

צורה וארחה

גיאומטריה

קוטר המעגל והיקפו

שרה מלצר

דרכי ההוראה החדישות של המתמטיקה מדגישות את הצורך בהשתתפותו הפעילה של התלמיד בעיצובם ובגילויים של מושגים וחוקים מתמטיים. על המורה לזמן מצבים נאותים וליצור אתגרים כדי למשוך את התלמידים לחקר וגילוי.

כאשר התלמיד יחקור ויתנסה במצבים מוחשיים הוא יוכל להגיע בכוחות עצמו לניסוח המילולי. עקרונות מתמטיים יקבלו משמעות, ויובנו יותר לתלמיד, אם יעבור את השלבים מהניסיון האישי המניפולטיבי ועד לגילוי העקרונות. ולכן עלינו להקפיד על פעילות בטרם ירכוש הילד עקרונות.

בהתפתחות הנושא הנלמד "קוטר המעגל והיקפו" נבחין ב-2 שלבים:

א. ידע מוקדם.

ב. הקניית ידע חדש.

ידע מוקדם

מדידת אורך קטעים, מדידת אורך קו-שבור, מדידת היקף מצולעים, חישוב

היקף מצולעים, מערכת צירים, המעגל והעגול, רדיוס, מיתר, קוטר וקשת.

הקניית ידע

- מציאת היחס הקבוע בין קוטר המעגל והיקפו.
- היחס הקבוע בין קוטר המעגל והיקפו מצויין באות π היוונית שערכה קרוב ל- 3.14.
- מציאת הנוסחה להיקף המעגל.

מושגים הקשורים בהקניית הנושא:

המספר π , היקף - המעגל, קוטר, מצולע חסום במעגל, מצולע חוסם מעגל.

חוקים ועקרונות

- קיים יחס קבוע בין קוטרו של מעגל לבין היקפו (ללא קשר לגודלו של המעגל).
- יחס זה מצויין באות היוונית π . משתמשים ב- 3.14 כקרוב ל- π .
- היקף המעגל גדול מקוטרו פי 3.14 (בערך).

מיומנויות

- הילד יידע להשתמש בנוסחת ההיקף למציאת היקפם של מעגלים שונים.
- הילד יידע לחשב קוטרו של מעגל אם ידע את היקפו (לא הכרחי לפי תוכנית הלימודים).
- הילד יידע לאמוד היקפו של מעגל על פי היקפם של מצולע חסום במעגל או מצולע חוסם מעגל.

פעילויות ואמצעי עזר

- מדידת היקפי מעגלים וקוטרם באמצעות סרגל וחוט תפירה.
- מדידת שפת כלים וקוטרם באמצעות סרגל וחוט תפירה.
- שרטוט וגזירת מעגלים בקטרים שונים.
- מערכת שקפים המדגישה את הקשר בין הקוטר להיקף המעגל.
- פעולות במערכת צירים להמחשת היחס הקבוע הקיים בין הקוטר להיקף.

הפעילויות שתוצגנה להלן מנוסחות לעבודה עצמית של קבוצת תלמידים.

חלק א': היחס בין היקף המעגל לקוטר

1. שרטטו על שקף 4 מעגלים בגדלים שונים.
2. שרטטו בכל עגול קוטר.
3. ציינו באותיות את העגולים. מהגדול לקטן. (א' ב' ג' ד').
4. שערו: היש קשר בין היקף המעגל לקוטרו? הסבירו את השערתכם.
5. גזרו את ארבעת העגולים.
6. הניחו את העגולים אחד על גבי השני כשמרכזיהם מתלכדים וקוטר מונח על קוטר.
סדרו את המעגלים לפי סדר גודל של היקפם.
סדרו את המעגלים לפי סדר גודל של קוטרים. האם יש קשר בין שני הסדורים?
7. האם ניתן להסיק על קשר בין היקף המעגל לקוטרו?
8. מדדו בחוט תפירה את היקף המעגלים וקוטרים ורשמו בטבלה הבאה.
9. חשבו פי כמה גדול היקף כל מעגל מקוטרו.
(לצורך החישוב תוכלו להעזר במחשבון).

