שימוש בשגיאות
בהוראת מתמטיקה:
תיאוריה ויישום

כתיבה: **ד"ר פסיה צמיר**
רות ברקאי

יצא לאור במימון ובפיקוח האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים במשרד החינוך
ומטה מל"מ, המרכז הישראלי לחינוך מדעי טכנולוגי ע"ש עמוס דה-שליט

משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית
האגף לתכנון ולפיתוח
תכניות לימודים

אוניברסיטת תל-אביב
בית הספר לחינוך
ע"ש חיים וג'ואן
קונסטנטינר

מטה מל"מ, המרכז
הישראלי לחינוך מדעי
טכנולוגי
ע"ש עמוס דה-שליט

המרכז לחינוך
מדעי וטכנולוגי

מסת"ב ISBN 965-274-421-2

הוצאת רמות — אוניברסיטת תל־אביב

יצא לאור בשנת תשס"ו—2005

תוכן עניינים

מבוא

חוברת זו היא רביעית בסדרת חוברות שנעשה בהן שימוש במחקרים שפורסמו בכתבי עת שונים לצורכי הכשרה וקידום מקצועי של מורים למתמטיקה בבתי ספר יסודיים.

בחוברת זו שני שערים:

שער ראשון "מה ידוע מהספרות ומהמחקר" מציג סקירה ספרותית מקצועית מתחום הוראת המתמטיקה הדנה בסיבות לשגיאות, מיונים של שגיאות אופייניות ויישומים אפשריים של שגיאות בהוראה. אנו רואות חשיבות רבה לכך שמורים ומכשירי מורים יכירו ניתוחים של חוקרים מתחום הוראת המתמטיקה לגבי שגיאות של תלמידים ויהיו מודעים להמלצות החוקרים לגבי שימושים אפשריים בשגיאות במהלכי הוראה שונים. אנו מאמינות שהכרת הספרות המקצועית והפעלת שיקולי דעת לגבי סיבות אפשריות לשגיאות, מיונן בדרכים שונות, ולגבי הצעותיהם ההוראתיות של חוקרים, צריכים להוות חלק חשוב בתהליכי קידום מקצועי של מורים.

השער השני "משימות ופעילויות – ניתוח שגיאות, אירועי שגיאה, הערות והארות" מציג פעילויות המתבססות על סקירת הספרות שהוצגה בשער הראשון של החוברת, בלווי הערות והארות שמטרתן להבהיר את מטרות הפעילויות והדרכים האפשריות להפעלתן.

יש להדגיש כי חוברת זו מזמנת אפשרויות הפעלה מגוונות מעבר לשימוש ישיר בפעילויות המוצגות בשער השני של החוברת. ניתן, למשל, לעשות שימוש בדוגמאות הרבות המוצגות בשער א', לבקש ממורה מסוים (או מקבוצת מורים) לקרוא פרק מסוים, להציגו בפני עמיתיהם, להדגים את הרעיונות התיאורטיים באמצעות דוגמאות המוצגות בפרק ובאמצעות דוגמאות נוספות.

במבוא לכל אחד מהשערים, מוצג מבנה התכנים והפעילויות שהוא מכיל.

השימוש בפעילויות מומלץ בעיקר בקורסים העוסקים בתכנים מתמטיים הנלמדים בבית הספר היסודי ובאלה העוסקים בהיבטים דידקטיים ומתודיים של הוראת מתמטיקה בבית הספר היסודי.

החוברת בנויה באופן שאפשר ללמוד ממנה גם באופן עצמאי.

שער א': מה ידוע מהספרות ומהמחקר?

במהלך שלושים השנים האחרונות נחקרו תפיסות ותהליכי חשיבה של תלמידים במגוון רחב של תחומי תוכן מתמטיים (למשל, מערכות מספרים, יחסים ופעולות, גיאומטריה, אלגברה, סטטיסטיקה, הסתברות ואינסוף). המחקרים מתארים שגיאות של תלמידים בתחומי תוכן מוגדרים ומציינים את יציבות חלק מהתפיסות שאינן מתאימות לאלו המקובלות במדע. בנוסף, הציעו החוקרים התייחסויות רחבות למקורות אפשריים לשגיאות שכיחות ומיונים של שגיאות מתמטיות של תלמידים.

מעבר לעניין האקדמי שיש לקהיליית החינוך המתמטי בהבנת דרכי חשיבה נכונות ושגויות של לומדים, הועלתה גם קריאה רחבה להשתמש בידע המחקרי שהצטבר וליישמו בתכנון ההוראה ובמהלכה. השאלות: האם וכיצד לעשות שימוש בשגיאות בהוראת מתמטיקה העסיקה חוקרים אחדים והצעותיהם מוצגות בחוברת זו.

שער זה מתמקד בסקירת ספרות מקצועית בתחום הוראת מתמטיקה, שדנה בהיבטים השונים של השגיאות ומקומן בהוראה. בשער זה חמישה פרקים. ארבעה פרקים ראשונים, בהם נציג את סקירת הספרות ופרק חמישי, פרק מסכם:

פרק א.1: **מדוע שוגים?**

פרק זה דן בהצעותיהם של מספר חוקרים באשר לסיבות אפשריות לשגיאות מתמטיות של תלמידים.

פרק א.2: **איזה סוגים של שגיאות נוטים לומדים לעשות?**

פרק זה מציג מיונים שונים של שגיאות מתמטיות, אשר הוצעו על ידי מספר חוקרים בתחום.

פרק א.3: **האם כדאי להשתמש בשגיאות בהוראה?**

פרק זה מציג עמדות שונות של מורים ושל חוקרים בתחום הוראת מתמטיקה לגבי שילוב שגיאות במהלך ההוראה.

פרק א.4: **כיצד אפשר להשתמש בשגיאות בהוראה?**

פרק זה עוסק בהצעותיהם של אנשי חינוך מתמטי לגבי דרכים שונות לשימוש בשגיאות בהוראה.

פרק א.5: **מילות סיכום, הערות והארות...**

פרק זה עוסק בתרומה אפשרית של כל אחד מהפרקים בשער זה לידע מורים ולקידום ההוראה.

הסקירה הספרותית המוצגת בפרקים השונים מלווה במספר רב של דוגמאות. חלק מהדוגמאות לקוחות מהמאמרים אליהם מתייחס הפרק וחלקן חוברו על ידינו.

א.1 מדוע שוגים?

ידוע לכל מי שעוסק בלימוד או בהוראת מתמטיקה כי תלמידים שוגים בפתרון בעיות מתמטיות, וכי שגיאות מסוימות שכיחות מאוד (וזכו עקב כך לכינוי "שגיאות אופייניות"). יש אמנם שגיאות אקראיות שהן תוצר של חוסר ריכוז, בלבול או חוסר תשומת-לב, אולם יש גם שגיאות רבות להן ניתן הסבר במחקרים שבדקו תפישות תלמידים לגבי מושגים ופעולות מתמטיות. פרסומים רבים מספקים תיאורי שגיאות אופייניות של תלמידים בנושאים מתמטים שונים. חוקרים אחדים הציעו הסברים תיאורטיים לשגיאות אלה. בפרק זה נציג בקצרה (1) את הסיבות לשגיאות שמציע פישביין בתיאוריה שפיתח לגבי חשיבה אינטואיטיבית וחשיבה מתמטית ומדעית (ראו למשל, Fischbein,1987; 1993), (2) את הסיבות לשגיאות שמציעים טול ווינר באמצעות התיאוריה לגבי דימויי מושג והגדרות של מושגים (ראו למשל, Tall & Vinner, 1981), ו-(3) את הסיבות לשגיאות שמציעות סתוי ותירוש באמצעות תיאורית הכללים האינטואיטיביים (ראו למשל, Stavy & Tirosh, 2000).

1.1 הסיבות לשגיאות על פי פישביין – אינטואיציות

פישביין ניתח בעבודותיו התנהגויות מתמטיות של תלמידים תוך התייחסות לשלושה מרכיבים בסיסיים של הידע המתמטי: המרכיב הפורמאלי, המרכיב האלגוריתמי והמרכיב האינטואיטיבי. <u>המרכיב הפורמאלי</u> כולל ידע לגבי המבנה הדדוקטיבי של המתמטיקה. על האקסיומות, ההגדרות, המשפטים וההוכחות. <u>המרכיב האלגוריתמי</u> כולל ידע לגבי טכניקות פתרון ואסטרטגיות סטנדרטיות המנומקות מתמטית. ללומד יש צורך ברכישת מיומנויות על ידי תרגול שיטתי שוטף, אולם לדעתו של פישביין אסור להסתפק בהכרת תהליכי הפתרון ובהפעלה אוטומטית שלהן. יש ללוות את מהלך ההתרה בהצדקות פורמאליות. פישביין מדגיש כי קשרי הגומלין בין משמעות לבין מיומנות הם תנאי יסוד לידע מתמטי. <u>המרכיב האינטואיטיבי</u> הוא ידע סובייקטיבי של הפרט לגבי מושג, משפט או פתרון בעיה. פישביין מתייחס בהרחבה לאינטואיציות ראשוניות שהן סוג של אמונה המתקבלת על ידי הלומד באופן מיידי, מובן מאליו וללא הרגשת צורך בהצדקה כלשהי. לאמונות האינטואיטיביות השפעה כפייתית על הפרשנות ועל אסטרטגיות החשיבה שלנו. טענות שנכונותן מתקבלת אינטואיטיבית הן, למשל, 'השלם גדול מחלקיו', 'דרך נקודה מחוץ לישר ניתן להעביר מקביל אחד לישר הנתון', 'הקו הישר הוא המרחק הקצר ביותר בין שתי נקודות'. פישביין מתייחס לתפקידי מרכיבים אלה בידע המתמטי ומסביר באמצעותם את נטיית הלומדים לשגות.

א. ניגודים בין המרכיב הפורמאלי לבין המרכיב האינטואיטיבי – לעיתים קרובות, אינטואיציות הנעוצות בניסיון הלומד בחיי יום-יום או בידע מתמטי קודם שאינו בהכרח מתאים לחומר הנלמד, מתערבות ומשתלטות על הידע הפורמאלי לגבי מושג או על תהליך ההצדקה של מהלך הפתרון. כיוון שהאמונה האינטואיטיבית מושרשת עמוקות, הביטחון בנכונותה (גם כאשר אינה מתאימה לחומר המתמטי הנלמד) עלול לגרום לשגיאה. דוגמא לשגיאה מסוג זה היא התפישה המוטעית הנפוצה: 'כפל מגדיל' ו 'חילוק מקטין' אשר נמצאה אצל תלמידי בית-הספר היסודי. למרות שכבר בכיתות היסוד תלמידים מכירים את הכפולות ב-1 ובאפס, הניסיון הרב עם מספרים טבעיים גדולים מ-1 שעבורם הכפל אמנם מגדיל והחילוק אמנם מקטין יוצרים אצל הלומדים אמונה אינטואיטיבית כוללת לגבי נכונות טענות אלה. בנוסף, בבסיס ההכרות עם פעולת הכפל בכיתות היסוד עומד מודל מקובל: "הכפל היא פעולת חיבור חוזרת". מודל זה מתאים למספרים טבעיים הגדולים מ-1. 'שתים כפול שלוש' פירושו, לפי מודל זה 3+3, אך מה תהיה המשמעות של 'אפס כפול שלוש'? ושל '0.75 כפול 5'? בתרגילים

האחרונים לפעולת הכפל אין משמעות אינטואיטיבית. כתוצאה מכך, כאשר עומד התלמיד בפני בעיית כפל שבה הכופל הוא שבר, יוליך 'מודל החיבור החוזר' (המשמש עבורו בסיס אינטואיטיבי לפעולת הכפל) לאמונה השגויה לפיה המכפלה חייבת להיות גדולה מ-5.

ב. ניגודים בין אלגוריתמים לבין מודלים אינטואיטיביים – מודלים אינטואיטיביים מתפתחים אצל תלמידים תוך כדי שימוש באלגוריתמים שונים. מודלים אלה ישימים במקרים מסוימים אולם הם מכתיבים את דרך הפעלת האלגוריתמים גם במקרים אחרים. שימוש במודלים האינטואיטיביים במקרים שבהם הם אינם ישימים מוליך לשגיאות. דוגמא לשגיאות מסוג זה ניתן למצוא בספרות המחקרית לגבי פתרונות של תלמידים לתרגילי חיסור. פישביין מצביע על מודל פרימיטיבי של החיסור: "אם יש במיכל כלשהו A עצמים (למשל: גולות) ורוצים להוציא מתוכם B עצמים, ניתן לעשות זאת רק אם A>B". השגיאה 326-117=211 (כשהתרגיל רשום במאונך) נובעת מיישום מודל אינטואיטיבי זה.

ג. ניגודים בין מושגים לבין ייצוגים אינטואיטיביים – משמעות מושגים מסוימים במתמטיקה שונה מהמשמעות היום-יומית המקובלת של אותם מושגים. השימוש היומיומי במושגים גורם לשימוש אינטואיטיבי מוטעה באותם מושגים במתמטיקה. למשל, משמעות המושג "קבוצה" במתמטיקה שונה ממשמעותו בחיי יומיום. בשימוש היומיומי, קבוצה צריכה להכיל יותר מאיבר אחד ולאיבריה צריכה להיות תכונה משותפת (מדברים, למשל, על קבוצת הכדורגל, קבוצת התלמידים המצטיינים). מחקרים מצביעים על נטייה שגויה של תלמידים ומורים בבית הספר היסודי ליחס למושג המתמטי את הדרישות האלה, ובשל כך לדחות בטעות את קיומן של קבוצות ריקות או קבוצות בנות איבר אחד (לינצ'בסקי ווינר, 1988).

ד. ניגודים בין אילוצים פורמאליים לבין מודלים אלגוריתמיים – אלגוריתמים מתמטיים מוליכים לפתרון של מטלות במקרים מסוימים. הכללות יתר בשימוש באלגוריתמים גורמות לשגיאות. דוגמאות לכך ניתן למצוא בנטייה השגויה של תלמידים "להכליל" את חוק הפילוג של הכפל מעל החיבור $m(a+b)=ma+mb$ למקרים של כפל מעל כפל $[m\times(a\times b)]=(m\times a)\times(m\times b)$, למקרים של כפל מעל ערך מוחלט $m\times|a+b|=|ma|+|mb|$ ובמקרים נוספים בלימודי מתמטיקה מתקדמים יותר. אותו סוג של שגיאה, בה טכניקה של פתרון אינה מתאימה לחוקים הפורמאליים מופיע גם בפישוט שברים אלגבריים: $\frac{an+x}{an+by}=\frac{x}{by}$ או $\frac{an+x}{an+by}=\frac{1+x}{1+by}$

ה. ניגודים בין מושגים גיאומטריים לבין מושגים צורניים – קשרי גומלין מורכבים ביותר קיימים בין ההיבטים המושגיים לבין ההיבטים הצורניים של מושגים (figural concepts), צורות וישויות גיאומטריות. לישויות גיאומטריות (מתמטיות) אופי אידיאלי מופשט וכל תכונה של צורה גיאומטרית נגזרת מהגדרתה של הצורה ומהמבנה האכסיומטי אליה היא שייכת. יחד עם זאת, מהו קו, משולש, כדור או קובייה? בנוסף להיותם דימויים ומושגים, הם הייצוג המרחבי של המושגים. השרטוט של מעגל או של משולש הוא מודל גרפי של צורה גיאומטרית, ולא הצורה הגיאומטרית עצמה. צורה גיאומטרית היא, בו זמנית, גם מושג וגם דימוי. דוגמא לקשיים הנובעים מדו-משמעות זו אפשר למצוא בעבודת הדוקטור של פישביין שמצא כי תלמידים נוטים לטעון כי נקודת החיתוך של ארבעה ישרים גדולה מנקודת החיתוך של שני ישרים. באופן דומה, בעבודות נוספות שבדקו עניין זה כעבור שנים נמצא כי

תלמידים רבים שידעו לומר כי לנקודה אין מימדים, אין עובי אורך או רוחב, שגו וטענו כי נקודת החיתוך של שישה ישרים גדולה מנקודת החיתוך של שני ישרים.

1.2 הסיבות לשגיאות על פי טול ווינר – דימוי מושג והגדרתו

טול ווינר התייחסו בעבודותיהם לשימוש נכון ולשימוש שגוי של תלמידים בגילאים שונים במושגים מתמטיים (Tall & Vinner, 1981). הם טענו שתלמידים יוצרים לעצמם דימויים של מושגים. **דימוי המושג** (concept image) מורכב מסך כל המבנים הקוגניטיביים, התמונות המנטאליות, התכונות והתהליכים הקשורים בתודעתו של הלומד למושג. זאת לעומת **הגדרת המושג** (concept definition) העושה שימוש במלל כדי לאפיין את המושג. לגבי הגדרת המושג, החוקרים הבחינו בין **הגדרה אישית** (personal concept definition) לבין **הגדרה פורמאלית** (formal concept definition), כאשר האחרונה היא ההגדרה המקובלת בקהיליית המתמטיקה. המונחים "דימוי מושג" ו-"הגדרת מושג" שימשו את טול ווינר בניתוח שגיאות תלמידים ובהתייחסות לסיבות אפשריות לשגיאות שזיהו.

א. ניגודים בין דימוי המושג לבין הגדרתו – לעיתים קרובות, דימוי המושג מתבסס על מכלול של מקורות, ביניהם הניסיון של הלומד בחיי יום-יום והידע המתמטי של הלומד בנושאים שנלמדו בעבר, ואשר עלולים שלא לעלות בקנה אחד עם החומר הנלמד ועם הידע המתמטי הרלוונטי של הלומד. כתוצאה מכך, דימוי המושג עלול לעמוד בסתירה להגדרתו המתמטית של המושג. למשל, כפי שתיארנו, דימוי המושג "קבוצה" מתייחס לאוסף של פריטים מאותו סוג שכולל לפחות שלושה איברים, למרות שבמתמטיקה קבוצה אינה בהכרח כוללת פריטים "מאותו סוג" ומספר איבריה יכול להיות גם שניים, אחד או אפס, כשמדובר בקבוצה ריקה. דימוי המושג "מספר" מתייחס לישות מתמטית המיוצגת באמצעות ספרות, ולתכונות "בין שני מספרים קיים יחס סדר", ו"מספרים מודדים או מייצגים כמות". למספרים מרוכבים אין בהכרח התכונות שציינו, ואמנם תלמידים רבים (שלמדו בכיתה י"ב אודות מספרים מרוכבים) טענו בטעות כי $i+1$ איננו מספר, וכי $3i$ גדול מ- $2i$. דימוי המושג "אלכסון" מתייחס לקטעים שאינם ניצבים לשולי הדף, לשולי הכביש (אל תחצה את הכביש באלכסון – עבור בקו ישר) או לקטעים המחברים שני קודקודים שאינם סמוכים במצולע ועוברים בתוכו. זו הסיבה שתלמידים פוסלים לעיתים קרובות את האלכסונים החיצוניים במצולעים קעורים.

ב. ניגודים בין הגדרה אישית לבין הגדרה פורמאלית – בהגדרה מתמטית נדרשים מאפיינים הכרחיים ומספיקים לייחוד המושג (ללא חוסרים וללא עודפים: לגבי מאפיין עודף, יש להוכיח שאינו עומד בסתירה למאפיינים ההכרחיים והמספיקים ששימשו בהגדרה). תלמידים נוטים לעיתים להגדיר את המושגים המתמטיים על פי המקובל בהגדרות ובתיאורי מונחים בחיי יום-יום – באופן מעגלי, תוך שימוש במושג המוגדר או במילים הנגזרות ממנו, ללא הקפדה על הכרחיות ומספיקות התנאים. למשל, תלמיד הגדיר מספר אי-זוגי "מספר שאיננו זוגי" ומספר זוגי "מספר שאיננו אי-זוגי". משתי ההגדרות אי אפשר להבין מהו מספר זוגי ומהו מספר אי-זוגי.

ג. מידור – במחקרים שונים נמצא כי תלמידים השיבו תשובות שונות לשאלות זהות שהוצגו בהקשרים שונים או שניתנו בייצוג שונה. למשל, תלמידים טענו כי בין כל שני שברים יש אינסוף שברים ובהמשך טענו כי אין מספרים נוספים בין 0.45 לבין 0.46 וכן כי יש 5 מספרים בין 0.32 לבין 0.37. חוקרים מסבירים שתלמידים נוהגים לאגור פיסות ידע שונות ב"מחלקות ידע נפרדות" (תופעת ה-compartmentalization) ואינם חשים בצורך לבחון את העקביות בין פיסות הידע השונות. תופעת

המידור גורמת למצבים בהם תלמידים חיים בשלום עם תפישות נכונות ושגויות כאחת (ולעיתים אף יותר מתפישה אחת שגויה) לגבי מושג מתמטי מסוים.

1.3 הסיבות לשגיאות על פי סתוי ותירוש – כללים אינטואיטיביים

סתוי ותירוש התייחסו לתגובות של תלמידים למטלות בנושאים מתמטיים ובנושאים מדעיים שונים, והבחינו בקיום מקורות משותפים לתפישות החלופיות של תלמידים במגוון רחב של נושאים (Stavy & Tirosh, 2000). מקורות אלה זוהו בהקשר למבנים דומים ומאפיינים משותפים של המטלות שניתנו. סתוי ותירוש הגדירו שלושה כללים אינטואיטיביים, תוך ניסיון להסביר חלק מהשגיאות שמצאו: "יותר מ-A, יותר מ-B", "שווה ב-A, שווה ב-B", ו"כל דבר ניתן לחצייה", והראו כי כללים אלה עומדים בבסיס תגובות תלמידים למטלות רבות.

