפעם יהיה הפוך מקודם: נחבר את אחת הרצועות האדומות עם הרצועה הצהובה, נפתח ביניהן את מפסק הזווית הנתונה ונחזק את החיבור שלא תהיה תזוזה, למשל ע"י פלסטלינה. כעת נחבר את הרצועה האדומה השנייה, לרצועה האדומה הראשונה, כך שתתאפשר תנועה.

נבדוק ע"י הנעתה של רצועה זו, האם אפשר לקבל משולש, כלומר האם הרצועה האדומה השנייה תגיע עד לרצועה הצהובה.

נוכל להבחין בין המצבים הבאים:

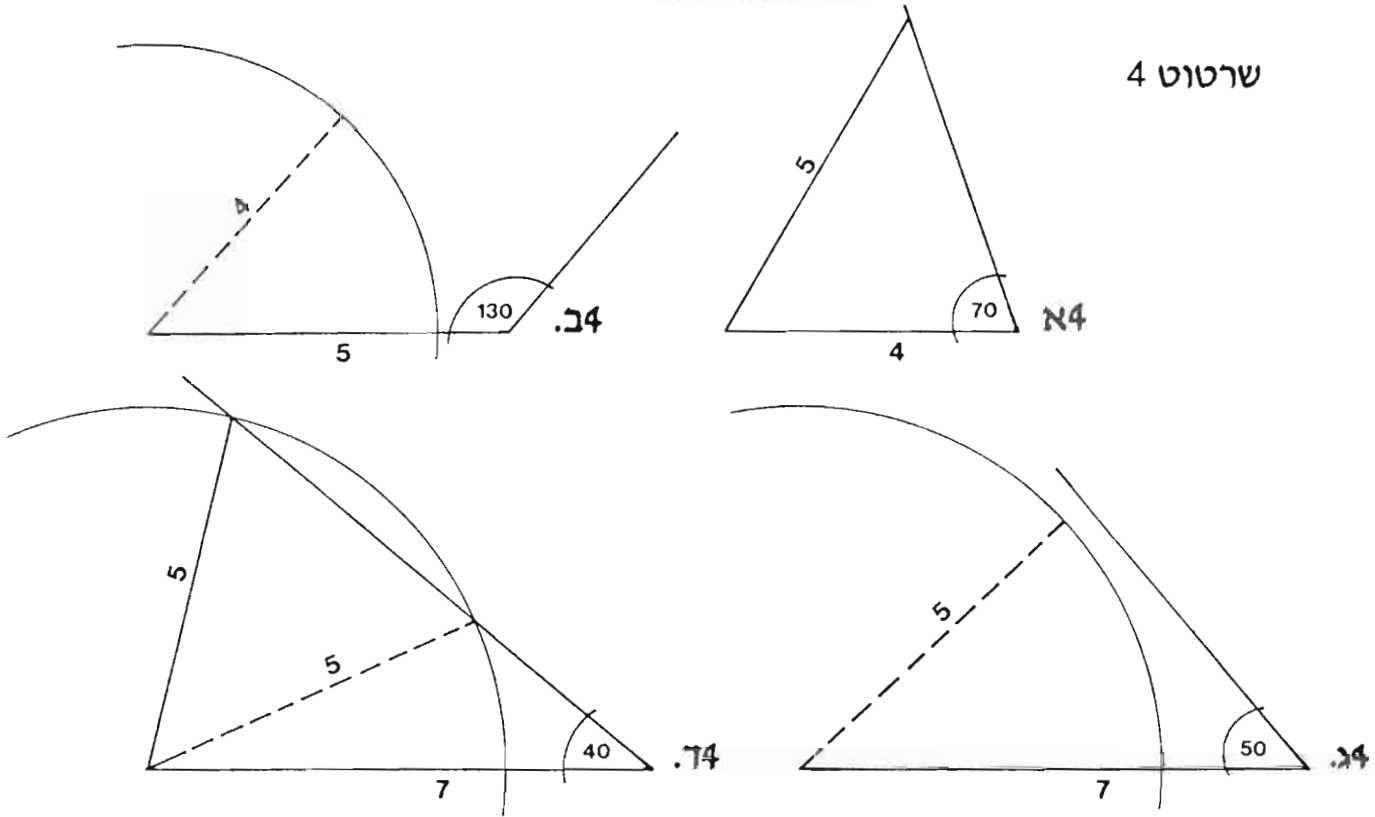
א. כאשר הרצועה השנייה, שמול הזווית, ארוכה מהרצועה שליד הזווית, תמיד

ניצור משולש. ראה שרטוט 4.

ב. כאשר הרצועה השנייה, שמול הזווית, קצרה מהרצועה שליד הזווית, והזווית הנתונה היא קהה או ישרה, לא נקבל משולש.  
ראה שרטוט 4ב.

ג. כאשר הרצועה השנייה, שמול הזווית, קצרה מהרצועה שליד הזווית, והזווית הנתונה היא חדה, יש מצבים בהם לא ניתן לבנות משולש, ויש מצבים בהם ניתן לבנות שני משולשים. ראה שרטוט 4ג ו 4ד.

שרטוט 4



2 יחידות

**מקרה א:** היחידות של הבנייה ברורה.

**מקרה ב:** יחידות הבנייה מובטחת רק כאשר הצלע הנמצאת מול הזווית ארוכה מהצלע השנייה.

(להזכירנו: משפט חפיפה צלע, צלע, וזווית מול הגדולה שביניהן).

לסיכום, חקירת אפשרויות לבניית משולשים, ובחינת היחידות של בנייה זו, מאפשרות לתלמיד הצצה מעמיקה יותר לעולם המשולשים, ומדגישות את הכיוון ההפוך של הטענות; למשל, ילדים מסיקים אוטומטית מכך שמשולש הוא שלוש צלעות, שמכל שלוש צלעות אפשר ליצור משולש.

הבסיס של החקירה שהיה דיון בקיום אפשרות בנייה ויחידות, הנו אחד האלמנטים המשמעותיים החשובים במתימטיקה בכלל, ורצוי לשלבו בתוכני הלימוד כבר בבית הספר היסודי.

האמצעים המתודיים, השלבים ועומק החקירה צריכים להיות מותאמים לגיל וליכולת של התלמיד.