הצורה	הקוטר בס"מ	היקף בס"מ	פי כמה גדול ההיקף מהקוטר: <u>היקף</u> קוטר
מעגל א' מעגל ב' מעגל ג' מעגל ד'			

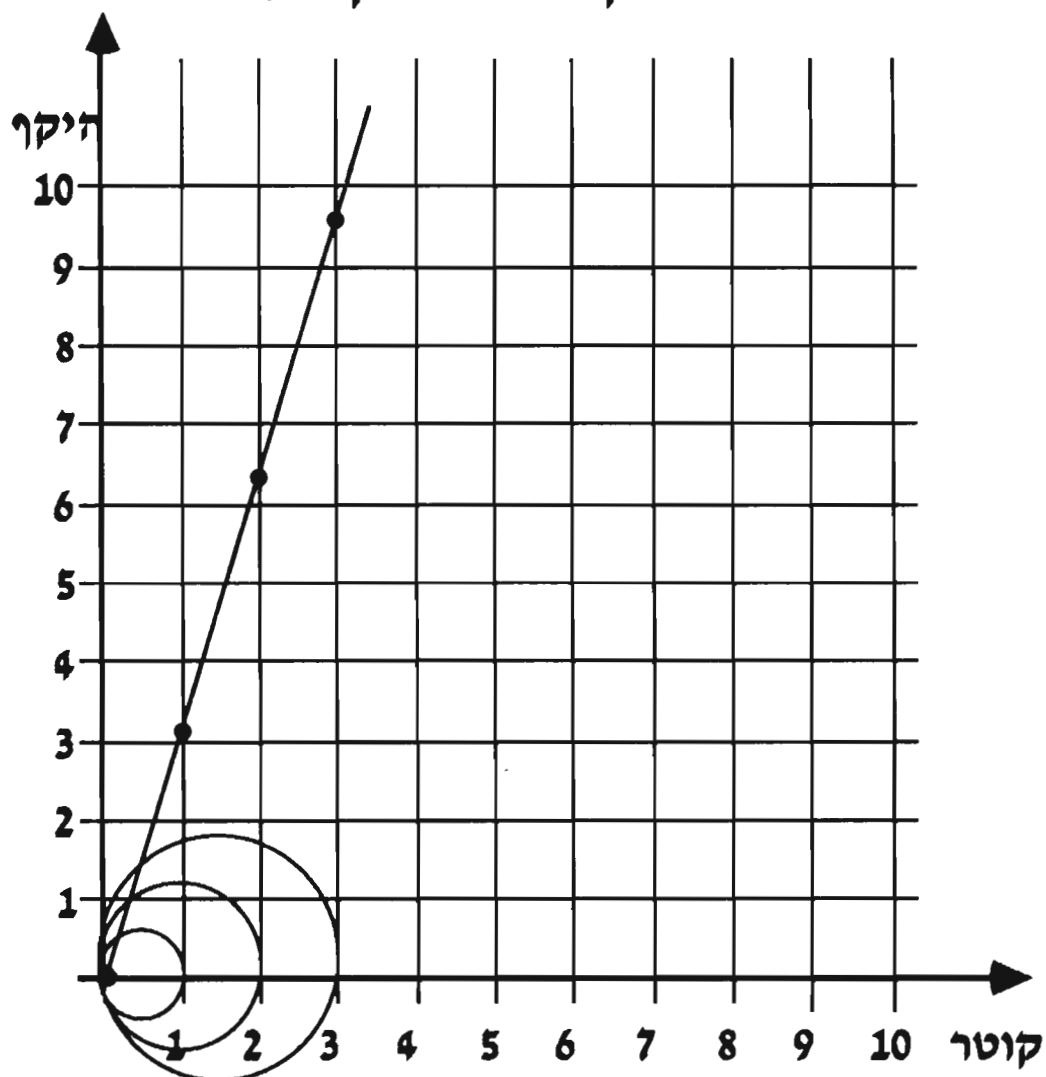
10. אם דייקתם במדידות ובחישובים קבלתם מספרים הקרובים למספר 3.14.
11. שערו, האם מספרים קרובים למספר זה תקבלו גם אם תמדדו מעגלים אחרים? (גדולים מאד או קטנים מאד)

12. האם תוכלו עתה לחשב את היקפו של מעגל, אם תדעו רק את קוטרו?
 13. כתבו את מסקנותיכם.

חלק ב': היחס הקבוע π בין היקף מעגל וקוטרו - המחשה במערכת צירים.

1. בשקית שלפניכם יש 5 כלים שונים עגולים, כמו כוס, קופסא, מכסה של סיר, מטבע, שעון יד, וכן נייר דבק.
 הקיפו כל אחד מהכלים בנייר דבק, כך שנייר הדבק יקיף פעם אחת את שפת הכלי.
 2. על גליון גדול של נייר משובץ הכינו לכם מערכת צירים.
 על ציר אחד יצויין ההיקף ועל הציר השני הקוטר.