א. "יותר מ-A, יותר מ-B" – בבדיקת השפעתו של הכלל האינטואיטיבי "יותר מ-A, יותר מ-B", הוצגו מטלות השוואה שבכל אחת מהן מתוארים שני עצמים (או שתי מערכות) השונים בתכונה בולטת מסוימת, A (כלומר $A_1 > A_2$). התלמידים התבקשו להשוות את שני העצמים או שתי המערכות בהתייחס לתכונה אחרת B (כאשר $B_1 = B_2$ או $B_1 < B_2$). במקרים אלה, מספר ניכר של תלמידים טענו כי יותר מ-A (התכונה השונה), יותר מ-B (התכונה עליה נשאלים התלמידים). במקרים רבים השימוש בכלל "יותר מ-A, יותר מ-B" הוביל לתשובות שגויות. דוגמאות לשגיאות מסוג זה ניתן למצוא, למשל, בתשובות: "כשהקרניים ארוכות יותר – הזווית גדולה יותר", "אם דני חוסך 20% ממשכורתו ויעל חוסכת 15% ממשכורתה, אז הסכום שחוסך דני גדול יותר מהסכום שחוסכת יעל כי האחוז גדול יותר", "0.234 גדול מ-0.45 כי 234 גדול מ- 45", ו- "10x גדול מ- 2x כי 10 גדול מ- 2".

ב. "שווה ב-A, שווה ב-B" – בבדיקת השפעתו של הכלל האינטואיטיבי "שווה ב-A, שווה ב-B", הוצגו מטלות שבכל אחת מהן מתוארים שני עצמים (או שתי מערכות) השווים בתכונה בולטת מסוימת, A (כלומר $A_1 = A_2$). התלמידים התבקשו להשוות את שני העצמים או שתי המערכות בהתייחס לתכונה אחרת B (כאשר $B_1 > B_2$ או $B_1 < B_2$). במקרים אלה, תלמידים רבים טענו כי שווה ב-A (התכונה השווה), שווה ב-B (התכונה שהתלמידים נשאלים עליה). גם השימוש בכלל "שווה ב-A, שווה ב-B" הוביל אנשים רבים בגילאים שונים לתשובות שגויות. דוגמאות לשגיאות מסוג זה ניתן למצוא, למשל, בתשובות: "אם שני מרובעים שווים בהיקפים שלהם אז גם השטחים שלהם שווים", "אם דני חוסך 20% ממשכורתו ויעל חוסכת 20% ממשכורתה, אז הסכום שחוסך דני שווה לסכום שחוסכת יעל כי האחוז שווה".

ג. "כל דבר ניתן לחצייה" – כלל אינטואיטיבי זה מתייחס לתשובות הניתנות לבעיה הבאה: מחלקים אובייקט כלשהו לשני חלקים שווים. לאחר מכן ממשיכים לחלק את אחד החצאים לשני חלקים שווים. ממשיכים לחלק באותו אופן. שואלים: האם תהליך החלוקה יסתיים? התשובה לבעיה זו תלויה בסוג האובייקט. אם האובייקט הוא מתמטי (ריבוע, קטע, מספר וכו'), התהליך לא יסתיים. אולם אם האובייקט הוא חומרי (דף נייר, חוט נחושת, שמן וכו') תהליך החצייה יסתיים כאשר החלוקה תגיע לרמה מולקולארית (או אטומית), כי לאחר מכן החומר מאבד את זהותו. בתגובה למטלות רבות של חצייה חוזרת בהתייחס לאובייקטים מתמטיים ולאובייקטים חומריים, נמצא שרוב התלמידים

הצעירים טענו לגבי כל מטלות החצייה כי התהליכים יסתיימו (שגיאות במטלות המתמטיות), ואילו התלמידים הבוגרים טענו בעקביות כי התהליכים לא יסתיימו כי "כל דבר ניתן לחצייה" (שגיאות במטלות החומריות).

החוקרות ציינו כי לומדים מתייחסים לתשובותיהם הניתנות ברוח הכללים האינטואיטיביים כאל מובנות מאליהן, וכי לשימוש בכללים התלוותה תחושת ביטחון. כאמור, מובנות מאליו ותחושת ביטחון הם שני מאפיינים עיקריים של החשיבה האינטואיטיבית על פי תורתו של פישביין. למעשה, לכללים יש מאפיינים נוספים של חשיבה אינטואיטיבית, והם מיידיות, גלובליות וכפייתיות.

סתוי ותירוש משערות כי השימוש בכללים נפוץ כל כך מפני ש- (א) פעמים רבות "זה עובד". כלומר, במצבים יומיומיים ובמצבים מדעיים רבים, תגובה המתבססת על כללים אלה מוליכה לעיתים קרובות לתשובה נכונה. למשל, שימוש מוצלח בכלל "יותר מ-A, יותר מ-B" ניתן לראות במקרים אם יש לך יותר כסף -- תוכל לקנות יותר, אם תלמד יותר – תדע יותר. שימוש מוצלח בכלל "שווה ב-A, שווה ב-B" ניתן לראות במקרים: אם יש לכם כמות כסף שווה -- תוכל לקנות את אותו מוצר, אם נולדתם באותו יום – אתם באותו גיל. (ב) הכללים האינטואיטיביים "שווה ב-A, שווה ב-B" ו- "יותר מ-A, יותר מ-B" מאפשרים תגובות ראשוניות על בעיות, הניתנות גם כאשר אין לאדם ידע פורמאלי על המצבים שהוא נשאל לגביהם. הכללים מזמנים קשר סיבתי/לוגי בין מרכיבים שונים של המערכת, ולכן יוצרים תחושות של הבנת המצב ותחושות של ביטחון לגביו.

נשאלת השאלה, האם רצוי להגביר את מודעות המורים לשגיאות אופייניות של תלמידים, לסיבות אפשריות לשגיאות אלה ולמסגרות תיאורטיות הבוחנות את השגיאות ואת סיבותיהם? אם כן, מדוע?

על כך בפרק א.5: "מילות סיכום, הערות והארות..."

2.א אילו סוגי שגיאות נוטים לומדים לעשות?

בפרק זה נבחן מיונים שונים שהציעו חוקרים לגבי שגיאות מתמטיות של תלמידים. בספרות מתוארים בעיקר שלושה סוגים של מיוני שגיאות של תלמידים במתמטיקה: מיוני שגיאות בנושאים מתמטיים ספציפיים, מיוני שגיאות המתייחסים לתפקוד מתמטי רחב, ומיוני שגיאות המתייחסים למקורות אפשריים של השגיאות. מיונים בודדים מציעים שילובים של השלושה.

באשר למיון שגיאות בנושאים מתמטיים ספציפיים, יצוין כי חוקרים רבים עסקו במיון שגיאות בחשבון ובמיפוי שגיאות של תלמידים במטלות חיבור, חיסור, כפל וחילוק מספרים שלמים (למשל, Ashlock, 1994 ראו סקירה אצל תירוש, 1996). מיונים נוספים שהתייחסו לשגיאות תלמידים בתחומים מתמטיים מובחנים, עסקו בנושאים כמו גיאומטריה, אלגברה, פונקציות, שברים וכו'. למשל, דרייפוס (1979) הציע מיון שסיווג את השגיאות על פי השתייכותם לגיאומטריה, לאלגברה (תחומי תוכן ספציפיים) או ללוגיקה (תחום מתמטי כללי). בגיאומטריה, דרייפוס הצביע על שגיאות שביטוין בקיום נקודות חיתוך או במיקומן, ובשגיאות שהן תוצר של מסקנות נומריות לא מוצדקות על סמך שירטוט. באלגברה הצביע, בין היתר, על שגיאות שביטוין בשימוש בכלל מתמטי מעבר לתחום הקיום שלו, ובשגיאות שהן תוצר של הכנסת פתרונות נוספים על ידי העלאת הדרגה של המשוואה. בלוגיקה הצביע, על שגיאות שמקורן בהכללה על-סמך דוגמאות, שגיאות הנובעות מהסתמכות על משפט הפוך (לא נכון) של משפט נכון ושגיאות הנובעות מהתבססות על הנחות בלתי עקביות.

בפרסומים קודמים (למשל, תירוש, תירוש, ברקאי, וצמיר,2003) נדונו שגיאות המתגלות בנושאים מתמטיים ספציפיים וסיבות אפשריות להן. בפרק זה ברצוננו להתמקד במיונים שנעשו תוך הסתכלות רחבה על שגיאות תלמידים במתמטיקה כתחום אחד (למשל, המיון על פי מובשוביץ-הדר, זסלבסקי וענבר: Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, & Inbar, 1987 ועל פי בוראסי, Borasi, 1994), ובמיונים שהתייחסו למקורות כלליים אפשריים לשגיאות מתמטיות (למשל, המיון על פי ווטסון: Watson, 1981 על פי בינברידג': Bainbridge, 1981; על פי הרשקוביץ וינר וברוקהימר, 1981 ; על פי רדאץ: Radatz, 1979). הסוג האחרון של המיונים מקשר בין התכנים המוצגים בפרק 1 "מדוע שוגים?" לבין התכנים המוצגים בפרק הנוכחי.

2.1 מיון שגיאות על פי מובשוביץ-הדר, זסלבסקי וענבר

מובשוביץ-הדר, זסלבסקי וענבר (Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, & Inbar, 1987) הציעו מיון של שגיאות תלמידים במבחני בגרות. במיון זה הוצגו שש קטגוריות של שגיאות: (א) שימוש בלתי ראוי במידע נתון, (ב) משמעות לשונית שגויה, (ג) הסקה לוגית בלתי תקיפה, (ד) פתרון "בלתי מאומת", (ה) שגיאות טכניות, ו – (ו) עיוות במשפט או הגדרה. לדעתנו, למרות שהסיווג מבוסס על ניתוח שגיאות תלמידים בחטיבה בעליונה, ניתן ליישמו גם בעבודה עם מורים בכיתות יסוד, עם סטודנטים להוראה ובעבודה עם תלמידים בכיתות אלה.

א. שימוש בלתי ראוי במידע נתון – החוקרים מנו שבעה סוגי משנה של שימוש כזה בנתון:

א.1. **הוספת מידע** – הסתמכות על מידע שאינו מצוין בבעיה ואינו נובע מיידית מהנתונים.

א.2. **התעלמות ממידע** – התעלמות מנתון או מקבוצת נתונים הנדרשים לצורך פתרון הבעיה, ו"פיצוי" על חסר המידע שנוצר באמצעות הוספת מידע בלתי רלוונטי.

א.3. **הוספת דרישה** – הוספה מפורשת של דרישה לחשב או להוכיח דבר מה שלא נדרש בבעיה.

א.4. **שינוי משמעות** – ייחוס משמעות שגויה לנתון מסוים. למשל, שימוש בתכונות של גובה של משולש בבעיה העוסקת למעשה בתיכון.

א.5. **הכתבת תנאים** – הכתבה של תנאים שאינם עולים בקנה אחד עם המידע הנתון. למשל, התייחסות אל קטע סתמי העובר בקודקוד זווית כאל חוצה זווית, או התייחסות אל האלכסון במקבילית כאל חוצה זווית.

א.6. **הצבה שגויה של ערכים** – שימוש שגוי בערכים של משתנה אחד עבור משתנה אחר. למשל, שימוש בערך מספרי נתון עבור דרך כערך נתון של מהירות.

א.7. **העתקה שגויה** – העתקה שגויה של פרטים מהספר או מדף הבחינה למחברת. למשל, כשנתון בבעיה שלילד 52 שקלים, והתלמיד מעתיק כי לילד 25 שקלים.

<u>דוגמא אI</u> <u>הבעיה</u>: דני בן 13 ואביו בן 33. בעוד כמה שנים יהיה גילו של האב כפול מגילו של דני? האם יש פתרון? האם הפתרון יחיד?

<u>הפתרון השגוי</u>: $15 + x = 33$

$x = 18$ בעוד 18 שנים האב יהיה בן 51. הפתרון יחיד

<u>ניתוח השגיאות</u>: התלמיד עוות את משמעות הנתון בעוד x שנים בכך שלא שינה את גיל האב ביחד עם גיל הבן (א.4.), התעלם מהנתון שגיל האב יהיה גדול פי 2 (א.2.), ציין שגיל האב יהיה 51 ובכך הוסיף דרישה (א.3.), והעתיק באופן שגוי את גילו של דני (א.7.).

<u>הפתרון הנכון</u>: $2\cdot(13 + x) = 33 + x$

$26 + 2x = 33 + x$

$x = 7$ בעוד 7 שנים יהיה גיל האב (40) כפול מגיל הבן (20).

קיים פתרון והוא יחיד.

<u>דוגמא אII</u> <u>הבעיה</u>: נתון מרובע שכל צלעותיו שוות באורכן ל- 10 ס"מ ואורך אחד האלכסונים גם הוא שווה ל- 10 ס"מ. מצא את היקף המרובע ואת שטחו.

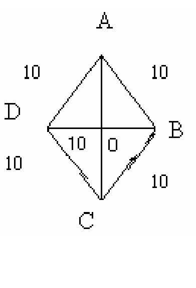
<u>הפתרון השגוי</u>: היקף המרובע 40 ס"מ = 10 ס"מ × 4

במרובע כל הצלעות שוות לכן הזוויות שוות, וגודלן 90 מעלות

לכן השטח: $10 \times 10 = 100$

<u>ניתוח השגיאות</u>: התלמיד התעלם מהנתון שאורך האלכסון 10 ס"מ (א.2.), והוסיף מידע בכך שדיבר על זוויות שוות וחישב שטח ריבוע (א.1.).

<u>הפתרון הנכון</u>: המרובע שמתקבל הוא מעוין שאינו ריבוע (הסבר מדוע). ניתן לחשב שטח מעוין על ידי שימוש בנוסחה: מחצית מכפלת האלכסונים. אלכסון אחד נתון ואורכו שווה ל- 10 ס"מ (BD=10). יש לחשב את אורך האלכסון השני (AC). האלכסונים במעוין חוצים זה את זה, ולכן נחשב את אורך הקטע AO. נעזר במשפט פיתגורס: $(AO)^2 = (AD)^2 - (DO)^2 = 10^2 - 5^2$, כלומר:



$AO = \sqrt{100-25} = \sqrt{75}$. לכן שטח המעוין ABCD: $S = 10 \times \sqrt{75} = 50\sqrt{3}$

ב. משמעות לשונית שגויה – בקטגוריה זו נכללות שגיאות הנובעות מתרגום מוטעה של עובדות מתמטיות המתוארות בייצוג אחד (למשל, מילולי, גראפי או סימבולי) לאחר (למשל, מילולי, גראפי או סימבולי). החוקרים הצביעו על שלושה סוגים של ייחוס משמעות לשונית שגויה לנתונים.

ב.1. **מייצוג מילולי לייצוג סימבולי** – תרגום של ביטוי מייצוג מילולי לייצוג מתמטי, סימבולי שגוי. למשל, בניית משוואה המייצגת יחס שונה מהיחס המתואר מילולית בבעיה.

ב.2. **שימוש בסמל בשתי משמעויות** – סימון נתון מסוים באמצעות אות או סימן המשמש, בדרך כלל, לסימון מושג שונה. לאחר מכן הלומד מתייחס בטעות לאות או לסימן בהתאם למשמעות הרווחת שלו.

ב.3. **קישור בין ייצוג גראפי לבין מונחים מתמטיים** – פירוש מתמטי שגוי לסימונים גראפיים או להיפך, סימון גראפי שגוי לנתונים מתמטיים (למשל, סימון הנקודה (3;0) במערכת צירים קרטזית, בגובה 3 יחידות על ציר ה- y).

דוגמא בI דני בן 13 ואבא בן 33. בעוד כמה שנים יהיה גילו של אבא כפול מגילו של דני?

הפתרון השגוי: $15 + x = 33$

$x = 18$ בעוד 18 שנים האב יהיה בן 51

המשך ניתוח השגיאות: בנוסף לשגיאות שזוהו קודם לכן, התלמיד לא הבין שכאשר הבן והאב מתבגרים, אותו מספר שנים עובר על הבן ועל האב ובנה משוואה לפיה רק הבן מתבגר ב- x שנים וגיל האב איננו גדול פי 2 (ב.1.).

דוגמא בII משקלה של חבית מלאה יין הוא 65 ק"ג. משקל החבית הריקה 15 ק"ג. (1) מה משקלן של 5 חביות מלאות יין? (2) מה משקלן של 10 חביות יין מלאות למחצה?

הפתרון השגוי: (1) משקלן של 5 חביות מליאות יין $325 = 5 \times 65$ ק"ג

(2) משקלן של 10 חביות מלאות למחצה $325 = 10 \times ½ \times 65$ ק"ג

ניתוח השגיאות: פתרון (2) צריך להיות $10 \times [½ \times (65-15) + 15]$ התלמיד תרגם את הביטוי "עשר חביות מליאות למחצה" כלומר, 10 חביות שבכל אחת מחצית כמות היין, כאילו היה "עשר חצאים של חביות יין מליאות" כלומר, 5 חביות מליאות של יין (ב.1.).

ג. הסקה לוגית בלתי תקיפה – בקטגוריה זו נכללות שגיאות שנובעות מהיקשים לוגיים שגויים, ללא קשר לתוכן מתמטי מסוים. כלומר, הסקה שגויה של מידע ממידע נתון או ממידע שהתקבל במהלך הפתרון. בין סוגי השגיאות שנכללו בקטגוריה זו היו:

ג.1. מכך ש **a גורר b** מסיקים באופן שגוי ש **b גורר a**, או שכך ש **a גורר b** מסיקים באופן שגוי ש- **שלילת a גוררת שלילית b.**

ג.2. **שימוש שגוי בכמתים** כמו "לכל" "קיים" או "לפחות".

ג.3. הפעלת שורה של צעדים מנומקים הכוללת **"קפיצה" בלתי מנומקת** או צעד שגוי.

דוגמא גI דני בן 13 ואבא מבוגר ממנו לפחות ב- 25 שנים. סבא בן 78 ואבא צעיר ממנו ב- 30 שנים לפחות. השנה אבא חוגג מספר שלם של עשורים (למשל, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90). בן כמה אבא?

הפתרון הנכון: $78 - 30 \geq x \geq 13 + 25$

$48 \geq x \geq 38$

$x = 40$ האב בן 40 שנה.

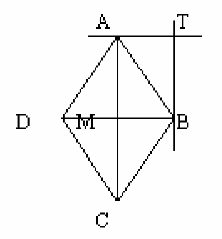
הפתרון השגוי: $x = 13 + 25$

$x = 38$

האב בן 30 כי זה 3 עשורים שלמים, פחות מ-38

ניתוח השגיאות: בנוסף לשגיאות של התעלמות מהמידע לגבי גיל הסב (שגיאה א.2.), ובניית תבנית פסוק שאינה מתאימה (ב.1.), יש בפתרון זה התייחסות שגויה לכמת "לפחות" (ג.2.).

דוגמא ג.II נתון מעוין ABCD ונקודה M היא נקודת מפגש האלכסונים (AC ו- BD).



העבירו דרך נקודה A ישר מקביל לאלכסון BD.

העבירו דרך נקודה B ישר מקביל לאלכסון AC.

הישרים המקבילים נחתכים בנקודה T. הוכח: ATBM מלבן.

הפתרון השגוי: ATBM מקבילית כי נתון $AT \parallel MB$ ו- $TB \parallel AM$ כלומר, זהו מרובע בעל שני זוגות של צלעות מקבילות, לכן הזוויות הנגדיות שוות 90 מעלות. מסקנה – ATBM מלבן.

ניתוח השגיאות: יש בפתרון "קפיצה" משני זוגות של צלעות מקבילות ל"זוויות נגדיות שוות 90 מעלות" בלי שצוינה ניצבות האלכסונים במעוין, ולהסקה שזהו מלבן (בלי לציין את הזווית הישרה) (ג.3.).

דוגמא ג.III הכיתה התבקשה לבנות טענה העוסקת ב- "סכום כל שני מספרים המתחלקים ב-3..." ולהוכיח או להפריך את תקיפותה.

הפתרון השגוי: הטענה – סכום כל שני מספרים המתחלקים ב- 3 מתחלק גם הוא ב-3. ההוכחה – למשל, 69 ו- 120 מתחלקים ב-3 וסכומם 189 גם מתחלק ב-3. טענה נוספת שאפשר להסיק, היא שאם הסכום מתחלק ב-3 אז המספרים המחוברים מתחלקים ב- 3. ומסקנה אחרת היא, שאם המספרים לא מתחלקים ב-3 אז גם הסכום לא מתחלק ב-3.

ניתוח השגיאות: דוגמא אחת אינה מספיקה להוכחת טענה מטיפוס "לכל" (ג.2.) ושתי הטענות שמוצגות כנובעות מהטענה הראשונה אינן תקפות (דוגמא נגדית לטענה ראשונה – הסכום 9 מתחלק ב-3 והמחוברים 7 ו- 2 אינם מתחלקים ב-3, זו גם דוגמא נגדית לטענה שנייה – 7 ו-2 אינם מתחלקים ב-3, אבל סכומם -9 מתחלק ב- 3). (ג.1.).

ד. **פתרון "בלתי מאומת"** – בקטגוריה זו נכללות שגיאות שנובעות מכך שהתלמיד לא בדק את התוצאה מול המטלה. כל אחד מהצעדים שבצע התלמיד במהלך הפתרון הוא צעד נכון, אבל הפתרון אינו נותן מענה לדרישות שהוצגו בבעיה.

דוגמא ד נתון: $ax + 25 = 5(x-12) + bx$

בטא את x באמצעות a ו- b

הפתרון השגוי: $ax - bx = 5(x - 12) - 25$

$$x = \frac{5x - 85}{a - b}$$

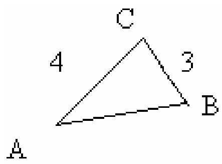
ניתוח השגיאה: למרות שמתמטית השוויון נכון, המשתנה x מופיע משני צדי השוויון, ולא קבלנו $x = f(a,b)$ כנדרש.

ה. שגיאות טכניות – בקטגוריה זו נכללות שגיאות חישוב, שגיאות בשליפת מידע מטבלאות, השמטות לא זהירות של סוגריים וכד׳.

ו. עיוות במשפט או הגדרה – שגיאות שסווגו בקטגוריה זו היו שכיחות ביותר והן נדונו במאמר נוסף (Movshovitz-Hadar, Inbar & Zaslavsky, 1986). בקטגוריה זו נכללות, למשל, שגיאות הנובעות מיישום טענה בתנאים לא מתאימים, כלומר, התנאים בטענה המוצגת שונים מאלו המופיעים במשפט. למשל, במשפט ״במשולש, כאשר כל הצלעות שוות גם כל הזוויות שוות״, השמטת התנאי לגבי ״משולש״ והחלת המשפט לגבי משושה, או שימוש במשפט פיתגורס במשולש שאיננו ישר זווית.

דוגמא ו: נתון משולש ABC . אורך הצלע AC הוא 4 ס״מ, אורך הצלע BC היא 3 ס״מ.

האם ייתכן כי אורך הצלע AB הוא 8.5 ס״מ? 7.5 ס״מ? 6.5 ס״מ? הסבר את תשובתך.



הפתרון השגוי: אף אחת מהתשובות אינה נכונה.

אורך הצלע הוא 5 ס״מ. לפי משפט פיתגורס מתקיים כי:

$AB^2=4^2+3^2=16+9=25$. מכאן נובע כי $\overline{AB}=5$. כלומר, אורך צלע AB הוא 5 ס״מ.

ניתוח השגיאה: שימוש במשפט פיתגורס כאשר לא נתון שהמשולש הוא ישר זווית.

במקרה זה יש להשתמש במשפט: ״במשולש, סכום כל שתי צלעות גדול מהצלע השלישית״.

2.2 מיון שגיאות על פי בוראסי

בוראסי מציגה סוגים שונים של שגיאות שנמצאו אצל תלמידים בביצוע משימות מתמטיות:

א. שגיאות חישוביות

דוגמא א דני קנה 8 חפיסות שוקולד. מחיר חפיסה 7 ₪. כמה עודף קיבל אם נתן 100 ₪?

הפתרון השגוי: $100 - (8 \times 7) = 100 - 54 = 46$

ניתוח השגיאה: התלמיד שגה בחישוב 7×8 וקיבל 54 במקום 56.

ב. תוצאה שגויה, תוצאה חלקית

דוגמא ב הבעיה מדוגמא א.

פתרון שגוי 1: $8 \times 7 =$ 56 ₪

ניתוח השגיאה: התלמיד חישב את עלות השוקולד ולא השלים את הפתרון, כי לא חישב את העודף.

פתרון שגוי 2: $100 - (8 \times 7) =$ 56 ₪

ניתוח השגיאה: התלמיד הציב תבנית מספר נכונה, אולם חישב רק חלק ממנה. הוא לא השלים את הפתרון.

ג. הגדרה שגויה, הגדרה חלקית

דוגמא ג הגדר מקבילית וטרפז שווה שוקיים.

פתרון שגוי 1: מקבילית היא מרובע בעל זוג צלעות מקבילות וזוג צלעות שוות.

פתרון שגוי 2: טרפז שווה שוקיים הוא מרובע בעל זוג צלעות מקבילות ושוות.

<u>ניתוח שגיאה 1</u>: מרובע בעל זוג (אחד) של צלעות מקבילות וזוג (אחר) של צלעות שוות אינו בהכרח מקבילית. תיקון אפשרי להגדרה: "מרובע בעל זוג אחד של צלעות שוות ומקבילות", כלומר אותו זוג מקיים הקבלה ושוויון (יש כמובן הגדרות אחרות).

<u>ניתוח שגיאה 2</u>: מרובע בעל זוג צלעות מקבילות ושוות הוא מקבילית ולא טרפז. על פי ההגדרה המקובלת לטרפז זוג אחד של צלעות מקבילות ובטרפז שווה שוקיים, זוג אחד של צלעות מקבילות וזוג אחר של צלעות שוות.

ד. הנחה שגויה, הנחה חלקית

<u>דוגמא דI</u> נתונים שני מספרים – a ו- b. סכום הספרות בכל אחד מהמספרים מתחלק ב-6. סכום הספרות של מכפלת המספרים $(a\times b)$ מתחלקת ב __________

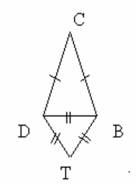
<u>פתרון שגוי</u>: סכום הספרות של מכפלת המספרים $(a\times b)$ מתחלקת בשש.

אם סכום הספרות של מספר a מתחלק ב- 6 אז המספר מתחלק ב- 6. באותו אופן, אם סכום הספרות של מספר b מתחלק ב- 6 אז המספר מתחלק ב-6. מכפלת שני מספרים שמתחלקים בשש, גם היא תתחלק בשש. לכן סכום הספרות שלה גם הוא יתחלק בשש.

<u>ניתוח השגיאה</u>: ההנחה שאם סכום הספרות מתחלק בשש אז המספר מתחלק בשש – שגויה. (דוגמא נגדית, 15 שאינו מתחלק בשש, אבל סכום ספרותיו 6). גם ההנחה ההפוכה שאם מספר מתחלק בשש אז סכום ספרותיו מתחלק בשש שגויה (דוגמא נגדית, 54 מתחלק בשש, אבל סכום ספרותיו 9 אינו מתחלק).

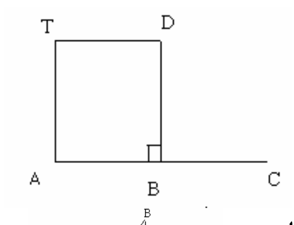
<u>דוגמא דII</u> נתון משולש BCD ידוע CD=BC ועל צלע BD בנו משולש שווה צלעות BDT. התקבל מרובע BCDT. מהו המרובע שהתקבל?

<u>פתרון שגוי</u>: זהו מעוין, כי כל הצלעות שוות. CD=BC אז משולש BCD הוא שווה צלעות והוסיפו עוד שתי צלעות שוות. כל הצלעות שוות.



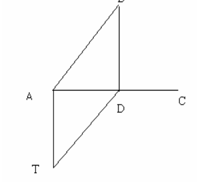
<u>ניתוח השגיאה</u>: משולש BCD הוא שווה שוקיים ולא בהכרח שווה צלעות. ההנחה שאם CD=BC אז משולש BCD הוא משולש שווה צלעות, שגויה. המרובע הוא דלתון.

<u>דוגמא ד.III</u> נתון: BD אנך אמצעי לקטע AC העבירו דרך נקודה A קטע AT כך ש AT||BD והעבירו דרך נקודה D קטע DT כך ש- AB||DT. איזה מרובע הוא ABDT ?



<u>הפתרון השגוי</u>: ABDT מקבילית כי נתון AT||BD ו- AB||DT כלומר, זהו מרובע בעל שני זוגות של צלעות מקבילות, לכן הזוויות הנגדיות שוות 90 מעלות. מסקנה – ABDT מלבן.

<u>ניתוח השגיאות</u>: יש בפתרון הנחה שגויה שנקודה B על קטע AC, ולכן זהו מקרה פרטי. בנוסף, יש "קפיצה" משני זוגות של צלעות מקבילות ל"זוויות נגדיות שוות 90 מעלות" ולהסקה שזהו מלבן (בלי לציין את הזווית הישרה) (ג.4.). השרטוט יכול להיות גם כך:



ה. אלגוריתם שגוי

<u>דוגמא ה</u> תלמידים התבקשו לחשב: $10-5\times[10-5\times(10-5)]$

פתרון שגוי: $125= \quad [5\times5] \times 5 = [(10-5)\times5]\times5 = [(10-5)\times5-10]\times5-10$

ניתוח השגיאה: התלמיד לא עבד לפי סדר פעולות החשבון. הפתרון הנכון:

$10-5\times[10-5\times(10-5)] = 10-5\times[10-5\times(5)] = 10-5\times[10-25] = 10-5\times[-15] = 10+75=85$

ו. הסברים שגויים / הסברים שאינם מספקים (אפילו לתשובה נכונה)

דוגמא ו מי גדול יותר $(\frac{1}{2})^4$ או $(\frac{1}{3})^2$?

פתרון שגוי: שלוש גדול מ-2, לכן שליש גדול מחצי. החזקות אינן משנות את היחס הזה. ולכן $(\frac{1}{2})^4 < (\frac{1}{3})^2$.

ניתוח השגיאה: ההסבר שגוי. שליש אינו גדול מחצי. למרות זאת, המסקנה נכונה. $(\frac{1}{2})^4$ שווה ל- $(\frac{1}{4})^2$ וכיוון שרבע קטן משליש, $(\frac{1}{4})^2$ קטן מ- $(\frac{1}{3})^2$. דרך אחרת להסביר זאת היא:

$(\frac{1}{2})^4=1/16$ ו- $(\frac{1}{3})^2 = 1/9$ ו- $1/9>1/16$, לכן $(\frac{1}{4})^2$ קטן מ- $(\frac{1}{3})^2$.

ז. קבלת פתרונות סותרים

דוגמא ז מי גדול יותר $(-1)^{123}$ או $(-1)^8$?

פתרון שגוי: $(-1)^{123}$ גדול יותר כי 123 גדול יותר וכפלנו יותר פעמים. גם מספר שלילי בחזקה זוגית הוא מספר חיובי ומספר שלילי בחזקה אי-זוגית הוא מספר שלילי.

ניתוח השגיאה: $(-1)^{123}$ קטן מ- $(-1)^8$. התלמיד צדק כי מספר שלילי בחזקה זוגית הוא מספר חיובי ומספר שלילי בחזקה אי-זוגית הוא מספר שלילי, וזהו הבסיס לפתרון. השיקול 123 גדול מ-8 אינו רלוונטי, והשימוש בשיקול זה הטעה. מעבר לכך, סך כל הדברים שהציג התלמיד הוליכו לפתרונות סותרים.

ח. העברה, ללא הצדקה, של תכונות או הגדרות להקשר שונה

דוגמא ח מי גדול יותר ½ או 1/3 ?

פתרון שגוי: שליש גדול יותר. בגלל השלוש.

ניתוח השגיאה: התלמיד התבסס באופן שגוי על המספרים הטבעיים.

ט. קבלת עובדות או תוצאות שאינן הגיוניות

דוגמא ט 75 תלמידי כיתות ד' יוצאים לטיול. המורה הזמינה שני אוטובוסים (בכל אוטובוס יש 44 מקומות ישיבה). כמה תלמידים תושיב בכל אוטובוס?

פתרון שגוי 1: $75 : 2 = 37$ ½

ניתוח השגיאה: ראשית, לא תיתכן תוצאה של "חצי תלמיד". התלמיד ששגה התייחס לבעיה כאילו נתון שיש להושיב מספר שווה של תלמידים בכל אוטובוס. כיוון שאין דרישה כזו, ניתן להושיב באוטובוס אחד 40 תלמידים ובשני 35 תלמידים. יש כמובן אפשרויות נוספות. אפשר לדבר עם התלמידים על מספר האפשרויות (על פי כמות המחוברים, ומעט לסבך זאת על פי זהות התלמידים).

פתרון שגוי 2: תלוי כמה תלמידים יש בכל כיתה. למשל אם בכיתה ד'1 יש 45 תלמידים ובכיתה ד'2 יש 30 תלמידים אז המורה תושיב את תלמידי ד'1 באוטובוס אחד ואת תלמידי ד'2 באוטובוס שני. תלמידים לא אוהבים לטייל עם כיתה אחרת.

ניתוח השגיאה: תלמיד זה לא התייחס לאילוצי השאלה לגבי מגבלת (44) מקומות הישיבה שיש באוטובוס. במקום לקחת בחשבון את האילוצים הכמותיים, היה עסוק באילוצים החברתיים שאינם רלוונטיים לפתרון.

דוגמא טII 567 תלמידי בית ספר רננים יוצאים לטיול. על אחת המורות הוטל להזמין אוטובוסים. בכל אוטובוס יש 44 מקומות ישיבה. כמה אוטובוסים תזמין?

פתרון שגוי: 567:44=12.886363636363636363636363636363 כלומר 12 אוטובוסים

ניתוח השגיאה: ברור שב- 12 אוטובוסים לא ייכנסו כל התלמידים. יש להזמין 13 אוטובוסים.

י. מגיעים לתוצאות נכונות בדרכים לא יעילות

דוגמא י (דוגמא טII מסעיף קודם) 567 תלמידי בית ספר רננים יוצאים לטיול. על אחת המורות הוטל להזמין אוטובוסים. בכל אוטובוס יש 44 מקומות ישיבה. כמה אוטובוסים תזמין?

פתרון לא יעיל: 567 - 44 = 523, 523 - 44 = 479, 479 - 44 =435, 435- 44=391,
391 - 44=347, 347- 44=303, 303 - 44=259, 259 - 44=215, 215 - 44=171,
171- 44= 127, 127- 44=83, 83 - 44=39

מסקנה: יהיו 12 אוטובוסים עם 44 תלמידים ועוד אוטובוס. באוטובוס האחרון יהיו 39 תלמידים.

ניתוח: ברור שהתהליך **נכון** ואין מקום לשייך פתרון בלתי יעיל לקבוצת הפתרונות השגויים. אך, על פי בוראסי, הפעלת "חיסור חוזר" במקום חילוק עלולה להיות מאוד לא יעילה כאשר המחולק גדול משמעותית מהמחלק (למשל, 2.2 : 19766317). לעיתים, אלגוריתם זה אינו ישים, למשל, כשהמחולק קטן מהמחלק כמו בתרגיל 11.35 : 0.7. במקרים רבים, במהלך אלגוריתם בלתי יעיל נוצרת שגיאה.

יא. שגיאות בתהליך שמוליכות לתוצאות נכונות

דוגמא יאI חשבו: 2^2

פתרון שגוי: חזקה היא חיבור מקוצר, לכן, $2^2 = 2+2 = 4$

ניתוח השגיאה: התייחסות שגויה לפעולת החזקה כ"חיבור מקוצר" במקום מה שמקובל בהגדה הראשונית (כאשר המעריך טבעי, לפני הרחבה), כפל הבסיס בעצמו כמספר הפעמים שמורה המעריך -- $2^2 = 2\times2=4$. אולם, התוצאה נכונה.

דוגמא יאII חשבו: $\frac{15^4}{15^2} =$

פתרון שגוי: $\frac{15^4}{15^2} = 15^{4:2} = 15^2$

ניתוח השגיאה: התייחסות שגויה לפעולת חילוק חזקות בעלות בסיסים זהים. במקום לחסר את המעריכים, חילק התלמיד את המעריכים.

דוגמא יאIII תלמידים התבקשו לחשב: $9-5\times[9-5\times(9-5)]$

פתרון שגוי: $9-5\times[9-5\times(9-5)] = 4\times[9-5\times(9-5)] = 4\times[4\times(9-5)] = 4\times4\times4 = 64$

ניתוח השגיאה: התלמיד לא עבד לפי סדר פעולות החשבון. אולם, למרבה הפליאה, למרות השגיאה, התוצאה נכונה. הפתרון הנכון:

$9-5\times[9-5\times(9-5)]= 9-5\times[9-5\times(4)]= 9-5\times[9-20] = 9-5\times[-11] = 9+55=64$

יב. הוכחה שגויה / הוכחה חלקית (למשפט נתון)

דוגמא יב האם $\frac{5+a^2}{5+a}=a$ עבור $a \neq (-5)$? הוכח את קביעתך.

פתרון שגוי: כן. $\frac{5+a^2}{5+a}=a$ לכל $a \neq (-5)$.

החמש מצטמצם במונה ובמכנה. a^2 מצטמצם עם a. ונשאר a. אפשר גם להציב ולראות במספרים. אם למשל, a=1 מקבלים 6 במונה ו- 6 במכנה, לכן המנה 1.

ניתוח השגיאה: התייחסות שגויה ל"צמצום" כאשר יש פעולת חיבור במונה ובמכנה, ובחירת דוגמא בלתי מייצגת לשם הוכחה כללית.

יג. צעד ניסיוני שגוי במהלך בדיקת דרכים להתרת בעיה חדשה

דוגמא יג האם חוק החילוף מתקיים בחזקות?

פתרון שגוי: חוק החילוף מתקיים בחיבור a+b=b+a למשל, 4+2=2+4

חוק החילוף אינו מתקיים בחיסור a-b=b-a למשל, $2-4\neq4-2$

חוק החילוף מתקיים בכפל (שהוא חיבור מקוצר) $a\times b=b\times a$ למשל, $2\times4=4\times2$

חוק החילוף אינו מתקיים בחילוק a:b=b:a למשל, $2:4\neq4:2$

כיוון שחזקה היא כפל מקוצר, חוק החילוף מתקיים בחזקה $a^b=b^a$ למשל, $4^2=2^4$

ניתוח השגיאה: המסקנה לגבי החזקה מתבססת על הזיקה שיש בין ההגדרה הראשונית של כפל וחיבור ובין ההגדרה הראשונית של חזקות וכפל. ומקבלת חיזוק שגוי מדוגמא בודדת שעבורה חוק החילוף "מתקיים".

2.3 מיון שגיאות על פי ווטסון

ווטסון מייחס חשיבות רבה לראיונות אישיים דיאגנוסטיים עם תלמידים (Watson, 1981). הוא ממליץ להשתמש בראיונות אלה במיפוי שגיאות המתבסס על עבודתו של ניומן (Newman, 1997 אצל Watson, 1981). ניומן מיין את שגיאות תלמידי כיתות ו' בעת התרת בעיות מתמטיות. הוא התייחס לחמישה שלבים בפתרון בעיה מתמטית: קריאה, הבנה, העברה, מיומנויות עבודה וקידוד והציע מיון שגיאות שהתבסס על זיהוי השלב בו התרחשה השגיאה.

ווטסון מציע עידון ופירוט למיון השגיאות של ניומן וכינה אותו 'מיון של קריטריונים לגורמי שגיאות' (Criterion for error causes). לטענתו, תפקוד לקוי באחד השלבים האלה גורם לתלמיד לשגות.

א. שגיאות הנובעות ממגבלות ביכולת קריאה – התלמיד מתקשה לקרוא את הבעיה. הקשיים עלולים להתגלות בקריאת הטקסט או בקריאת הסמלים המתמטיים (או בשניהם).

ב. שגיאות הנובעות ממגבלות בהבנת הנקרא – התלמיד מתקשה או אינו מבין את הבעיה, בשל חוסר הבנה כללית, או בשל חוסר הבנה של מונחים וסמלים ייחודיים.

ג. שגיאות הנובעות ממגבלות ביכולת העברה – התלמיד מתקשה בבחירת המהלכים המתמטיים הדרושים לשם התרת הבעיה.

ד. שגיאות הנובעות מחסכים במיומנויות עבודה – התלמיד אינו מסוגל לבצע את המהלכים המתמטיים הדרושים לשם התרת הבעיה, ולכן הוא מציג תשובה אקראית, תשובה המתבססת על שיקולים שגויים, על אלגוריתמים שהפעיל באופן שגוי, או שלא השיב כלל.

ה. שגיאות הנובעות מחסכים בתרגום או בקידוד – התלמיד אינו מסוגל לכתוב את הפתרון בצורה קבילה מתמטית.

בנוסף לקטגוריות של השגיאות המתייחסות לשלבים בהתרת בעיות, מצביע ווטסון על שלושה סוגים נוספים של שגיאות שאין להם ביטוי מיוחד בשלב מסוים של העבודה. כל אחד מסוגי שגיאות אלה עלול להופיע בכל אחד מחמשת השלבים שתוארו קודם לכן.

ו. שגיאות שמקורן בחוסר מוטיבציה –התלמיד אינו משתדל מספיק לפתור את הבעיה.

ז. שגיאות שמקורן ברשלנות – התלמיד מבצע את כל השלבים הדרושים לשם התרת הבעיה, אך תוך כדי עבודה עושה שגיאה בשל חוסר תשומת לב מספקת, ואין סבירות להישנותה.

ח. שגיאות שמקורן בייצוג גרוע של הבעיה –ייצוג הבעיה "מזמין" שגיאה (למשל,ניסוח מעורפל).

2.4 מיון שגיאות על פי בינברידג'

בדומה לווטסון, ביינברידג' (Bainbridge, 1981) מצהיר כי הוא רואה חשיבות לכך שמורים בבית ספר יסודי יכירו שגיאות אופייניות של תלמידים וידעו לנתח ולמיין את השגיאות תוך התייחסות לדרכי החשיבה של השוגים. במאמרו הוא מציע מיון המסווג את השגיאות המתמטיות לפי קטגוריות המתייחסות למקורות הקושי של הלומדים:

א. חוסר יכולת לקרוא את השאלה – תלמידים בכיתות יסוד מתקשים בקריאת השאלה, ומתקשים לכן גם בהתרתה.