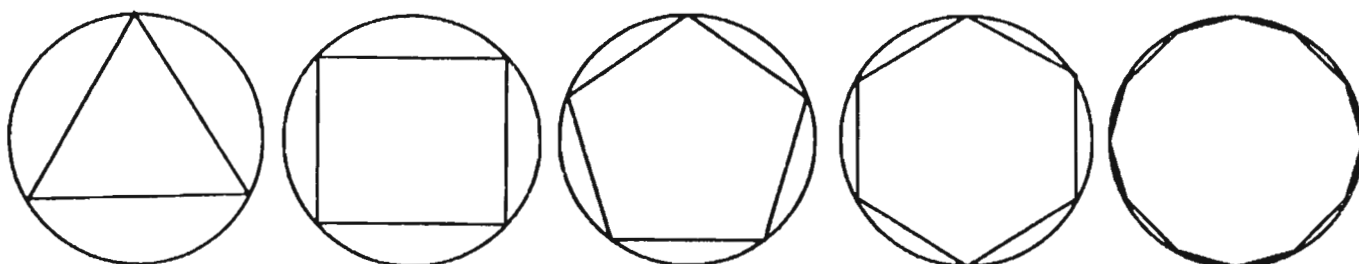
קו היחס הקבוע



3. הניחו על הציר האופקי את אחד הכלים כך שהוא נוגע בראשי הצירים, וקוטר הבסיס שלו יתלכד עם הציר האופקי. שרטטו קו סביב בסיס הכלי כך שיתקבל מעגל על הציר האופקי.
 4. הורידו את נייר הדבק מהכלי והדביקו אותו במערכת הצירים מהנקודה שבה מסתיים קוטר המעגל ובמקביל לציר האנכי. הערה: נייר הדבק ייסמן את היקף הכלי והקוטר יסומן ע"י הכלי עצמו.
 5. חיזרו על אותה הפעולה עם כל הכלים שבשקית.
 6. חברו בקו את כל הנקודות המתאימות לכלים השונים (הנקודות שבקצה השמאלי העליון של נייר הדבק).
 7. האם קבלתם קו ישר? מה לדעתכם מתאר קו זה? (קו זה מתאר את היחס שבין היקף המעגל לקוטרו, היחס יתקבל אם נחשב את שפוע הישר).
 8. האם על פי שרטוט זה תוכלו למצוא היקפם של כלים עגולים אחרים?
 9. מה יהיה היקפו של כלי שקוטרו 4 ס"מ?
- האם תוכלו לדעת זאת רק על פי שרטוט?

חלק ג': אומדן היקף המעגל על פי מצולע חסום במעגל ומצולע חוסם מעגל

לפניכם מעגלים חופפים ובכל אחד מהם חסום מצולע.



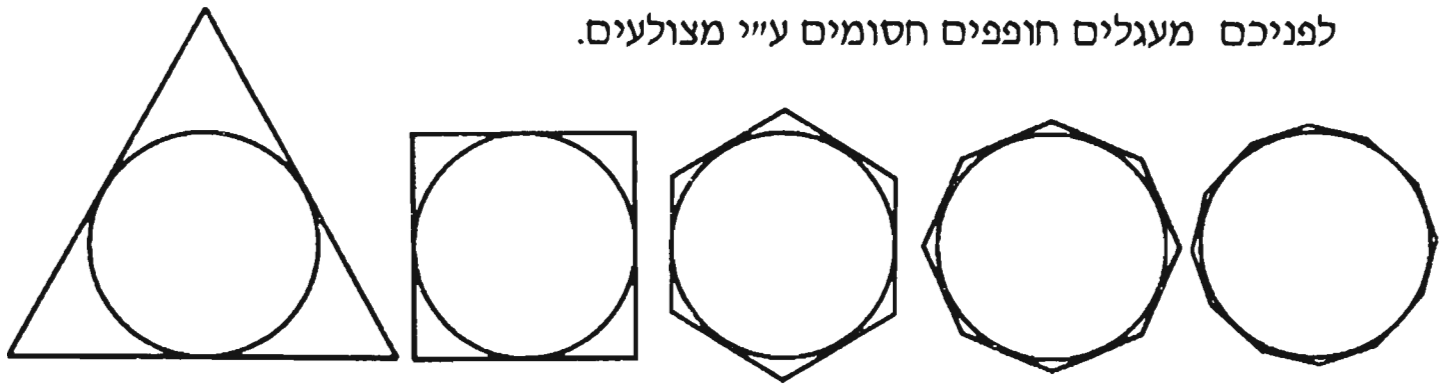
את היקף המצולע הינכם יודעים למדוד או לחשב.