ב. חוסר יכולת לפרש את השאלה – תלמידים המסוגלים לקרוא את הבעיה, אבל אינם מסוגלים לפענח מה נתון ומה נדרש מהם לעשות. חסכים אלה מקשים על פתרון הבעיה.

ג. חוסר הבנה של מונח מתמטי – תלמידים שאינם יכולים לפתור בעיה, בשל מונח שאינו ידוע להם. למשל, תלמידים שהתבקשו "פתרו באמצעות חילוק ארוך", אך אינם יודעים מהו חילוק ארוך.

ד. הבנה לקויה של מושג – תלמידים אשר נתקלים במושג מתמטי שאינו ידוע להם, אולם הם מאמינים בטעות שהמושג מוכר להם. כיוון שהם מייחסים למושג משמעות שגויה, יתירו את השאלה באופן שגוי. למשל, תלמידים הפותרים בעיות בגיאומטריה ומתייחסים לתיכון הנתון בבעיה כאל גובה, או אל מרובע הנתון בבעיה כאל ריבוע, יתירו את הבעיות שבהן מופיעים המושגים באופן שגוי.

ה. קושי בחישוב מדויק – שגיאות מסוג זה יופיעו למשל, אצל תלמידים המתקשים לעבוד עם מספרים גדולים או אצל תלמידים שאינם שולטים בלוח הכפל.

ו. רשלנות – בקטגוריה זו נכללות שגיאות שנעשות בהיסח הדעת. למשל, שגיאות חישוב, העתקה שגויה של נתונים מהבעיה לפתרון, שגיאות בשליפת מידע מטבלאות, השמטה לא זהירה של סוגריים, או העתקה רשלנית משורה לשורה במהלך הפתרון.

ז. חוסר יכולת ליישם או להעביר את הנלמד להקשרים אחרים – לדוגמא, תלמיד היודע לחשב את ממוצע ציוניו אך מתקשה לענות על בעיות העוסקות בחישוב ממוצעים בשיעורי עיבוד נתונים.

2.5 מיון שגיאות על פי הרשקוביץ, וינר וברוקהימר

וינר, הרשקוביץ וברוקהימר (Vinner, Hershkowitz, & Bruckheimer, 1981) הציגו מיון ממוקד שהתייחס לשגיאות תלמידים בחיבור שברים. במיון זה פורטו נטיות הלומדים לחבר שברים תוך (א) התעלמות מהצורך לחשב מכנה משותף, (ב) עשיית מכנה משותף שגוי והתעלמות מהצורך לשמור על שקילות השברים, (ג) ניסיון שגוי לעשות מכנה משותף ולשמור על שקילות השברים, ו-(ד) הצגת פיתרון נכון. כתוצאה מעבודתם על מיון שגיאות בשברים פשוטים הציעו שלושת החוקרים קטגוריזציה מוכללת של השגיאות שמצאו (הרשקוביץ, וינר וברוקהיימר, 1981).

א. שיחזור מטעה של פרטים – כאשר הזיכרון בוגד. תלמיד זוכר, למשל, כי באלגוריתם של חיבור שברים מופיע חיבור וכפל או שניהם ולא ברור לו היכן ובאיזה סדר. בעת שחזור מוטעה של פרטים, מנסים תלמידים להפעיל בעיקר הזיכרון וזאת, בניגוד לסוגים אחרים של שחזורים שבהם יש תפקיד משמעותי לשיקולים לוגיים, אנאלוגיות וכו׳.

ב. זיהוי מוטעה – תלמיד מיישם אלגוריתם המתאים למצב מסוים במצב שאינו מתאים, כיוון שלדעתו זה אותו מצב.

ג. אנאלוגיה מוטעית – תלמיד מיישם אלגוריתם המתאים למצב מסוים במצב אחר אשר אינו מתאים, למרות שברור לו כי המצב שונה. לדעתו ניתן להקיש מהמצב הקודם למצב הנוכחי. למשל, תלמיד המסביר כי "בכפל שברים כופלים את המונים ואת המכנים בהתאמה. לכן, בחיבור שברים מחברים את המונים ואת המכנים בהתאמה".

ד. מתן משמעות מוטעית לסמלים – למשל, אם תלמיד טוען כי $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ וכי $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, כדאי לדבר איתו על "השבר כמספר" וגם על "השבר כמייצג כמות".

2.6 מיון שגיאות על פי רדאץ

רדאץ (Radatz, 1979) הציע מיון שגיאות המתבסס על עיבוד מידע תוך ניסיון להתייחס לשונות בין תלמידים. הוא הדגיש כי שגיאות מושפעות ממשתנים שונים הקשורים בלומד וממשתנים הקשורים בתהליך החינוכי (למשל, המורה, תכנית הלימודים, הסביבה הלימודית). רדאץ ממיין את השגיאות באופן הבא:

א. שגיאות הנובעות מקשיים בקבלת מידע הקשור לתפיסה מרחבית – מחקרים הראו שייצוג ויזואלי של מצבים מתמטיים עלול לעורר בעיות רבות בתהליכי עיבוד מידע. למרות שלקושי זה יש ביטוי רב בלמידת גיאומטריה, אין זה הנושא המתמטי היחיד בו צפוי ביטוי לקושי בתפיסה המרחבית. קשיים עלולים להתגלות למשל, בהתייחס לייצוג גרפי של בעיות ומצבים מתמטיים באמצעות דיאגראמות שונות (כמו דיאגרמת עמודות, דיאגרמת וואן).

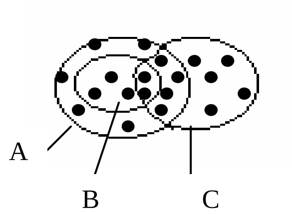
<u>הבעיה</u>**:** נתונות 3 קבוצות A, B ו- C . כל קבוצה מכילה מספר נקודות שחורות.

הקבוצות מוצגות על ידי דיאגרמת ואן (ראה שרטוט)

מצאו את מספר הנקודות השחורות בקבוצות הבאות:

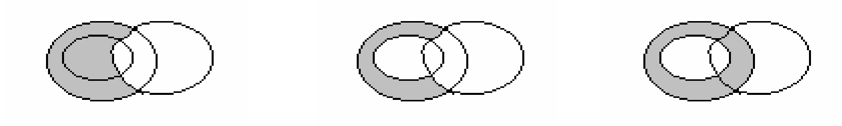
א. A ב. C ג. $B\cup C$

ד. $C\cap A$ ה. B/A

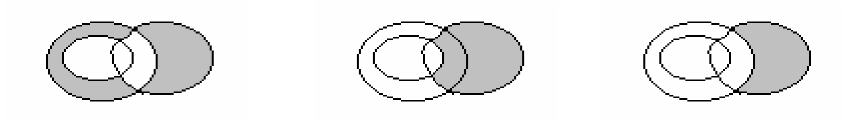


__פתרונות שגויים__ של תלמידים למטלה זו. החלק הצבוע מציג את הקבוצה אליה התייחסו התלמידים :

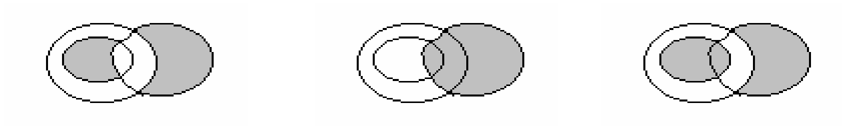
א. A



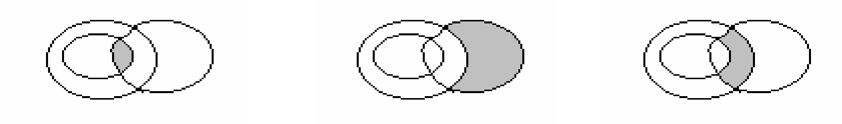
ב. C



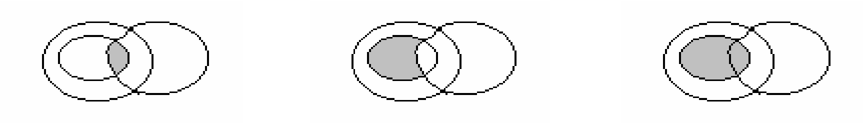
ג. $B \cup C$



ד. $C \cap A$



ה. B/A



ב. שגיאות הנובעות מחוסר שליטה במיומנויות, עובדות ומושגים שנלמדו בעבר – קשיים בשל חסכים תלויי תוכן ותלויי סוג מסוים של בעיות, אשר לצורך פתרונן נדרשים ידע ומיומנות ספציפיות.

ג. שגיאות הנובעות מאסוציאציות מוטעות ומקיבעון בחשיבה – שגיאות שמקורן בהעברה בלתי הולמת מנושא מתמטי אחד לנושא מתמטי אחר נדונו בהרחבה בספרות. שגיאות אלה מתעוררות כאשר מיומנות או אלגוריתם שנלמדו קודם נראים רלוונטיים ומתאימים לקונטקסט חדש ומתערבים בהפעלת מיומנות או אלגוריתמים חדשים. נוצרת בעיה של גמישות בלתי מספקת בניתוח מידע חדש (חסר בגמישות או גמישות יתר), כלומר, ניסיון להתיר בעיות דומות מבחינות מסוימות עלול להתבצע תוך קישורים מוגזמים ושגויים ביניהן. רדאץ מציג, בין היתר,את סוגי השגיאות :

ג.1. שגיאות הנובעות מהפעלה שגויה של אלמנטים בודדים – דוגמאות לסוג זה של שגיאות : 56+15=67, 66+12=77 בפתרונות אלה התייחס התלמיד רק לגורם אחד במחובר השני. הספרה ״אחד״ שמשה בשני המקרים כספרת העשרות ובטעות, גם כספרת האחדות.

ג.2. שגיאות הנובעות מעירוב של אופרציות או מושגים שונים – הדוגמא הבאה מציגה השפעה הדדית שגויה בין אלגוריתם החיבור ואלגוריתם החיסור :

$$\begin{array}{r} 6845 \\ +\quad 372 \\ +35437 \\ \underline{+\quad 561} \\ 30375 \end{array}$$

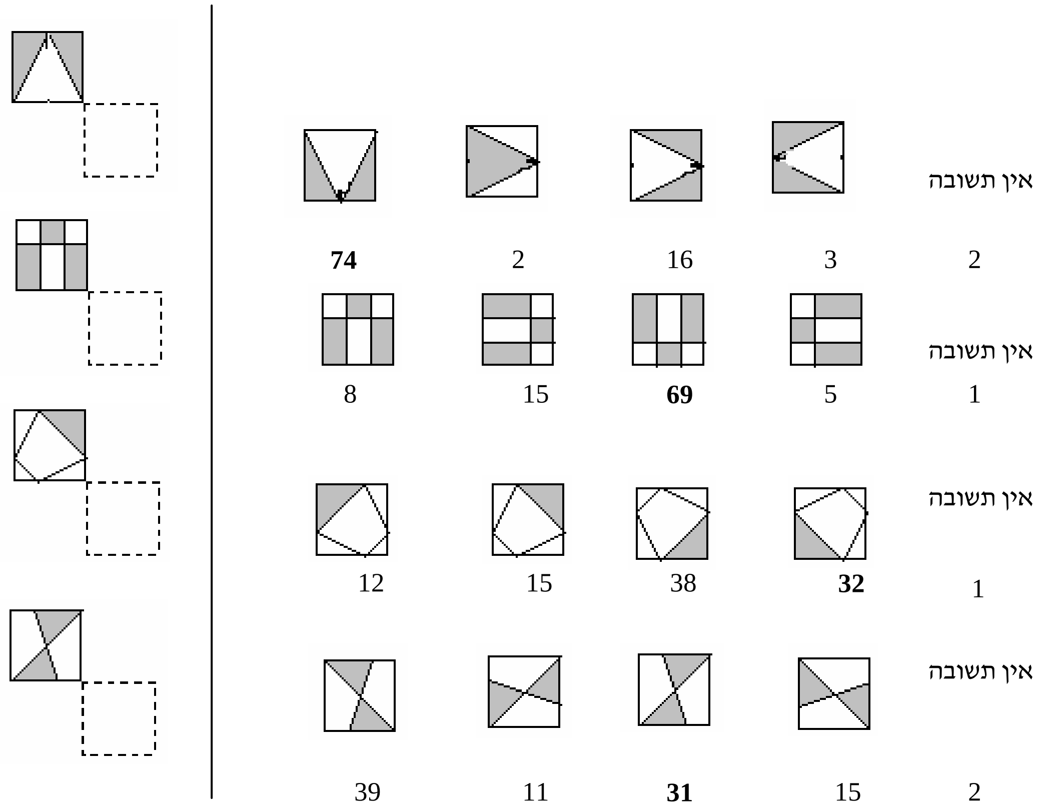
כדי להגיע לתוצאה, חיבר הילד את כל הספרות בעמודת האחדות וקיבל 15, לאחר מכן פעל על המספרים 372, 35437 ו- 561 בלבד וחיבר את ספרות העשרות וקיבל 17, חיבר את ספרות המאות וקיבל 13 ואז חיסר 6-36 וקיבל 30375.

ד. שגיאות הנובעות משמיעה לקויה הגורמת לטעויות בקריאה, בכתיבה ובהטמעת החומר – שגיאות אלה מסווגות לעיתים קרובות כשגיאות הנובעות חוסר שימת לב או חוסר ריכוז.

ה. שגיאות הנובעות מהשפעתה המטעה של סדרת תרגילים או בעיות מילוליות – שגיאות אלה נובעות בדרך כלל מהעברה שגויה ממשימות קודמות. דוגמא לתפקוד שגוי שהתקבל תוך כדי שגרת עבודה על משימה ניתן לראות בתשובותיה של התלמידה למשימה הבאה:

<u>המטלה</u>		<u>הפתרון של התלמידה</u>	
הוסף 7		**הוסף 7**	
קלט	**פלט**	**קלט**	**פלט**
31	____	**31**	<u>38</u>
20	____	**20**	<u>27</u>
___	**79**	<u>86</u>	**79**
42	____	**42**	<u>49</u>
___	**68**	<u>75</u>	**68**
45	____	**45**	<u>52</u>

ו. שגיאות הנובעות מיישום של חוקים או אסטרטגיות בלתי רלוונטיים – המקור של סוג זה של שגיאות הוא לעיתים בשימוש מוצלח בחוקים ואסטרטגיות פתרון מתמטיות במסגרות אחרות. בדוגמא שלהלן התבקשו כ- 4000 תלמידי כיתות ד' לסמן את הצורה המתאימה לתוצאה של "סיבוב הצורה הנתונה ב- 180^0". של הצורה הנתונה בצד שמאל של המטלה.



המספרים מתחת לכל צורה מציינים את אחוז התלמידים שבחרו צורה זו כמתאימה לסיבוב של 180 מעלות של הצורה בצד שמאל. המספרים המודגשים מציינים את אחוז התלמידים שבחרו את התשובה הנכונה.

יש לציין כי רוב התלמידים הפכו את הצורה הנתונה (שיקוף) במקום לסובב אותה. בצורה הראשונה והשנייה זה מוביל לתשובה הנכונה, היות והצורות סימטריות ואילו לגבי צורות שלוש וארבע, שיקוף הצורה מוביל לתשובה שגויה היות וצורות אלו אינן סימטריות.

לנושא של שימוש בחוקים בלתי רלוונטיים, פיתוח אלגוריתמים שגויים ויישום שיטות פתרון בלתי מתאימות ייחסו חשיבות מיוחדת במחקר הסובייטי לגבי לימודי המתמטיקה.

נשאלת השאלה, האם רצוי להגביר את מודעות המורים למיונים של שגיאות מתמטיות, למאפיינים של שגיאות אלה ולהצעותיהם של חוקרים שונים בנושא? אם כן, מדוע?

על כך בפרק א.5: "מילות סיכום, הערות והארות..."

3.א האם כדאי להשתמש בשגיאות בהוראה?

כיוון שעמדות של מורים לגבי מהלכים דידקטיים שונים משפיעות מאוד על העשייה שלהם, החלטנו להקדיש פרק זה לעמדות של אנשי חינוך מתמטי לגבי שימוש בשגיאות בהוראה.

חוקרים אחדים מציינים את הקשר בין ההתייחסויות לתהליכי למידה לבין ההמלצות להשתמש בשגיאות במהלך ההוראה. אצל אנשי חינוך מתמטי המסבירים תהליכי למידה על פי תיאוריות התנהגותיות, (Behaviorism) נתפסות שגיאות כשליליות – כמטרפדות למידה וכמותירות רושם בל-ימחה המזיק ללמידה עתידית. לטענתם, אין להציג שגיאות במהלך ההוראה כי תלמידים עלולים ללמוד ולאמץ את השגיאה. מצד שני, אנשי חינוך מתמטי המסבירים תהליכי למידה על פי תיאוריות קונסטרוקטיביסטיות (constructivism) טוענים כי שגיאות הן תופעה בלתי נמנעת וכי הן חלק אינטגראלי של תהליכי הוראה-למידה ושל כל עשייה מתמטית. התפקיד המרכזי של המורה הוא לעזור לקהילייה המדעית הנוצרת בכיתה לתפקד על ידי כך שהוא מספק לה בעיות המעלות קונפליקטים סוציו-קוגניטיביים, ועל ידי הולכת דיונים מדעיים בהם ייבחנו דרכי תיקופו של ידע מתמטי חדש. לפיכך, "שגיאות" נתפסות כחלק מתהליך הלמידה, וניתוח השגיאות יכול רק להועיל ללמידה (Bouvier, 1987). לכן, ראוי, לדעתם, לעשות שימוש בשגיאות במהלך ההוראה.

ברוח זו, בספרות המקצועית מוצגות שלוש גישות מפתח לגבי השימוש בשגיאות בהוראת מתמטיקה. (א) הגישה המסורתית – יש להימנע מדיון בשגיאות במהלך ההוראה. (ב) הגישה: השגיאות כאמצעי – דיון בשגיאות כדי לשפר את הידע בנושא, ו-(ג) הגישה: השגיאות כמטרה – דיון בשגיאות כדי להרחיב ולהעמיק את הידע המתמטי. גישה א' עולה במידה רבה בקנה אחד עם התיאוריה הביהביוריסטית ואילו שתי הגישות האחרונות עולות בקנה אחד עם התיאוריה הקונסטרוקטיביסטית. בהמשך נתייחס בקצרה לכל אחת משלוש הגישות.

3.1 הגישה המסורתית – יש להימנע מדיון בשגיאות

באופן מסורתי ההתייחסות לשגיאות מלווה ברגשות שליליים של תסכול ואכזבה מצד השוגה וברגשות של דחייה, ולעיתים גם תסכול ואכזבה, מצד המלמד. טבעי שברצוננו להימנע מרגשות אלה. לעמדות שליליות כלפי שגיאות ניתן למצוא ביטוי מפורש וגם ביטוי סמוי בשיחות עם תלמידים ומורים ובמהלך שיעורי מתמטיקה.

יש מורים הטוענים שחשוב שמורה יכיר את "המוקשים" הטמונים בבעיות שונות, כי הם רואים לעצמם חובה לבנות מהלכי הוראה ש"יחסכו" מתלמידים חוויות של שגיאות. הם סוברים שהדגשת תגובות שגויות אינה רצויה. ניסיונם מראה כי שגיאות הם הרגל נרכש, ולכן לדיון בשגיאות יש השפעה מזיקה על הלמידה, מפני שתלמידים עלולים "ללמוד את השגיאות". בהתאם יש מורים המאמינים באפשרות ללמד בשיטות של הוראה חסינת-שגיאות, אשר ימנעו מתלמידיהם את החוויה המתסכלת של פתרונות שאינם נכונים. לדעתם, חשוב שמורים יכירו תרגילים ובעיות "מועדים לפורענות", שבהם הסבירות לשגיאות מסוימות גבוהה במיוחד, כדי לתכנן רצפי הוראה שיחסכו ללומדים את חווית השגיאה.

3.2 ניתוח שגיאות ודיון בהן על מנת שלא לעשות אותן שוב

חלק מהשגיאות בלימוד המתמטיקה אינן נתפסות על ידי אנשי חינוך מתמטי כ"בלבול", "שכחה", או תוצאה של "מעידות" אקראיות. בדרך כלל נתפסות שגיאות כסמנים של חוסר הבנה בשל קשיים

בלמידה או בגלל כשלון ההוראה. בתור שכאלה, שגיאות משמשות ככלי לזיהוי קשיים של לומדים ולהבנת דרכי החשיבה ותהליכי הלמידה שלהם. חוקרים הצביעו על אפשרויות שונות לנתח את טבע השגיאות, ואת הסיבות העומדות מאחוריהן במונחים של מנגנוני עיבוד מידע של היחיד. תובנות אלה אמורות להיות מיושמות בתכנון ההוראה, ביצירת חומרי למידה ובהבניית תוכניות למודים שיתייחסו לקשיים שזוהו.

חוקרים בתחום הוראת המתמטיקה, שעסקו בניתוח שגיאות של תלמידים, ובהצגת סיבות אפשריות לשגיאות אלה, הדגישו את החשיבות שהם רואים בהגברת מודעות הלומדים לדרכי החשיבה שלהם, לשגיאות שהם עושים ולמקורות לשגיאות (למשל, אביטל, 1981; גודמן וזהבי, 1983; סמואל ואפלבאום, 2003; Borasi, 1985; 1986; 1987; 1994; Bainbridge, 1981; Fischbein, 1987; Edwards 1993; Goodman, 1979; Radatz, 1979; Stavy & Tirosh, 2000; Zehavi & Bruckheimer, 1984). החוקרים התייחסו לתועלת הטמונה בדיון בשגיאות. לטענתם, ניתוח השגיאות עם התלמידים, הדיון בהיבטים הבעייתיים ובסיבות אפשריות לשגיאות עשוי להעלות את הסבירות שתלמידים לא יחזרו על אותן שגיאות. למשל, רדאץ הצביע על החשיבות בשימוש בידע לגבי שגיאות אופייניות של תלמידים ודרכי חשיבה שלהם, בתכנון הוראה דיאגנוסטית במתמטיקה (למשל, Radatz, 1979). סמובול ואפלבאום (2003) טענו במבוא למאמרם כי ״התנסות במציאת טעויות יכולה לתרום להעמקת ההבנה של החומר הנלמד כמו גם לפיתוח חשיבה ביקורתית״ (עמ׳ 46), ובסיכום המאמר הוסיפו כי ניסיונם הרב בשיטת הוראה המשתמשת בשגיאות מוליך אותם להשערה כי ״עבודה מסוג זה תורמת רבות לפיתוח תלמיד חוקר עצמאי, מעוררת מוטיבציה, נותנת הזדמנות לתלמידים להשתתף בדיון, לבסס ולנמק את טענותיהם, ולהיות קפדניים באיסוף הטעויות וניתוחן. כמו כן, שימוש בשיטת עבודה זו יכול לתמוך במניעת חזרה על טעויות דומות בעתיד״ (עמ׳ 47). גודמן וזהבי (1983) הסבירו כי לדעתם, טעויות יכולות לשמש כנקודות מוצא לחקירה מתמטית מעניינת, אם לא נוקטים בדרך המקובלת של נזיפה בתלמיד ובקשה לתיקון. אביטל (1981) מנה בין היתרונות בחקירת שגיאות את הגדלת הסבירות שהתלמיד ילמד משגיאותיו ולא ״ישגה מחדש באותה שגיאה״.

ביינברידג׳ (Bainbridge, 1981) מנה מספר יתרונות לדיון בשגיאות בכיתה. בין היתר, לדעתו, הדיון בשגיאות עשוי לספק לתלמידים הזדמנות ללמוד מטעויותיהם הם וגם מטעויות של אחרים. במהלך הדיון בשגיאות אפשר לפתח אצל התלמידים רגישות למקור השגיאה, ובאופן זה להקנות מבט מעמיק על פרוצדורות ויחסים מתמטיים, ומיומנות של בדיקה עצמית. מחקר שנעשה על-ידי המחבר, מצא שתלמידים שנחשפו לשגיאותיהם באופן שיטתי, לא ניזוקו מכך.

הרמתי (1977) טענה כי ״ברור שהצגת ההטעיה בכיתה אינה מספיקה כדי למנוע שגיאות דומות בעתיד״, אך ״סקירת ההטעיה על ידי הכיתה עצמה נותנת אפשרות טובה להעמיק את המחשבה המתמטית ולקרב את הסבר השגיאה לתלמיד״ (עמ׳ 3). הרמתי מסיימת את מאמרה בהתייחסות לעיתוי בו ראוי לדעתה לעסוק בשגיאות בכיתה, והיא קובעת כי ״הטעויות הן חומר מתאים לשיעור אחרון בשליש או לשיעור שניתן על ידי מורה ממלא מקום״ (עמ׳ 4).

3.3 דיון בשגיאות על מנת להרחיב ולהעמיק את ההבנה המתמטית

גישה זו גורסת שבנוסף לתרומתן של שגיאות ככלי דיאגנוסטי, הן עשויות לשמש גורם מניע בפעילויות חקר ובאתגור חשיבה מקורית, ואלה יכולים להוליך להבנה מתמטית עמוקה יותר. למשל, גודמן וזהבי

(1983), אביטל (1981) ומיירסון (Meyerson,1976) טענו כי מורה הנתקל בטעויות של תלמידים ה"ממציאים" שיטות שנראות להם מתאימות לפתרון, יכול להשתמש בהן כנקודת מוצא לחקירה מתמטית מעניינת באמצעות בדיקה לאילו מקרים השיטה מתאימה. במאמרם מביאים גודמן וזהבי שתי דוגמאות של סוגיות מתמטיות שנחקרו על-ידי תלמידים בכיתה.

בוראסי הציגה מסגרת תיאורטית ודוגמאות להתייחסות לשגיאות כאל בסיס לדיון שירחיב ויעמיק את עולמו המתמטי של הלומד (Borasi, 1985; 1986; 1987; 1994). היא הדגישה כי, לדעתה, לחקר השגיאות בהוראת המתמטיקה יש ערך רב מעבר לאבחון ולתרומה טיפולית. לטענתה, הוראת מתמטיקה מבוססת שגיאות: מעודדת את הלומדים לחקור, מסייעת ללומדים לפתח שיח מתמטי ולבטא במילים את רעיונותיהם, יוצרת אצל הלומדים מודעות לחשיבותה של חשיבה והנמקה זהירה ושל ידע מבוקר, מספקת ללומדים עדות לכך שהמתמטיקה הוא מדע חי ומתפתח, ומפתחת בלומדים בטחון לגבי יכולתם ללמוד מתמטיקה. יש לציין שבוראסי גם הפגינה מודעות להיבטים רגשיים המלווים דיון בשגיאות. היא הסבירה כי בניתוח הפוטנציאל הלימודי הטמון בשגיאות, יש להתחשב ברגשות החזקים של תסכול, אכזבה, כעס, ולפעמים גם בושה המעורבים בעשייתם. התעלמות מרגשות שליליים אלה עלולה להכשיל את ההוראה.

בוראסי ציינה שורה של יתרונות בלמידה במהלך ניסויים הוראתיים באמצעות **פעילויות-השגיאה**, כלומר, פעילויות המבוססות על התייחסויות לשגיאות:

א. **התנסות בונה תוך ספק וקונפליקט לגבי נושאים מתמטיים** - בכל פעילות–שגיאה, כאשר הלומדים נתקלו בתשובות סותרות, בפתרונות שנראו בלתי הגיוניים, או בפתרונות שלא עלו בקנה אחד עם ציפיותיהם, התעורר אצלם ספק לגבי מהלכי הפתרון שננקטו.

ב. ***לקיחת חלק בפתרון מאתגר של בעיות מתמטיות*** - הפעילות הבלתי שגרתית והמאתגרת של איתור שגיאה ותיקונה הייתה, לעיתים קרובות, חלק מתהליך יצירתי של פתרון בעיות.

ג. ***עיסוק בחקר מתמטי*** – ספק שהתעורר במהלך פעילות-השגיאה גרם לעיתים להצגת שאלות מתמטיות, שבעקבותיהן עסקו התלמידים בפעילויות חקר פתוחות ובאפשרויות מתמטיות שונות.

ד. ***בחינת מאפייני המתמטיקה***- הדיונים בשגיאות ובדילמות נקודתיות הובילו לליבון סוגיות מתמטיות רחבות כגון מהי הגדרה? מהי הוכחה? מהי טענה תקפה? וכדומה.

ה. ***פתוח תחושת ההכרח להצדיק ולנמק כל צעד בפתרון המתמטי*** – שימת הלב המפורשת והרבה שניתנו לשגיאות במהלך פעילות-שגיאה הציבה בפני התלמידים דרישה לבדוק ולבקר את פתרונותיהם ואת השיקולים המתמטיים במהלך ההתרה.

ו. **פיתוח כושר הביטוי לגבי שיקולי הדעת המתמטיים** – כדי לתקשר ולהסביר את מהלך הפתרון שבנו, וכדי לנסות לאתר נקודות חוזק וחולשה בפתרון זה, היה על התלמידים להיות מסוגלים להבהיר את הרעיונות העומדים בבסיס פתרונותיהם.

ז. ***גילוי יוזמה ואחריות בלימודי המתמטיקה***- במקרים אחדים, הספק שעוררו מספר פתרונות, הזמינו את התלמידים להציב שאלות וליזום חקר מתמטי. בנוסף, הצורך לבחון פתרונות של תלמידים אחרים (בנוסף לבקרת פתרונותיהם שלהם) דרש יכולת לנתח את הפתרונות, להציג שאלות ולהיות מסוגלים להקשיב לתשובות האחרים.

בפרק א.5 נתייחס לחשיבות שאנו רואות בהגברת המודעות של מורים לגבי עמדות שונות של אנשי חינוך מתמטי בהתייחס לשימוש בשגיאות בהוראה.

4.א כיצד אפשר להשתמש בשגיאות בהוראה?

פרק זה מציג מחשבות והמלצות מפורשות של חוקרים לגבי דרכים ראויות לשימוש בשגיאות בהוראה. בחלק מההמלצות צורפו דוגמאות. מרבית הדוגמאות הוצגו במאמר, מיעוטן הוספו על ידנו. נציין כי איננו דנים בשיטת הקונפליקט הקוגניטיבי שנדונה בחוברות קודמות (למשל, תירוש, צמיר, אזהרי, ברש, קליין, 1999; תירוש, ברש, צמיר, קליין, 2000).

4.1 ההמלצות של ווטסון : ראיונות מאבחנים לשם הוראה

ווטסון (Watson, 1981) ייחס חשיבות רבה לראיונות אישיים דיאגנוסטיים עם תלמידי כיתות היסוד. לטענתו, בדומה לנוהל של בדיקת מיומנויות קריאה והבנת הנקרא שנעשית בכיתות היסוד באופן אישי, תוך כדי שיחה עם כל תלמיד בנפרד, גם בדיקת התפקוד המתמטי של תלמידים אלה ראוי שייעשה באמצעות ראיונות אישיים. לשם ביצוע יעיל של ראיונות אלה, ווטסון ממליץ למורה למתמטיקה להכין לעצמו רשימת שאלות שעליו לשאול את עצמו, כך שיעזרו לו לקבוע מהם הקשיים של התלמידים ומה מקורותיהם. הוא הציע למורה המראיין חמש שאלות מנחות, המתייחסות לרצף העבודה, ושלוש שאלות נוספות שצריכות להיות בתודעתו של המורה לאורך כל הראיון.

חמש השאלות המנחות למורה המראיין את תלמידיו:

שאלה א. **בדיקת יכולת קריאה** – האם התלמיד קורא את הבעיה?

א.1. קריאת הטקסט בשפה היומיומית. א.2. קריאת הסמלים בשפה המתמטית.

שאלה ב. **בדיקת הבנת הנקרא** – האם התלמיד מבין את הבעיה?

ב.1. הבנה כללית. ב.2. הבנה של מונחים וסמלים ייחודיים למתמטיקה.

שאלה ג. **בדיקת יכולת העברה** – האם התלמיד בוחר את המהלכים המתמטיים הדרושים לשם התרת הבעיה?

שאלה ד. **בדיקת מיומנויות עבודה (למשל, בפתרון בעיות אריתמטיות)** – האם התלמיד מבצע את המהלכים המתמטיים הדרושים לשם התרת הבעיה?

ד.1. האם תשובתו אקראית? ד.2. האם השתמש בפעולה שגויה?

ד.3. האם הפעיל את האלגוריתם באופן שגוי? ד.4. האם הייתה לו שגיאת חישוב?

ד.5. האם לא ענה?

שאלה ה. **בדיקת יכולות תרגום / הבעה** –האם התלמיד כותב את הפתרון בצורה קבילה (מתמטית)?

השאלות הנוספות:

שאלה 1. **בדיקת המוטיבציה של הלומד** – האם התלמיד משקיע מאמץ בפתרון הבעיה? כאשר התשובה לשאלה זו שלילית, האם היה פותר אותה אילו ניסה לעשות זאת?

שאלה 2. **בדיקת רשלנות בעבודתו של הלומד** – האם התלמיד עשה שגיאה מתוך רשלנות חד פעמית, למרות שלמעשה בצע את כל השלבים המשמעותיים לשם התרת הבעיה?

שאלה 3. **בדיקת הבעייתיות בייצוג הבעיה** – האם התלמיד שגה מפני שהבעיה הוצגה בדרך מכשילה (למשל, נוסחה באופן מעורפל)?

ווטסון דווח על עבודה מוצלחת בשיטה זו עם תלמידי כיתות ב' להם הוצגו 16 משימות העוסקות בחיבור, חיסור, כפל וחילוק. למשל, שאלות מילוליות:

1. אמא אפתה 12 עוגיות. את העוגיות חלקה לילדיה, כך שכל ילד קיבל מספר שווה של עוגיות. לאמא ארבעה ילדים. כמה עוגיות קבל כל ילד?
2. למרים יש 12 ₪. היא מחלקת את הכסף לקופסאות כך שבכל קופסה אותה כמות כסף. למרים 4 קופסאות. כמה ₪ שמה בכל קופסה?
3. כמה פעמים "שתים" יש ב-14?

ותרגילים, כמו: (1) $14:2=\_\_$ (2) $4x\_\_=12$ (3) $3x4=\_\_$

ווטסון סימן את הקשיים שהתגלו בעבודתו של כל אחד מהתלמידים, כאשר כקושי עיקרי הוגדר הקושי הראשון מאלה שצוינו בחמש השאלות הראשונות. התברר כי כמעט בכל המקרים תלמיד ששגה באחד השלבים, שגה גם בשלבים העוקבים שלב זה.

לטענתו של ווטסון, תובנות המלמד לגבי מקורות השגיאות של התלמיד שלפניו, הקשבתו הרגישה יותר לכל תלמיד ותגובתו לבעיה באופן מדויק יותר תרמו לכך שהתלמידים שחוו ראיונות אישיים הצליחו לפתור בעיות מתמטיות בהצלחה רבה יותר מאלה שלמדו את אותן בעיות במסגרת הכיתתית בלבד.

4.2 ההמלצות של מיירסון: דיון בשגיאות של תלמידי הכיתה

מאמרו של מיירסון (Meyerson,1976) מתייחס לעמדותיו לגבי דיון בשגיאות עם תלמידים ועם סטודנטים להוראה. מיירסון השתדל לפתח את מודעותם של סטודנטים להוראה לשגיאות אופייניות ולסיבות לשגיאות, לדון בעמדותיהם בנושא וכן לתרגל עמם הוראה שלוקחת בחשבון ידע זה. הוא טען שמורים הנתקלים בשגיאה (למשל בטענה השגויה ש- $(a+b)^2=a^2+b^2$) נוקטים באחד משני צעדים בלתי מספיקים (או בשניהם): מציגים לתלמידים דוגמא נגדית כדי להפריך את טענתם, ומספקים הסבר אלגברי התומך בתוצאה הנכונה. לטענתו של מיירסון, התנהגות זו מעידה שמורים חושבים שניתן בקלות לשכנע תלמידים לזנוח רעיון שגוי ולאמץ במקומו פתרון נכון. אך לא כך הדבר. כדי לשכנע סטודנטים להוראה בקיום שורשים עמוקים לשגיאות ולדון בהיבטים מתמטיים ודידקטיים שלהם הציג להם, בין היתר, את המטלות הבאות.

1. לפניכם 3 שגיאות אופייניות שעושים תלמידים, הסבירו אותן בדרכים שונות

   שגיאה א: $(a+b)^2 = a^2+b^2$

   שגיאה ב: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$

   שגיאה ג: $Ø = \{Ø\}$
2. בחנו את הסבריכם בשאלה 1 הציעו מקורות (מתמטים ופסיכולוגיים) לשגיאות.
3. הציעו דרך להפוך את השגיאות לחוויה חיובית עבור התלמידים.

להלן הדגמות של תשובות הסטודנטים שהוצגו במאמר:

<u>דוגמא א':</u> **הסברי הסטודנטים לשגיאה $(a+b)^2 = a^2+b^2$**

הסבר א.1. השתמשו בחוק הפילוג של חזקה מעל חיבור

הסבר א.2. השתמשו באינדוקציה: $(a+b)^1 = a^1+b^1$ לכן $(a+b)^2 = a^2+b^2$

הסבר א.3. התבססו על משפט פיתגורס: $a^2+b^2=c^2$ אבל אם $a+b=c$ אז $a^2+b^2 = (a+b)^2$

הסבר א.4. זה נשמע נכון שסכום ריבוע המספרים שווה לריבוע הסכום.

הסבר א.5. כיוון שמתקיים $(a\times b)^2 = a^2\times b^2$ וכפל הוא "חיבור מקוצר" אז גם $(a+b)^2 = a^2+b^2$

הסבר א.6. מותר לעשות פעולה זהה על שני צידי משוואה. אז אם $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$ ובשני צידי המשוואה משנים את המינוס לפלוס מקבלים $(a+b)^2 = a^2+b^2$

<u>דוגמא ב':</u> **הסברי הסטודנטים לשגיאה** $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$

הסבר ב.1. חיבור שברים פועל כמו כפל, כי כפל זה חיבור מקוצר...

הסבר ב.2. הסבר משחק הכדורסל – אם במשחק ראשון קלע דני 2 סלים $(a=2)$ מתוך 3 ניסיונות $(b=3)$, ובמשחק שני קלע 4 סלים $(c=4)$ מתוך 5 ניסיונות $(d=5)$, אז סך הכול קלע 6 סלים $(a+c=2+4)$ מתוך 8 ניסיונות $(b+d=3+5)$.

<u>דוגמא ג':</u> **הסברי הסטודנטים לשגיאה** $\emptyset = \{\emptyset\}$

הסבר ג.1. משמעות הקבוצה הריקה: הקבוצה הריקה היא למעשה "שום דבר" וקבוצת ה"שום דבר" היא "שום דבר". לכן, $\emptyset = \{\emptyset\}$

הסבר ג.2. שיקולי סימון: לסימון הקבוצות האחרות משתמשים בסוגרים, אז גם בסימון הקבוצה הריקה אפשר להשתמש בסימון זה.

הסבר ג.3. כתיבה חסכונית: למעשה $\{\ \} = \{\emptyset\} = \emptyset$, אבל הסימון $\{\emptyset\}$ הוא הטוב ביותר כי הוא מראה ש"אין ספק" שאנו מתייחסים לקבוצה הריקה.

להסברים שהביאו הסטודנטים לשגיאות היה מכנה משותף: בכל אחד מהם נעשה שימוש בעיקרון שנלמד בעבר, ובכל אחד הייתה טמונה ההנחה ש"במתמטיקה העתיד צריך להראות כמו העבר"

להלן שאלות שבהן מיירסון מציע לדון עם התלמידים:

א. מתי הפתרון נכון? כלומר, אלו שאלות יש לשאול על מנת להפוך פתרון זה לנכון?
ב. אילו הפתרון המוצע היה נכון, כיצד היה הדבר משפיע על המתמטיקה כתחום דעת?
ג. האם יש מערכות מתמטיות בהן פתרון זה נכון ?

מתוך כוונה להתייחס למקרים בהם השגיאות "עובדות", לגבי השגיאה $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$, הסטודנטים התבקשו להתייחס לשאלות: (1) הצג דרכים שונות למציאת שבר בין שני שברים נתונים. (2) האם $\frac{a+c}{b+d}$ תמיד בין $\frac{a}{b}$ ל- $\frac{c}{d}$? (3) האם למונח "בין" יש משמעות במישור (דו-מימדי)? במרחב?

4.3 ההמלצות של אלרו וסקובסומוס: תיקון שגיאות בכיתה

אלרו וסקובסומוס (Alro & Skovsmose, 1996) הצביעו על היבטים שונים בפעילויות שניתן לדעתם, לעשות עם תלמידים לשם תיקון שגיאותיהם. בכל המקרים מדובר בסמכות (מורה בדרך כלל) הלוקח אחריות על הולכת התלמידים לפתרון הנכון. מחברי המאמר מעלים מספר סוגיות שיש לתת עליהן את

הדעת כאשר מוליכים פעילות תיקון-שגיאה כלשהי. הם מפנים את תשומת ליבו של הקורא לשלושה עניינים עיקריים: מי מעורב בתיקון? באיזה אופן יתבצע התיקון? ומהי מהות התיקון?

א. מי מעורב בתיקון השגיאה?

תיקון ציבורי מול תיקון אישי – תיקון ציבורי הוא תיקון פומבי שנעשה בנוכחות מליאת הכיתה. מטרתו להעלות את מודעות כלל התלמידים לשגיאה, למאפייניה, ולמקורות אפשריים. תיקון אישי, לעומת זאת, מערב רק את התלמיד ששגה. תיקון אישי רצוי, למשל, כשברור שהבעיה חלה על תלמיד אחד בלבד (נעדר ממספר שעורים בשל מחלה), או שהזמן דוחק והכיתה משרה תחושה שעבור האחרים השגיאה לא רלוונטית. תיקון זה מומלץ גם שהתלמיד ששגה רגיש במיוחד ועדין לא פתוח מספיק כדי לדון בשיעור על שגיאתו.

ב. באיזה אופן יתבצע תיקון השגיאה?