- א. שערו: היקפו של איזה מצולע יתן לכם את הערכה הטובה ביותר להיקפו של המעגל? נסו לנמק מדוע?

- ב. מדדו בחוט את היקף המצולעים.
- ג. מדדו בחוט את היקף המעגל. (המעגלים חופפים).
- ד. כתבו את תוצאותיכם מתחת לכל שרטוט.
- ה. האם תוצאות המדידות תואמות את השערתכם?
- ו. מהן מסקנותיכם?

היקף המצולע החסום יהיה קרוב להיקף המעגל ככל שיהיו בו יותר צלעות. ככל שנחלק את הקו השבור הסגור ליותר קטעים הוא יתקרב באורכו לקו העקום הסגור. היקף המעגל החוסם תמיד יהיה גדול יותר מהיקף המצולע החסום.

לפניכם מעגלים חופפים חסומים ע"י מצולעים.



א. שערו:

- 1. היקפו של איזה מצולע הוא הגדול ביותר?
- 2. היקפו של איזה מצולע קרוב יותר להיקף המעגל?
- ב. מידדו בעזרת חוט תפירה וסרגל את היקפו של כל אחד מהמצולעים החוסמים את המעגלים ורשמו תוצאותיכם מתחת לשרטוט.
- ג. מידדו בעזרת חוט תפירה וסרגל את היקפו של המעגל ורשמו תוצאותיכם מתחת לשרטוט.
- ד. האם תוצאות המדידות תואמות את השערתכם?
- ה. אם כן, מהן מסקנותיכם?
- ו. היקפו של משושה משוכלל החסום במעגל הוא 42 ס"מ. היקפו של משושה משוכלל החוסם אותו מעגל הוא 48 ס"מ בערך. העריכו את היקפו של המעגל.

ככל שגדל מספר צלעות המצולע המשוכלל החוסם את המעגל - היקפו קטן, אך לעולם יהיה גדול מהיקף המעגל החסום.

מסקנה כללית: היקף המעגל נמצא בין היקפי המצולעים החסומים בו לבין היקפי המצולעים החוסמים אותו.

לצורך המחשה ניתן לשרטט את המעגל הנמצא בין המצולע החוסם לבין המצולע החסום על שקף ולהניח שקף על שקף.

וכמו שאנחנו ניסינו לאמוד את היקף המעגל בעזרת מצולעים החוסמים מעגלים ומצולעים החסומים ע"י מעגלים, כך עשה גם גדול המתמטיקאים של הזמן העתיק, ארכימדס. הוא כתב את החבור "מדידת-המעגל" שבו עסק בחישוב היחס הקבוע בין ההיקף לבין הקוטר במעגל. יחס המצויין

כיום באות π (האות הראשונה במילה היוונית Periphereia שפרושה היקף).

וכך עשה ארכימדס: הוא התחיל במשושה משוכלל החסום במעגל, הכפיל את מספר צלעותיו בזו אחר זו עד שהגיע למצולע המשוכלל החסום בעל 96 צלעות. (כמובן, ככל שמגדילים את מספר הצלעות של המצולעים החסומים, היקפם הולך וגדל ומתקרב להיקף המעגל) ארכימדס חישב ומצא, שהיקף המעגל החוסם מצולע זה הוא

$$2 \cdot R \cdot 3 \frac{10}{70}$$

את אותה פעולה הוא ביצע עבור סדרת המצולעים המשוכללים החוסמים את המעגל (היקפם של מצולעים אלו הולך וקטן ומתקרב יותר ויותר להיקף המעגל - ככל שמספר הצלעות הולך וגדל).

בתהליך זה מצא, שהיקף המעגל החסום במצולע הוא

$$2 \cdot R \cdot 3 \frac{10}{71}$$

וכך הגיע ארכימדס לתוצאה שהיחס בין ההיקף לקוטר בכל מעגל הוא גדול

$$3 \frac{10}{70} \text{ מ - וקטן מ- } 3 \frac{10}{71}$$

כמובן שכתובת המספרים נעשתה בדרך שונה.

ביבליוגרפיה:

שבתאי אונגרו, מבוא לתולדות המתמטיקה, אוניברסיטה משודרת, הוצאת "לאור" - 1989

דויד ברגמיני והעורכים של לייף, מתמטיקה, הספרייה המדעית של לייף, הוצאת מעריב - 1970