תיקון מפורש מול תיקון עקיף – הדרך בה מביע המורה את התיקון יכולה להיות מפורשת, כלומר, אזכור ישיר של השגיאה, הצבעה על השגיאה, ודיון בשגיאה כשגיאה. למשל, כאשר תלמיד טועה, לרשום את תשובתו על הלוח, לומר שיש בפתרון שגיאה ולשאול היכן לדעת העמיתים בכיתה ארעה השגיאה. או, כאשר מספר תלמידים הציגו פתרונות על הלוח, לדון בכל הפתרונות הנכונים והשגויים, לאפיין ולנמק או להפריך את תקיפותם.

המורה יכול גם לנהל תיקון עקיף. זהו תיקון שניתן להבינו ככזה, רק כאשר מפרשים את הקונטקסט הסוציו-מתמטי, תקשורתי בכיתה. למשל, כאשר שני תלמידים מציעים בהצבעה, שתי תוצאות שונות (אחת נכונה ואחת שגויה) לתרגיל שעל הלוח. המורה בוחר להציג לכיתה את הפתרון הנכון. ותוך כדי הצגת פתרון עוצר בשלב בו זיהה את הטעות של התלמיד השני, ובלי לציין מדוע הוא עושה זאת, אומר: אם תעשו בשלב זה "...." זו תהיה שגיאה, מפני ש "..."

ג. מהי מהות התיקון?

התופעה, הסמכות ותוכן התיקון – (1) על המורה לתת את הדעת למושא התיקון, כלומר לתופעה שתתוקן. למשל, טעות חישוב, הגדרה שגויה (חסרה, עודפת או שגויה) או הוכחה שגויה עשויות לזכות בצורות התייחסות שונות. (2) כחלק מההסכמים הסוציו-מתמטים הנרקמים במסגרת כיתתית יוגדרו המקורות עליהם לגיטימי להתבסס כשקובעים את התיקון, כלומר, מהו הרקע הנותן למשהו / למישהו את הסמכות להגדיר מצב מתמטי מסוים כשגיאה (מורה, ספר לימוד). (3) על המורה להעלות לדיון את מידת הכלליות של התיקון, להשתדל להצביע על מכלול מצבים הנוגעים לתיקון. למשל, מצב של הכללה לא תקפה של חוק הפילוג או שימוש בדוגמא יחידה לשם הוכחת טענה מטיפוס "לכל" שקבוצת האמת שלה אינסופית. למשל, הוכחה שגויה של תלמיד, שהתבסס על דוגמא בלבד, לגבי הטענה: סכום כל חמישה מספרים טבעיים עוקבים, מתחלק בחמש. התלמיד כתב: "לדוגמא, מצאתי שסכום המספרים 111, 112, 113, 114, 115 שהם חמישה מספרים עוקבים, הוא, =111+112+113+114+115 565=500+50+15, כלומר, הסכום מתחלק ב-5. לכן הטענה נכונה. " ברור שהדוגמא הנכונה איננה מספיקה כדי להוכיח שסכום <u>כל</u> חמישה מספרים עוקבים יתחלק ב-5.

4.4 ההמלצות של מקקי: גיליונות מעקב לתלמידים

עמדתו של מקקי לגבי שגיאות בלמידה ובהוראה מובעת בבהירות בהצהרתו כי "כמורים אנחנו רוצים לדעת איך לעזור לסטודנטים להימנע משגיאות" (McAcy, 1993). כדי להשיג מטרה זו, הטיל מקקי על כל אחד מתלמידיו את האחריות לעקוב אחרי שגיאותיו. לשם כך נהג לחלק לתלמידים גיליונות

מעקב ובהם טבלה שהכילה רשימת שגיאות אופייניות בנושא בו עסקו. חשוב לציין שהרשימה כללה אך ורק טעויות שנובעות מחוסר תשומת לב ולא שגיאות שנובעות מאי-הבנה מהותית של החומר הנלמד.

כאשר מקקי החזיר את לתלמידיו עבודות בדוקות (שנשאו ציון), התבקש כל תלמיד לסמן v בעמודה המתאימה בטבלה בגיליון המעקב, על פי סוג השגיאה שזיהה בעבודתו. אם השגיאה נעשתה יותר מפעם אחת, היה על התלמיד לסמן v נוסף. לאחר שעברו תהליך זה במספר מבחנים, שיקפו הסימונים בגיליונות המעקב של התלמידים באילו תחומים על התלמיד להקדיש תשומת לב רבה יותר. להלן דוגמא לטבלה שנכללה בגיליון מעקב:

גיליון מעקב

שם: ______ סמסטר: _____ מבחן: _________ ציון: _________

	סוג השגיאה															
1.	טעות חיבור/ חיסור															
2.	טעות כפל/ חילוק															
3.	שגיאה בסדר פעולות חשבון															
4.	שימוש בפעולה לא מתאימה															
5.	התעלמות מסימן מינוס לפני סוגרים															
6.	שגיאה בצמצום															
7.	העתקה לא נכונה של התרגיל															
8.	שגיאה בפרוק לגורמים															
9.	טעות בנוסחה															
9.	מעקב לא נכון אחרי הוראות התרגיל															
10.	טעות במציאת מכנה משותף קטן ביותר															
11.	טעות בשימוש בשיטה הנדרשת															
12.	אי סיום פתרון התרגיל															
13.	דילוג על השאלה (לא פתר)															
14.	אחר															

מקקי ליווה פעילויות אלה בהסברים בהם הדגיש בפני התלמידים את החשיבות שיש למודעות הלומד לסוג השגיאות שהוא נוטה לעשות. לטענתו מודעות לשגיאות היא שלב חשוב לקראת מניעתן. לשם המחשת תחושת החשיבות הרבה שיש לדעתו, לייחס לפיתוח מודעות ורגישות של הלומד לטעויות שהוא נוטה לעשות, מקקי המליץ להתייחס לדוגמאות מתאימות מחיי יום-יום. הוא, למשל, השתמש באנלוגיה שאם מישהו מועד בכל פעם שהוא הולך על השטיח, מהר מאוד עליו ללמוד שהוא חייב ללכת במשנה זהירות על השטיח.

כדי לעודד את התלמידים למלא את גיליונות המעקב בהקפדה, זוכה ניתוח רציני של השגיאות במבחן בתוספת ציון (שעל גובהו הצהיר מראש). התלמידים קבלו את גיליונות המעקב יחד עם המבחנים הבדוקים, והגישו את הטבלה המלאה לאור ניתוח השגיאות במבחן הבא.

מקקי מדווח כי שיטה זו הביאה לשיפור בהישגי התלמידים ובביטחון העצמי המתמטי שלהם. השגיאות הנגרמות עקב חוסר תשומת לב פחתו במידה ניכרת. החוקר מצהיר כי המטרה הבאה שהציב לעצמו היא להפעיל שיטה דומה לגבי שיעורי הבית, תוך אמונה שאם התלמיד יזהה באילו תחומים הוא חלש ויתקן את חולשותיו, הישגיו ישתפרו.

4.5 ההמלצות של ביינברידג' לגבי שימוש בשגיאות בהוראה

ביינברידג' (Bainbridge, 1981) המליץ לשלב בהוראה שיעורים המבוססים על שגיאות וטעויות מושגיות נפוצות. דרכי ההוראה שהוא מציע כוללות:

א. **הצגת פתרון שגוי מוצהר ודיון בשגיאה** –

א.1. המורה יכתוב על הלוח פתרון שגוי ויאמר לכיתה: <u>זהו פתרון שגוי</u>.

א.2. המורה יבקש מהתלמידים <u>לאתר את השגיאה</u>.

א.3. המורה יבקש מהתלמידים לשער מה <u>מקור השגיאה</u>.

א.4. המורה יבקש מהתלמידים <u>להציע פתרון נכון</u> ומנומק לבעיה.

ב. **בקרה באמצעות אמדן** – בשל החשיבות שרואה ביינברידג' לפיתוח מודעות ומיומנות של טכניקות לבדיקה עצמית אצל הלומד, הוא מייחס חשיבות רבה להקניית **אמידה**. לטענתו מיומנות של אמידה עשויה לשמש תלמידים בניבוי ובבקרת תוצאות.

ג. **תרגול בקרה באמצעות ניקוד עצמי** – עיסוק בפעילויות של **ניקוד עצמי** בהן מאפשרים לתלמידים לנקד את עבודתם, על בסיס קריטריונים שייקבעו וינמקו, עשוי לפתח אצל הלומדים בחינה אחראית של הפתרונות הראשוניים שלהם.

4.6 ההמלצות של סמואל ואפלבוים: זיהוי הנכון והשגוי

במאמרם "מצא את הטעות" (2003) הציעו סמובול ואפלבאום לאפשר לתלמידים להתנסות בזיהוי פתרונות שגויים, זאת למרות שהם מודעים לכך שמציאת טעות בפתרון היא משימה לא קלה. לטענתם, בשל התרומה המשמעותית הצפויה מעבודה עם שגיאות להעמקת הידע של החומר הנלמד, ראוי לשלב בהוראה משימות של חיפוש טעויות בפתרונות (שגויים) מוכנים מראש.

סמובול ואפלבאום הציעו להציג לתלמידים תרגילים 'פתורים' באופן שגוי במטרה לגרום לקונפליקט קוגניטיבי. הם תארו את עבודתם בכיתה בה הציגו לתלמידים דפי פתרונות שהכילו פתרונות נכונים ופתרונות שגויים לבעיות מתמטיות. זוהי מסגרת המטלה שהם ממליצים לתת לתלמידים:

לפניך פתרונות שונים לבעיות מתמטיות. התייחס לכל אחד מהפתרונות --

א) בדוק האם הפתרון שגוי?

ב) אם הפתרון שגוי - תקן את השגיאה.

ג) הסבר את מקור השגיאה.

ד) הכן המלצות לתלמידים אחרים.

ה) אם הפתרון נכון -- הצע דרך נוספת לפתרון.

4.7 ההמלצות של אדוארדס: שיתוף התלמידים בשגיאות המורים

גם אדוארדס (Edwards,1993) ממליצה בחום ליזום דיון בשגיאות אופייניות עם תלמידים, ולשם כך להתכונן ולהכין פתרונות שגויים לדיון. המחברת אומרת במפורש שאחריותו של המורה להכין אסופה

של שגיאות אותן הוא מוצא לנכון לנתח עם תלמידיו, ולא לחכות לכך שהתלמידים ישגו ולדון בשגיאות לאחר מכן. יותר מכך, אדוארדס טוענת שיש חשיבות מיוחדת בשיתוף התלמידים בשגיאות שעשה המורה כאשר הוא פתר את הבעיות המוצגות לתלמידים: "כשאנו מתכננים הרצאות, ניתן לשלב בהן דיון בשגיאות שקרו בעבר. שהרי הן לא קורות בכל שיעור, ואיננו רוצים להמתין עד שתארע שגיאה ספונטאנית. במהלך הדגמת פתרון, כדאי לשלב את הניסיונות הראשונים שלנו (כולל הניסיונות השגויים והניסיונות המובילים למבוי סתום)".

היא מנמקת את הצעתה מן הפן הרגשי: "על-ידי חשיפה פתוחה של תגובתנו לשגיאה, אנו יכולים להדגים תהליכי פתרון בעיות, ובנוסף גם את דרכי ההתמודדות עם הרגשות המלווים את השגיאות... כאשר אני כוללת שגיאות בפתרון שלי, התלמידים רואים מומחה בתחום כשהוא חש בלבול ותסכול, וכיצד הוא בכל זאת ממשיך לעבוד עד למציאת פתרון." היא מתייחסת גם להתמודדות עם שגיאות ספונטאניות של המורה בשיעור: "מניסיוני, גם כאשר מתייחסים לשגיאות [המורה] בכיתה, אין זה פוגם בתדמיתו המקצוענית של המורה. מסתבר שגם כאשר המורה שוגה בשיעור שהוכן היטב מראש, עדיין מכבדים את מקצוענותו כמורה".

יש לציין כי אדוארדס מתייחסת בדבריה למורים מנוסים, הבקיאים בתכנים המתמטיים אותם הם מלמדים ואשר מתכוננים לשיעוריהם בהקפדה. ברור שידע מתמטי של המורים, רחב ככל שיהיה, אינו מונע שגיאות באופן מוחלט. לכן, בנוסף לערך שאדוארדס מייחסת לדיון בשגיאות, היא מוצאת חשיבות מיוחדת בדיון בשגיאותיהם של המורים העולות מפעם לפעם. אין ספק שההחלטה לאמץ גישה זו דורשת בחינה רגישה של ידע המורה וביטחונו העצמי המתמטי, ניסיונו המקצועי בהוראה וניסיונו בהוראת הנושא הספציפי, וכן את מעמדו בכיתה.

4.8 ההמלצות של אביטל: השגיאות כאתגר

בשורה של מאמרים קרא אביטל למורים להתייחס בחיוב לשגיאות תלמידיהם ולהשתמש בשגיאות באופן בונה במהלך ההוראה. הוא טען שלמרות שמקובל להתייחס לשגיאות של תלמידים כדבר פסול, ולמרות הדעה הרווחת שמזיק להתייחס ולדון בשגיאות במהלך ההוראה, "אין ספק שעמדה כזו איננה נכונה" (1981, עמ' 4). אביטל מציע, ברוח זו, "מטלות שגיאה" שונות שניתן לשלב בעבודה עם תלמידים, מציין מספר עקרונות דידקטיים לגבי שימוש בשגיאות בהוראת מתמטיקה, ודן בשתי סוגיות מרכזיות: (1) סוגים של מטלות המתייחסות לשגיאות שכדאי להציג לתלמידים, ו- (2) מהלכי ההוראה בהם מומלץ לשלב התייחסות לשגיאות (למשל, אביטל, 1975; 1976; 1979; 1981).

(1) לגבי סוג המטלות שכדאי להציג לתלמידים:

א. **מטלות שעשויות לעורר שגיאות** – חשוב שהמורה יציג לתלמידיו בעיות בהן יש הסתברות גבוהה שתלמידים ישגו (בעיות דיאגנוסטיות). כך יוכל המורה לעמוד על מידת ההבנה של תלמידיו, ולהחליט על המשך ההוראה.

ב. **מטלות המעוררות (או מציגות) שגיאות של "תמיד נכון" כאשר "קיימים" מצבים עבורם הפתרון שגוי** – במקרים רבים נוטים תלמידים לעשות הכללות יתר ולטעון כי תכונה, משפט או פעולה מתמטית ממשיכים להיות תקפים גם כאשר אינם ישימים יותר. למשל, הטענות, "כפל מגדיל" "חיסור מקטין" אליהן התייחסנו בפרקים קודמים. טענות אלה תקיפות לגבי מספרים טבעיים גדולים מ-1, ואינן תקיפות, למשל, לגבי אפס או אחד (כפל). אביטל ציין כי בדיונים שערך עם תלמידים התגלה, שעל

פי רוב, הם אינם רגישים להבדל בין "משפטי לכל" ו-"משפטי קיום". כיוון שלתובנות אלה השפעה על הידע המתמטי הרחב שלהם ועל יכולתם לזהות ולנתח שגיאות (למשל, להבין שדוגמא נגדית מפריכה טענת "לכל"), יש חשיבות מיוחדת לדיון בשגיאות כאלה.

ג. מטלות המציגות שגיאות מוצהרות ומבקשות לזהות את הטעות – הצגה של בעיה מתמטית ופתרון שגוי של הבעיה. לתלמידים נאמר שהפתרון שגוי והם מתבקשים לזהות את השגיאה ולתקנה. דוגמא לפעילות מסוג זה מציג אביטל במאמרו "היכן השגיאה"? (1976), שם ניתנת בעיה מתמטית ופתרון שלה המוביל לתוצאה לא הגיונית. לאחר הצגת הפתרון השגוי נאמר במטלה: "הוכחנו" כביכול ש... תמיד! ברור שיש כאן שגיאה. התוכלו לגלות היכן היא?

ד. מטלות הערכה של פתרונות נכונים ושגויים של עמיתים – מדובר בגישה, שבה, במקום לתת לתלמידים תרגיל לפתרון עצמי, נותנים להם אותם תרגילים עם פתרונות מלאים שנעשו על ידי תלמידים אחרים, כאשר יש בהם פתרונות נכונים ובלתי-נכונים. אומרים זאת לתלמידים, ומבקשים מהם לגלות אלו הם הפתרונות הבלתי-נכונים, ולציין בכל מקרה מה השגיאה.

ה. מטלות המציגות פתרונות שגויים המוליכים לתוצאות נכונות – יש מקרים רבים בהם מתקבלות תוצאות אמת למרות שבמהלך הפתרון נעשתה שגיאה. אביטל מתייחס לדוגמא $16/64 = 1/4$ שבה כביכול "צמצום ב-6" (או ביטול ה- 6 במונה ובמכנה) מוליך לתוצאה נכונה. ולדוגמא שדנה בשגיאתו של תלמיד שפתר את התרגיל $7-4[7-4(7-4)]$ על ידי שחישב את התוצאה לפי $3\times3\times3$ כלומר 27, ולא על פי הסכם סדר פעולות החשבון. אולם הסתבר שאותה תשובה מתקבלת גם אם נשמור על סדר פעולות נכון. דיון מסוג זה צריך לכלול חקירה השואלת באילו מקרים זה קורה.

במקרה של הדוגמא האחרונה, למשל, השאלה היית, עבור אלו ערכים של a, b מתקיים:

$a-b[a-b(a-b)] = (a-b)(a-b)(a-b) = (a-b)^3$ כלומר, עבור איזה ערכים של a ו- b:

$$a-ab+ab^2-b^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

נשווה לאפס:

$$a^3 - 3a^2b + 2ab^2 + ab - a = 0$$

נחלק ב- a (ששונה מאפס):

$$a^2 - 3ab + 2b^2 + b - 1 = 0$$

שימוש בטכניקות של פירוק לגורמים:

$$(a^2 - 2ab + b^2) - ab + b^2 + b - 1 = 0$$
$$(a-b)^2 - b(a-b-1) - 1 = 0$$
$$(a-b)^2 - 1 - b(a-b-1) = 0$$

שימוש בנוסחה להפרש ריבועים נותן:

$$(a-b-1)(a-b+1) - b(a-b-1) = 0$$

כלומר (על ידי פירוק לגורמים):

$$(a-b-1)(a-2b+1) = 0$$

מכאן, אם $a-b=1$ או $a=2b-1$ חישוב בדרך שהציע התלמיד תוליך לאותה תוצאה כמו חישוב על פי סדר פעולות החשבון המקובל.

(2) לגבי מהלכי ההוראה בהם מומלץ לשלב התייחסות לשגיאות:

מתי? איך? לשלב דיון בשגיאות בהוראה.

א. דיון בשגיאות כחלק בלתי נפרד מההוראה – כיוון ששגיאות הן חלק בלתי נפרד מתהליך הלמידה, ההתייחסות המודעת לשגיאות חייבת להיות חלק בלתי נפרד מתהליך ההוראה. כך המורה יוכל לזהות בכל שלב בעבודה את הקשיים של תלמידיו.

ב. הצגת בעיות דיאגנוסטיות בשלבים הראשונים של הוראת נושא בכיתה – ככל שמתקדמים בלימוד נושא, אם התלמיד מחזיק בשגיאה שלדעתו היא ידע ראוי, השימוש החוזר בשגיאה והאמונה

הגוברת בנכונותה עלולים להגביר את התסכול כשיתברר שזו שגיאה. יש להסיק, אם כן, שמהלך הוראתי יעיל ביותר, מבחינת מניעת שגיאות בעתיד, יתקבל על ידי שילוב בעיות דיאגנוסטיות בשלבים הראשונים של הוראת הנושא, כאשר המושגים המתאימים מוצגים בפעם הראשונה.

<u>דוגמא בI</u>: כאשר מציגים השוואת מספרים עשרוניים כדאי לשאול את התלמידים:

א. מי גדול יותר 25 או 3 ? ב. ומה לגבי 0.25 לעומת 0.3 מי מביניהם גדול יותר?

<u>דוגמא בII</u>: כשדנים בצמצום שברים, לאחר צמצום שברים כמו $\frac{2}{16}$ או $\frac{2\times15}{16}$ כדאי לשאול את התלמידים: ומה בדבר צמצום של $\frac{2+17}{2}$ או $\frac{2+15}{16}$?

<u>דוגמא בIII</u>: כאשר מציגים מספרים חיוביים ושליליים כדאי לשאול את התלמידים:

מה דעתכם על a–, איזה סוג של מספרים מייצגת, לדעתכם, תבנית זו ?

<u>דוגמא בIV</u>: כשדנים בצמצום שברים אלגבריים, לאחר צמצום שברים כמו $\frac{2a^2}{ab}$ כדאי לשאול את התלמידים: ומה בדבר צמצום בתבנית $\frac{a+b}{a}$ או $\frac{2x+b}{4x+5ba}$?

ג. דיון בשגיאה ובמקור לשגיאה, לא להסתפק בדוגמא נגדית – קורה שכאשר תלמיד מיישם כלל מתמטי שגוי, המורה מנסה לשכנע אותו באשר לאי נכונות השימוש בכלל על ידי דוגמה נגדית. אביטל הסתייג מדרך זו, במיוחד אם זו הדרך הבלעדית המשמשת את המורה, גם אם הדוגמא שבחר המורה מבליטה את השגיאה. לדעתו של אביטל יש להרחיב את הדיון לרמה המתייחסת למבניות המתמטית. אביטל הביא שלוש דוגמאות לכך:

<u>דוגמא גI</u>: השגיאה: תלמיד טוען כי $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$.

הצעת המורה: הצב a=4, b=3

התלמיד מציב, מקבל: $\sqrt{25}=7$, וברור לו כי זו טענת שקר.

המורה מניח: התלמיד השתכנע שהדוגמא הנגדית הפריכה את $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ כי זהו "משפט לכלל", ודוגמה נגדית אחת מראה שטענה זו איננה נכונה. התלמיד מאמין כי "זהו יוצא מן הכלל". כי אינו מבין את כוחה של דוגמא נגדית בהפרכת טענות "לכלל".

<u>דוגמא גII</u>: השגיאה: תלמיד טוען כי $(-a)$ חייב להיות מספר שלילי.

שאלת המורה: ומה אם a = (-1)?

התלמיד מציב, מקבל: כי $1=(-a)$, וברור לו כי זו טענת שקר.

המורה מניח: התלמיד האמין כנראה כי הסימן מינוס לפני כל משתנה מצביע על כך שהמשתנה מייצג רק מספרים שליליים, כלומר ש"לכל a, $-a$ הוא מספר שלילי", ולפיכך דוגמה נגדית אחת תשכנע את התלמיד בשקריות הטענה "לכלל".

<u>דוגמא גIII</u>: השגיאה: תלמיד "צמצם" את השבר $\frac{\mathrm{x+y}}{\mathrm{x}}$ וקיבל $\frac{1+\mathrm{y}}{1}$

הצעת המורה: בדוק מה אם $x=2$, $y=3$?

התלמיד מציב ומקבל: על ידי הצמצום, במקום $\frac{5}{2}=2.5$, מקבלים: $4=\frac{4}{1}$.

המורה מניח: התלמיד הבין שתחילה פתר כאילו הצמצום נכון "לכל x ולכל y", ולכן דוגמה נגדית אחת תשכנע אותו שאיננו צודק.

כאמור, אביטל הדגיש כי בדיונים עם תלמידים מצא, שעל פי רוב, אין הם מבחינים באופן מלא בין "משפטי לכל" לבין "משפטי קיום". ולפיכך במקרה של הדוגמאות שהצגנו, השגיאה שעשה כל אחד מהתלמידים, נתפסת על ידו כשגיאה ספציפית – כך שדרך ההסבר של המורה נוגעת רק בשגיאתו הוא – מבלי שתפנה את תשומת ליבו להיבט כללי יותר. ניתוח זה צריך לשכנע אותנו שחשוב לבקר באופן מקיף את הכלל שהתלמיד השתמש בו, ההנחות, המסקנות והטעות שנעשתה.

אביטל מציע, למשל, להפנות את תשומת לב התלמיד לעקרונות מתמטיים, אשר ייתכן שלא חשב עליהם בעת שעשה את השגיאה.

<u>דיון לגבי דוגמא גI</u>: לגבי $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$

הצגת שאלה: מהי הגדרה של שורש ריבועי?

המטרה: לגרום לתלמיד שיבין את הדיון הבא:

- שורש ריבועי ממספר נתון הוא מספר אשר ריבועו שווה למספר שמתחת לשורש
- לפיכך לכל a, b, k אם $\sqrt{a^2+b^2}=k$ אז $a^2+b^2=k^2$
- במקרה שלנו אם $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$, לכל a ולכל b, אז $a^2+b^2=(a+b)^2$

אביטל גרס כי תלמידים יזהו את השגיאה בביטוי $a^2+b^2=(a+b)^2$. כשהציג את רצף ההוראה למורים, טענו אחדים שתלמידים עלולים לומר שהביטוי נכון. אביטל השיב שאם טענתם נכונה, חשוב אפילו יותר לדון עם התלמידים ולהדגיש שאומנם קיים פילוג של שורש מעל מכפלה כלומר: לכל a ולכל b בעלי אותו סימן קיים $\sqrt{a^2\cdot b^2}=ab$, אך לא קיים פילוג של שורש מעל לסכום.

ד. חקור מתי זה עובד? היבט חיובי על השגיאה – דרך נוספת, קשורה לקודמת, היא לנסות לחקור באילו מקרים תוביל דרך השימוש השגויה של תלמיד בכלל המתמטי לתשובה נכונה. בגישה זאת עלינו להבהיר לתלמיד שאומנם המשפט שהוא השתמש בו, כנראה, כ"משפט לכל" איננו נכון, אך במקרים מסוימים, יהיה אולי המשפט נכון כ"משפט קיום" וכדאי לנסות לגלות מה הם מקרים אלה (הרעיון מבוסס על הצעתו של Meyerson, 1976). אביטל הדגים את עמדתו תוך דיון בדוגמא גIII.

<u>דיון בדוגמא גIII</u>: השגיאה: תלמיד "צמצם" את השבר $\frac{x+y}{x}$ וקבל $\frac{1+y}{1}$.

השערה: התלמיד הניח כנראה כי לכל x ולכל y, $\frac{x+y}{x}=\frac{1+y}{1}$.

ניתוח הבעיה: נשאל מהו חילוק?

- חילוק ב- x פירושו כפל ב- $\frac{1}{x}$ ($x\neq 0$)
- לכן, במקרה זה, לפי חוק הפילוג $\frac{x+y}{x}=(x+y)\times\frac{1}{x}=\frac{x}{x}+\frac{y}{x}$.
- כלומר, יודגש טענתו ה"כללית" של התלמיד שגויה!

ניתוח הסיטואציה המתמטית:

- חקור האם קיימים x, y ממשיים כאלה שעבורים $\frac{x+y}{x}=\frac{1+y}{1}$?

(כלומר, כדאי לחקור קשר זה כ"משפט קיום").

- התלמיד יגלה: השוויון מוביל למשוואה $y = xy$ ($x \neq 0$),
- לכן כאשר $x = 1$ או $y = 0$ השוויון מתקיים.

דוגמא נוספת ל"מתי זה עובד?" ניתן למצוא בחקירת הביטוי: *a-b[a-b(a-b)]* בדוגמא ה, בסעיף 1.

4.9 ההמלצות של בוראסי: דיון בשגיאות כמנוף הבנה מתמטית רחבה

כאמור, אחת החוקרות שהקדישה מאמץ מחקרי רב לשימוש בשגיאות בהוראת מתמטיקה הייתה בוראסי, שטענה כי למרות שמורים וחוקרים מכירים בערך שיש לניתוח שגיאות תלמידים לשם אבחון הידע ושיפורו, לא נעשו מספיק ניסיונות לעודד את התלמידים לנצל את השגיאות כהזדמנות ללמוד מתמטיקה. במאמר Using Errors as Springboards for the Learning of Mathematics (1985) תיארה בוראסי ארבע תפיסות עיקריות לגבי שגיאות:

	להסתכל על השגיאה	**להסתכל דרך השגיאה**
שגיאות *כמכשלה* שצריך לתקן	(1) <u>השגיאה</u> - סימן לכישלון בתהליך הלמידה. <u>אבחון</u> - זיהוי מדויק היכן שגו. <u>טיפול</u> - מטלה נוספת בנושא / הסבר נוסף לגבי הנקודה הבעייתית.	(2) <u>השגיאה</u> - שיקוף תהליך החשיבה של הלומד. <u>אבחון</u> - תובנות על המתרחש במוחו, תובנות על צורת החשיבה של הלומד. <u>טיפול</u>- שינוי התפיסות המוטעות של הלומד ובכך לסלק את השגיאה (בעתיד לבנות תוכניות לימוד מתאימות).
שגיאות *כמנוף* לקידום	(3) <u>השגיאה</u> - שלב חיובי ובסיסי בתהליך הלמידה. <u>אבחון</u> – משפר את התובנה המתמטית <u>טיפול</u> - דיון מעמקי בשגיאה להרחבת הידע המתמטי.	(4) <u>השגיאה</u> – כאמצעי לחקירה של תחום התוכן. <u>השגיאה</u> - תצביע על נקודות החוזק ונקודות התורפה של הפתרון ותעזור להעריך תוצאות ודרכי התרה.

בוראסי בטאה במאמריה (Borasi, 1985; 1986; 1987; 1994) את עמדתה כי יש לנקוט בגישת **הוראה המעודדת חקר מתמטי באמצעות שגיאות**. היא הסבירה שמשמעותה של הוראה בגישה כזו, פירושה שינוי המטרות בהוראה: מדגש על תוצר לדגש על תהליך. חקר השגיאות נועד להפוך אותן לקרש קפיצה ללימוד מתמטיקה. התנאים הדרושים, לדעתה, לשם הוראה בגישה זו הם:

- **התייחסות למתמטיקה** כאל גוף ידע שהוא תוצר של פעילויות אנושיות, ובשל כך אינו מושלם והוא מושפע מהיבטים תרבותיים ומערכים אישיים.
- **התייחסות לידע** כתהליך חקר דינאמי המלווה בחוסר וודאות, קונפליקטים ובספיקות אשר מאתגרים חיפוש אחר הבנה משופרת של העולם.
- **התייחסות ללמידה** כתהליך יצירתי של נתינת משמעות הנוצרת באופן אישי, מושפעת מהקונטקסט וממטרות המשימה ומעוצבת על יד אינטראקציה חברתית.

- **התייחסות להוראה** כמתן תמיכה הכרחית לחיפוש העצמי של התלמידים אחר המשמעות ויצירת סביבות למידה עשירות העשויות לאתגר חקר.

בוראסי פיתחה התערבויות מחקריות בהן מטרת המלמד להתמקד בשגיאות אותן הוא משתדל לנצל כהזדמנויות ללמידה. חלק מההתערבויות התרחשו בכיתות וחלק עם קבוצה מצומצמת של תלמידים (3-5). בהמשך למחקריה, בוראסי בנתה טקסונומיה של שימוש בשגיאות כקרש קפיצה לחקר מתמטי.

טקסונומיה של שימוש בשגיאות כקרש קפיצה לחקר מתמטי

הסתכלות על שני מימדים – הדיון מתמטי ומצבי למידה, היוותה בסיס לבניית הטקסונומיה:

הדיון המתמטי (Levels of mathematical discourse)

א. **עבודה על מטלה ספציפית**- התרת בעיה, ביצוע חישוב, ניסיון להוכיח נכונות תוצאה, הפקה של הגדרה עבור מושג מסוים וכדומה.

ב. **הבנת תוכן מתמטי**- הבנה של מושג, חוק, משפט, נוסחה וכדומה (למשל, מעגל, חוק הפילוג, חזקה, מערכת קרטזית, משפט פיתגורס.)

ג. **הבנת העולם המתמטי** (הבנת טבעה של המתמטיקה) - הבנת מושגים מתמטיים כמו הגדרות, הוכחות או אלגוריתם, מאפייני החשיבה המתמטית, המתמטיקה כתחום תוכן וכדומה.

מצבי למידה (Stances of learning)

א. **טיפול- תיקון** (Remediation) - השאלה והתשובה שבבסיס הפעילות נקבעים מראש וידועים לסמכות – למורה. התלמיד מודע לכך, שתשובתו שגויה (למרות שאפשר שאינו יודע מהי התשובה הנכונה). הצפייה היא שעל ידי ניתוח השגיאה יוכל הלומד לזהות מהי השגיאה ולתקנה.

ב. **גילוי** (Discovery) - התלמיד לומד עניין חדש או מנסה לפתור בעיה. הבעיה, פתרונה ומהלך הפעילות ידועים ומוכתבים על ידי הרשות (המורה). כיוון שהתלמיד אינו יודע עדיין את התשובה, צעדים שגויים נתפשים כהתרחשויות טבעיות ויש צורך (צפייה ודרישה) שכל פתרון יבחן באופן בקורתי כדי לקבוע אם הוא נכון או לא ומדוע.

ג. **חקר-פתוח** (Open-Ended inquiry) - השאלות והתשובות אינם ידועים מראש לתלמיד ולמורה ואינם מוכתבים על ידי הרשות (המורה). פעילויות רבות הן תוצר של שינויים והגדרה מחדש של הבעיה המקורית. ברוח זו, שאלות העולות כתוצאה משגיאות עשויות לאתגר לחקר של כיוונים בלתי צפויים, ואף להזמין תלמידים לבחון את האמיתות המתמטיות הידועות.

ברור כי <u>רמת הדיון (השיח) המתמטי</u> שבה מתרחש ניתוח השגיאות תשפיע על מה שהתלמידים עשויים ללמוד בפעילות-השגיאה: הבנה מושגית טובה יותר של חוק או מושג מתמטי, איך לפתור בעיה מתמטית מסוימת, או הערכה נכונה יותר של תחום הדעת המתמטי. בנוסף לכך, גם <u>מצב הלמידה</u> המשוער בפעילות-שגיאה עשוי להשפיע באופן עקיף או סמוי על גישתו של הלומד לפעילויות מתמטיות. כתוצאה מכך יפותחו גם התפקוד המתמטי של הלומדים, ראייתם את המתמטיקה כתחום דעת וכתחום של פעילות אנושית. בוראסי טענה כי תועלת מרבית ניתן להשיג מלימוד באמצעות שגיאות, כאשר רמת השיח ומצבי הלמידה נלקחים בחשבון ומיושמים בהוראה.

יחד עם זאת, בוראסי הצביעה על קושי ליישם "חקר פתוח" במסגרות בית ספריות, בהן תוכנית הלימודים והמציאות הבית ספרית עלולה לטרפד דרכי הוראה מסוג זה. לשם שימוש בשגיאות בהוראה

הבית ספרית יש לדעתה, להתייחס **לרמות המעורבות** של הלומדים, **למקורות השגיאות** הנדונות, **לשאלות שמומלץ** להציג במהלך פעילויות שגיאה, **ולמסגרת** בה נעשתה השגיאה.

רמות מעורבות של הלומד באירועי-שגיאה

בוראסי רואה חשיבות לשילוב הלומדים באופן פעיל באירועי-שגיאה. בהתאם לכך קבעה שלוש רמות של מעורבות הלומד בפעילות:

א. החקירה מתעוררת **בעקבות שגיאה**, מנוהלת בעיקר על ידי המלמד שבשלב מאוחר יותר משתף את הלומד.

ב. הלומדים לוקחים חלק פעיל **בפעילות-שגיאה שיזומה**, מנוהלת ומאורגנת על ידי המלמד.

ג. **התלמידים יוזמים ומפתחים** בעצמם פעילויות שגיאה עם מעט (או בלי) מעורבות המלמד.

לעיתים ניתן להבחין במהלך אירוע-שגיאה יחיד ביותר מרמת מעורבות אחת של הלומד. למשל, המלמד עשוי להבחין ראשון כיצד אירוע-שגיאה יכול להיות בסיס להתרת בעיות חדשות, כך בשלב ראשון המלמד יוליך לכיוון בעיות אלה. בהמשך, אפשר שהתלמידים עצמם יסיקו מסקנות מהתוצאות שיתקבלו ויעלו אפשרויות של כיוונים חדשים להצגת שאלות.

בוראסי מצאה כי תלמידי החטיבה העליונה הפגינו יכולת עבודה של השלב השלישי (התלמידים יזמו ופתחו בעצמם את פעילויות-השגיאה עם מעט סיוע, או ללא כל מעורבות של המלמד). ברצוננו לטעון כי אין ספק שגם מורים וסטודנטים להוראה בבית ספר יסודי יכולים וצריכים לתפקד ברמה זו, וכי יש למצוא ראיות לכך שגם תלמידים בבית הספר היסודי מפגינים יכולות כאלה.

מקורות לשגיאות הנלמדות

בוראסי טענה כי מורים העומדים להשתמש באירועי-שגיאה בהוראה עשויים לתהות היכן ימצאו את השגיאות שאמורות לשמש נקודות פתיחה בדיונים. כדי לעמוד על מקורות שגיאה אפשריים ניתחה בוראסי את מקורות השגיאה ששמשו אותה בפעילויות-השגיאה שערכה, ומיינה אותם. תחילה הציגה מיון לפי הקריטריון "**מי השוגה**" בפעילות-שגיאה:

מקור 1 – שגיאה שנעשתה על יד **תלמיד הלוקח חלק בפעילות** ומשתתף בניתוח השגיאה.

מקור 2 - שגיאה שנעשתה על ידי **תלמיד אחר באותה כיתה**.

מקור 3 – שגיאה שנעשתה (המתכוון ושלא במתכוון) על ידי **המורה**.

מקור 4 – שגיאה שנעשתה על יד **תלמידים בכיתה אחרת**.

מקור 5 - שגיאה שנעשתה על יד **מומחים** בתחום (שגיאות של מתמטיקאים).

בוראסי ציינה כי במהלך הניסויים ההוראתיים השונים שערכה השתמשה בכל המקורות שציינה, וכי לא נראה היה שהלומדים הגיבו באופן שונה לשגיאות ממקורות שונים. ההבדלים המעטים שנמצאו בתגובות תלמידים היו, שתלמידים הפגינו התלהבות רבה יותר לניתוח שגיאות שהם עצמם עשו וחשו גאווה כאשר תוצרי החקירה היו משמעותיים. יחד עם זאת, בוראסי הדגישה כי לדעתה, אם התלמידים מרגישים תחילה חוסר רצון לשתף את הכיתה בשגיאותיהם על המורה להסתפק בשגיאות ממקורות 3 , 4 ו- 5 מרשימת המקורות, כדי לסייע להם להתגבר על התחושות השליליות (כמו מבוכה, תסכול, אי-נעימות) המתקשרות לשגיאות.

במחקרים הוראתיים שערכה מצאה בוראסי כי למקור השגיאה עשויה להיות השפעה על ההוראה ועל מידת הנוחות של המורה במהלך הפעילות. בוראסי מציינת שלושה מצבים בהקשר זה:

א. השגיאה נבחרה מראש על יד המורה והוצגה לתלמידים במהלך **פעילות מתוכננת**.

ב. השגיאה נעשתה על יד אחד התלמידים ונדונה באותו שיעור, זאת כאשר **המורה ציפה** (ואולי אפילו עורר) **להתרחשות של שגיאה** דומה.

ג. השגיאה נעשתה **באופן בלתי צפוי** על ידי התלמידים או על ידי המורה, ומיד התרחשה בכיתה פעילות- שגיאה.

לדעתה של בוראסי, פעילויות-שגיאה אשר מתאימות לקטגוריה השלישית (שגיאה בלתי צפויה) הן כנראה בעלות ההשפעה הרבה ביותר על הדרך באמצעותה תלמידים ילמדו להעריך שגיאות כקרש קפיצה לדיון ולחקר מתמטי. אולם בד בבד, מצבים כאלה עשויים להיות מאתגרים ביותר למורים. בנסיבות אלו מורים עשויים להעדיף להתחיל את העיסוק בפעילויות-שגיאה תוך התמקדות בשגיאות שנבחרו מראש (בעיקר סוג א' אך גם סוג ב'). למרות החלטה מסוג זה, יש לציין כי עדיין עלולות לעלות בכיתה שגיאות בלתי צפויות אשר המורה יזהה אותן מיד. במקרים כאלה מורה יכול לעכב את הטיפול והדיון בשגיאה עד שילמד אותה ויהיה מוכן לפעילות-שגיאה הולמת.

שאלות המתאימות לפעילות-שגיאה (על פי Borasi, 1987)

בוראסי מפרטת שאלות שהיא ממליצה להציג במהלך פעילויות-שגיאה, תוך התייחסות לאופי השגיאה הנדונה. בכל אחד מהמקרים מוצגות שאלות משני סוגים: אלה המתייחסות לתוכן המתמטי המיידי, ואלה המתייחסות לדיון בטבע המתמטיקה.

א. כשמוגדרת הגדרה שגויה

התייחסות לתוכן המתמטי	**התייחסות לטבעה של המתמטיקה**
- אילו תכונות ניתן להסיק מההגדרה המוצגת? - אילו תכונות מתאימות לדימוי המושג שיש לנו? - אילו תכונות אינן מתאימות לדימוי המושג? - אילו "ישויות מתמטיות" אחרות ניתן לתאר באמצעות הגדרה זו? - אילו דוגמאות של המושג <u>אינן</u> מתוארות באמצעות ההגדרה? - האם כל התכונות המצוינות הכרחיות? - האם אפשר לוותר על תכונה כלשהי? - האם אפשר לשנות את ההגדרה ולתקן אותה? - איזו מושגים חילופים ניתן ליצור באמצעות הגדרה זו?	- אילו תכונות רצוי <u>שלא</u> יהיו להגדרה מתמטית? - אילו תכונות רצוי שיהיו להגדרה מתמטית? - כיצד אפשר להעריך ולבחור הגדרה , שנתונות הגדרות שונות למושג מסוים? - מה מטרתה של ההגדרה? - לשם מה מגדירים? - במה שונות הגדרות מתמטיות מהגדרות בתחומים אחרים?

ב. כשמוצגת תוצאה שגויה

התייחסות לתוכן המתמטי	**התייחסות לטבעה של המתמטיקה**
- באיזה מובן התוצאה שגויה? - היכן נכשל האלגוריתם? - האם ניתן לתקן את האלגוריתם, ובכך להגיע	- איך ניתן לבדוק האם אנחנו משתמשים נכון באלגוריתם מתמטי? - איך ניתן להחליט אם אלגוריתם מסוים מתאים

לפתרון שונה? - מה היו ההנחות שלנו, והאם הן מוצדקות? - באילו מקרים הנחות אלו הן מוצדקות? - מה יהיו ההשלכות של קבלת התוצאה החלופית? - באילו נסיבות ניתן להתייחס לתוצאה זו כנכונה?	במצב נתון? - איך ניתן לקבוע את תחום הישימות של אלגוריתם מסוים?

ג. שימוש במודלים לא מתאימים

התייחסות לתוכן המתמטי	**התייחסות לטבעה של המתמטיקה**
- באיזה מובן המודל "עובד" ובאיזה מובן לא? - השווה את המודל הזה עם "מודל טוב" אחר, במידה ויש כזה לאותו מושג. - מדוע המודל אינו מציג היבטים מסוימים של המושג? - האם / כיצד ננסה להתאים את המודל, כך ש"יתאים" יותר למושג? - האם הבעיה טמונה במגבלות המודל או שהיא קשורה למושג עצמו?	- כיצד ניתן לקבוע את ההיבטים עבורם המודל "מתאים" לישות המתמטית אותה הוא מייצג, וכיצד ניתן לקבוע את ההיבטים עבורם הוא אינו מתאים? - באיזו מידה יכול מודל להיות "שונה" מהישות המתמטית צמה? - מהו הערך של מודלים חלופיים? - איך ניתן להעריך איזה מודל טוב יותר?

ד. תוצאה נכונה שהגיעו אליה בדרך שגויה

התייחסות לתוכן המתמטי	**התייחסות לטבעה של המתמטיקה**
- האם מקבלים תשובה נכונה בדרך זו? - האם ניתן לשנות מעט את מהלך הפתרון ובכך לעשות אותו נכון? - האם דרך הפתרון "עובדת" במקרה פרטי זה בשל תכונות פרטיות של המקרה? - במקרה כזה, מהן התכונות? - באילו מקרים צפוי שפתרון זה יעבוד? - באילו מקרים צפוי פתרון זה שלא לעבוד? - אלו הנחות נחוצות על מנת שהפתרון יעבוד?	- מי מחליט אם אלגוריתם (או תהליך מתמטי) הוא מספיק ריגורוזי? - על איזה בסיס מתקבלת החלטה כזו? - האם היו קריטריונים על פיהם שפטו את קבילותם של תהליכים מתמטיים זהים לאורך ההיסטוריה?

ה. קבלת תוצאות מקורבות

התייחסות לתוכן המתמטי	**התייחסות לטבעה של המתמטיקה**
- האם ביכולתך להעריך את "גודל" השגיאה המתקבלת כתוצאה מהקירוב? - מה עלולה להיות התוצאה של "השגיאה" אם הקירוב ייושם במקרים אחרים?	- האם ניתן תמיד לקבל תשובות מדויקות לבעיות מתמטיות? - אם לא, למה? - מה עשוי להיות תפקידה של תוצאה מקורבת

- האם יש תוצאות מקורבות נוספות? - האם הקרובים האחרים זהים לשלך? - האם יש באפשרותך "לשפר" את התוצאה שהצגת ולקבל קירוב "טוב" יותר? - האם פעילות כזו היא כדאית?	כאשר יש אפשרות להגיע לתוצאה מדויקת? - מה אם אין תוצאות מדויקות? - כיצד ניתן להעריך אפשרויות "קירובים" חילופים?

המסגרת שבה מפתחים אירועי שגיאה

בוראסי ציינה שדיון בשגיאות יכול להתרחש בסוגים שונים של מסגרות עבודה עם התלמידים, ומומלץ שהמורה יגדיר לעצמו באיזה מסגרות ברצונו לעסוק בחקר מתמטי מבוסס על שגיאות. בין היתר, זיהתה במחקריה כי עבדה במסגרות הבאות:

א. דיון כיתתי בהגדרות שגויות -- לתלמידות הוצגו מספר הגדרות שגויות למושג מסוים. ההצעות כללו את ההגדרות השגויות שנתנו תלמידות הכיתה ושגיאות שהוצגו בכיתות מקבילות. מטרת הדיון בהגדרות השגויות הייתה להביא את התלמידות למודעות לגבי הצורך לבודד את המושג, כאשר הן מגדירות את המושג שנדון בפעילות (מעגל) או כל הגדרה מתמטית אחרת.

ב. תיקון מטלת בית בלתי מוצלחת -- המקרה המוצג במאמר מתייחס לשיחה שניהלה בוראסי עם תלמידה ששגתה בפתרון בעיה בבית, כאשר התייחסה רק לחלק מהנתונים.

ג. שימוש קונסטרוקטיבי בשגיאות לשם התרת בעיה חדשה -- בוראסי רואה חשיבות בהצגת טענה שיש ספק לגבי נכונותה ועיסוק אמיתי בבדיקת התוקף של הטענה מבלי שיש לכך רמזים זרים לעניין. לכן כשברצונה להגיע, למשל, למשפט לגבי סכום הזוויות הפנימיות במצולע, היא מציגה טענה שגויה בנושא ומבקשת את התלמידות לבדוק את תקפותה.

ד. התמודדות עם סתירה שאי אפשר לישב -- לאחר דיון במושג החזקה, תפקיד הבסיס והמעריך והרחבות שונות של המושג למערך שלם ולמעריך רציונאלי, החליטה בוראסי לדון עם התלמידות במצב המתמטי הבעייתי של 0^0. בדיון הוצגו שתי דרישות סותרות: האחת היא שכל מספר בחזקת אפס הוא 1, והשנייה היא שאפס בחזקת כל מספר שווה לאפס. לדעתה של בוראסי, בעובדה ש- 0^0 לא הוגדר במתמטיקה, ובכך שהמתמטיקה אינה מציעה פתרונות לכל מצב אפשרי, יש חשיבות חינוכית רבה.

נשאלת השאלה, האם רצוי לידע מורים לגבי שיקולים דידקטיים והמלצות של חוקרים בהתייחס לדרכים בהן ראוי להשתמש בשגיאות בהוראת מתמטיקה? אם כן, מדוע?
על כך בפרק א.5: "מילות סיכום, הערות והארות..."

5.א   מילות סיכום, הערות והארות...

בשער זה של החוברת נסקרה ספרות שהתייחסה לארבעה נושאים מרכזיים לגבי שגיאות ומקומן בחינוך מתמטי: בפרק א.1, "מדוע שוגים?" נדונו המסגרות התיאורטיות של פישביין, טול ווינר, וסתוי ותירוש ובתרומתן של מסגרות אלה להבנת סיבות אפשריות לשגיאות מתמטיות של תלמידים. בפרק א.2, "איזה סוגים של שגיאות נוטים לומדים לעשות?" הוצגו שישה מיונים של שגיאות מתמטיות, אשר הוצעו על ידי חוקרים שונים בתחום. בפרק א.3, "האם כדאי להשתמש בשגיאות בהוראה?" צוינו שלוש עמדות של מורים ושל חוקרים בתחום הוראת מתמטיקה לגבי שילוב שגיאות במהלך ההוראה, ובפרק א.4, "כיצד אפשר להשתמש בשגיאות בהוראה?" הובאו תשע הצעות של אנשי חינוך מתמטי לגבי דרכים שונות לשימוש בשגיאות בהוראה. בסיום כל פרק העלו שאלות כגון, האם יש חשיבות להגברת מודעותם של מורים לגבי הנושאים המוצגים בפרק? האם חשוב להגביר את מודעותם לריבוי הגישות ולמגוון ההצעות? מדוע?

יודגש כי אנו רואות חשיבות רבה בכך שנושאים אלה יידונו בהרחבה עם מורים. בפרק זה נתאר מהי תרומתו האפשרית של כל אחד מהנושאים שהוצגו בארבעת הפרקים שבשער זה לשם העשרת הידע של המורים ולקידום ההוראה.

לגבי פרק א.1, אנו רואות חשיבות <u>בהגברת מודעות של מורים באשר לסיבות האפשריות לקיום שגיאות מתמטיות ולעניין תיאוריות העוסקות בלימוד מתמטיקה</u>, כיוון ששימוש במסגרות אלה עשוי לסייע למורים בתחומים הבאים:

א. **לבחון שגיאות מתמטיות שונות בראייה רחבה, ולמצוא מכנה משותף סיבתי לשגיאות שנראות שונות לכאורה.** למשל, על פי פישביין, נראה שהפתרונות השגויים: $5\times2\times7=(5\times2)\times(5\times7)$ ו- $27:(9+3)=27:9+27:3$ ו- $9+(3\times2)=(9+3)\times(9+2)$ נובעים מאותה סיבה שהיא, הפעלת המודל האלגוריתמי של חוק הפילוג. מודעות למכנה משותף סיבתי, אשר עשוי לעמוד בבסיס תשובות שגויות שונות מאפשר תכנון וביצוע של מהלכי הוראה המקשרים בין מופעים שונים של "אותה שגיאה" תוך הסבת תשומת ליבו של הלומד לדרכי החשיבה שלו.

ב. **לנבא שגיאות תלמידים למטלות חדשות** בנושאים מתמטיים שונים. מעבר לתרומתן של המסגרות התיאורטיות בניתוח ופירוש שגיאות מתמטיות, מספקות מסגרות אלה כלי ניבוי. כך למשל, סביר להניח שמסיבות דומות לאלו שהוצגו בסעיף א', תלמידים יגלו נטייה לשגות ולטעון כי, $(5+2)^7=5^7+2^7$ או $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$.

ג. **לתקשר ולדון עם עמיתיהם** (ואולי גם עם התלמידים) **בשגיאות מתמטיות**. המסגרות התיאורטיות שהצגנו מספקות אוצר מונחים, המגדירים ומאפשרים להצביע על שיקולי הדעת של תלמידים. כאשר מורים מתייחסים, למשל, לשיעור שבו היו אירועי שגיאה, השפה שמקנה המסגרת התיאורטית מאפשרת להם להצביע על תופעות מסוימות באופן ברור ומדויק, ולנתח את ההתרחשויות.

יתרה מזו, אנו רואות חשיבות מיוחדת <u>להיכרותם של מורים עם מסגרות תיאורטיות **שונות**</u>, וזאת משתי סיבות עיקריות:

1. **החשיבות שיש בנקודות מבט שונות לאותה שגיאה** – ניתוח שגיאות מסוימות באמצעות מספר מסגרות תיאורטיות עשוי לספק תובנות באשר למקורות אפשריים לשגיאות. ככלל, הסיבות

שהעלו פישביין, וטול ווינר, לשגיאות תלמידים במתמטיקה מעוגנות בתחומי תוכן מתמטיים ספציפיים ובמשמעויות שמקבלים מושגים מתמטיים לאור ניסיון העבר של הלומדים במתמטיקה ובחיי יום-יום. לעומת זאת, הסיבות שהעלו סתוי ותירוש מעוגנות במבני המטלות ולא בתחום התוכן בו עוסקים. אנו מאמינות שלעיתים מקור השגיאות של תלמידים הוא מבנה המטלה, ולעיתים גורמים הקשורים בתוכנים הרלוונטיים. יתרה מזו, תלמידים אחדים יעשו שגיאה מסוימת מסיבות הקשורות בתוכן ואחרים יושפעו ממבנה המטלה. לכן, חשוב שמורים יהיו רגישים לגורמים השונים ייקחו אותם בחשבון בתכנון מהלכי ההוראה.

2. **מגבלות כל אחת מהמסגרות התיאורטיות** – כוחה המסביר של כל אחת מהתיאוריות מוגבל ולעיתים, לא ניתן להסביר שגיאה מסוימת תוך יישום **כל** התיאוריות. קורה, למשל, שמבנה המטלה אינו מאתגר, לדעתנו, שגיאה, בעוד שניתן למצוא לשגיאה סיבות תלויות תוכן. היכרות המורים עם מספר תיאוריות מקנה להם תובנות רבות יותר אודות קשת רחבה יותר של שגיאות.

לגבי פרק א.2, לדעתנו, <u>למודעותם של מורים לגבי מיונים אפשריים של שגיאות מתמטיות</u> תרומה דומה לזו שיש למודעותם לגבי סיבות אפשריות לשגיאות. שימוש במיונים של שגיאות עשוי לסייע למורים:

א. **לבחון שגיאות תלמידים בהיבט רוחבי המתייחס למאפיינים משותפים לשגיאות, אשר נראות שונות לכאורה**. בחינה כזו עשויה לספק מידע לגבי "שגיאות-עקשניות" (שתלמיד נוטה לעשות שוב ושוב). למשל, נטייה של תלמידים להוסיף נתונים לבעיות או להעתיק באופן שגוי את הנתונים.

ב. **לנבא שגיאות תלמידים למטלות חדשות** לאור נטייה של תלמיד לשגות בדרך מסוימת במטלות שונות. ניתן לנבא קושי, למשל, כאשר עומדים להציג בעיה לתלמיד בעל נטייה מוכרת להעתיק באופן שגוי את הנתונים, לתלמיד שמתקשה לקרוא את השאלה, או לתלמיד המתקשה בפירוש השאלה למרות שקריאתו רהוטה.

ג. **לתקשר ולדון עם עמיתיהם** (ואולי גם עם התלמידים) **בשגיאות מתמטיות**. לצורך המיונים מאופיינות השגיאות בדרכים שונות. המונחים המשמשים כמאפייני השגיאות מספקים שפה ודרך לשוחח על הרעיונות השגויים ולהתמקד בדיון אודות הנקודה בה מתעורר הקושי.

מעבר לכך, גם כאן אנו רואות חשיבות מיוחדת ל<u>היכרותם של מורים עם מיונים **שונים** של שגיאות</u>, והסיבות לכך דומות:

1. **החשיבות שיש בהבלטת מאפיינים שונים של אותה שגיאה** – מיונים שונים מתבססים, לעיתים, על אפיונים שונים של קשיים או שגיאות. למשל, מיון המתבסס על שגיאות בתוצאות המתמטיות לעומת מיון המתמקד בבחירת דרכי ההתרה, או מיון המתייחס לשלבים במהלך של התרת בעיות מתמטיות (קריאה, הבנה, העברה, מיומנויות עבודה וקידוד). ברור שאפיון וניתוח שגיאה מתמטית תוך התייחסות למספר מסגרות ממיינות עשוי להקנות למורים מידע רב יותר לגבי הידע המתמטי של התלמידים וסוגי הקשיים בהם הם נתקלים.

2. **מגבלות המיונים השונים** – כשבוחנים שגיאה מתמטית מסוימת, לא כל מיון ניתן ליישום. לכן, ההיכרות של מורים עם שיטות מיון שונות מקנה להם אפשרויות רבות יותר להבנת שגיאות שונות.

בשל החשיבות שאנו מייחסות ל<u>מודעות מורים לגישות הרווחות בקהיליית החינוך המתמטי לגבי התייחסות לשגיאות של תלמידים בהוראה, ולהיכרות של מורים עם דרכי התייחסות שונות שהציעו</u>

מומחים בתחום לשגיאות במהלך הוראת מתמטיקה, דנו בפרקים א.3 ו- א.4 בשאלות: "האם כדאי להשתמש בשגיאות בהוראה?" ו- "כיצד אפשר להשתמש בשגיאות בהוראה?"

ידוע שלאמונות ולעמדות של מורים לגבי תחום הדעת ולגבי סוגיות הוראתיות שונות יש השפעה מכרעת על ההחלטות הדידקטיות שהם מקבלים (למשל, Thompson, 1984). כמו כן ידוע שמורים ואנשי חינוך מתמטי שונים מחזיקים בדעות שונות לגבי יתרונות וחסרונות שעלולים להיות לשימוש בשגיאות בהוראת מתמטיקה.

לדעתנו, דיון עם המורים בעמדותיהם לגבי דרכים שונות להתייחסות לשגיאות בשיעורי מתמטיקה, ובדעותיהם של חוקרים ואנשי חינוך מתמטי בנושא, עשוי לתרום לליבון אמונות שאינן מבוססות וכאלה שראוי לבדוק את ההנחות שבבסיסן בדיקה מחקרית.

בנוסף, חשיפת מורים לאפשרויות דידקטיות מגוונות, המאפשרות צורות שונות של התייחסויות לשגיאות בכיתה (למשל, התייחסות אישית לעומת קבוצתית, תיקון לעומת חקר) מעשירה את הרפרטואר הפדגוגי-תכני שלהם, מעניקה בסיס ראוי לעמדותיהם לגבי שימוש בשגיאות בהוראה, ומקנה להם כלים דידקטיים להשתמש השגיאות בתכנון השיעורים ובמהלכם.

בהתבסס על המלצות חוקרים שונים, ברצוננו להציע התייחסות למימדים הבאים לשם ניתוח אירועי השגיאות:

א. אופי השגיאה	ב. רמת דיון המתמטי
ג. מצבי הלמידה שבאירוע השגיאה	ד. רמת המעורבות של הלומד באירוע השגיאה
ה. מקור השגיאה	ו. המטרות ההוראתיות של הפעילות
ז. המסגרת שבה מפתחים אירועי שגיאה	ח. תוצאות מרכזיות של הפעילות

לסיכום, אנו מאמינות כי ההיכרות עם מסגרות תיאורטיות ועם מיונים שונים עשויה לספק למורים כלי רב עוצמה לנתח (לבד וביחד) פתרונות שונים, נכונים ושגויים, של תלמידים, ואף לנבא שגיאות אפשריות למטלות חדשות בנושאים שונים. לא פחות חשובה, מודעותם של המורים לאמונותיהם האישיות ולאמונות של חוקרים מתחום החינוך המתמטי לגבי יתרונות וחסרונות שיש בשימוש בשגיאות בהוראה, וכן היכרותם עם גישות ודרכים שונות לעשות זאת. דרכי הוראה שיהיו רגישות לאוכלוסיות שונות של תלמידים, לתכנים שונים ולנסיבות מיוחדות (כמו מתח שלפני בחינה) המכתיבות במידה רבה את מהלכי ההוראה בפועל.

לדעתנו, יכולת ניתוח וניבוי שגיאות, ניתוח מושכל של עמדות שונות לגבי אפשרויות לשילוב שגיאות בהוראה והיכרות עם מהלכי הוראה מתאימים מאדירים את כוחם של המורים לתכנן את מהלכי ההוראה תוך רגישות לצרכים המתמטיים של תלמידיהם. אוצר המילים שמביאים עמם המסגרות התיאורטיות, המיונים השונים והספרות המקצועית לגבי "גישות לשגיאות בהוראת מתמטיקה" מספק כלי תקשורתי ראוי בתכנון ההוראה, במהלכה ובניתוח רפלקטיבי של ההתרחשויות בכיתה.

שאלה חשובה שעולה היא – באלו דרכים כדאי / אפשר לדון עם המורים בסוגיות אלה.
הצעות בעניין זה נציג במסגרת הפעילויות המובאות בשער שני של החוברת.

שער ב': משימות ופעילויות – ניתוח שגיאות, אירועי שגיאה, הערות והארות.

שער זה מציג פעילויות המתבססות על סקירת הספרות המקצועית שהוצגה בשער ראשון של חוברת זו. הפעילויות המוצגות בפרקים ב.1 – ב.4 עוסקות בהיבטים שונים של שגיאות, מקומן בלמידה ושימוש בשגיאות בהוראה:

פרק ב.1: **מדוע שוגים?**

הפעילויות בפרק זה עוסקות בניתוח שגיאות מתמטיות ובסיבות אפשריות להיווצרותן, תוך התייחסות להצעותיהם של חוקרים שעבודותיהם הוצגו בשער א'.

פרק ב.2: **איזה סוגים של שגיאות נוטים לומדים לעשות?**

הפעילויות בפרק עוסקות באפיון שגיאות תוך התייחסות למיונים שונים של שגיאות מתמטיות אשר הוצעו על ידי מספר חוקרים והוצגו בשער א'.

פרק ב.3: **האם להשתמש בשגיאות בהוראה? אם כן, כיצד?**

הפעילויות בפרק זה מעודדות דיון בעמדות שונות של מורים ושל חוקרים בתחום הוראת מתמטיקה לגבי שילוב שגיאות במהלך ההוראה, תוך התייחסות לגישות שתוארו בשער א'.

פרק ב.4: **אירועי שגיאה בשיעורי מתמטיקה**

הפעילויות בפרק זה עוסקות בניתוח מצבי הוראה המתייחסים לשגיאות על פי קריטריונים מתמטיים ודידקטיים שהוצגו בשער א'.

פרק ב.5: **מילות סיכום, הערות והארות...**

בפרק זה מובאות התייחסויות שונות לפעילויות שהוצגו בפרקים ב.1 – ב.4.

לכל פרק מילות פתיחה המציגות באופן מפורט יותר את מבנה הפעילויות בפרק.

פרק ב.1   מדוע שוגים?

בפרק זה תשע פעילויות.

בשלוש הפעילויות הראשונות, "מסיבות לשגיאות..." יש לחבר בעיות תוך התבססות על המסגרות התיאורטיות של סתוי ותירוש, של טול ווינר, ושל פישביין אשר הוצגו בפרק א.1 שבשער א'. כמו כן יש להתיר את הבעיות ולהציג שגיאות אופייניות רלוונטיות.

פעילות 1.1 מתמקדת בכללים האינטואיטיביים *יותר מ A - יותר מ B* ו- *שווה ב A – שווה ב B* (על פי סתוי ותירוש).
פעילות 1.2 מתמקדת בדימויי מושגים והגדרותיהם (טול ווינר).
פעילות 1.3 מתמקדת בהיבטים פורמאליים, אלגוריתמיים ואינטואיטיביים של ידע ושגיאות מתמטיות (פישביין).

בפעילות 1.4 מתבקשים לחבר שאלון בן ארבעה פריטים (אפשר להשתמש בבעיות שחוברו בפעילויות 1.1 – 1.3), להציגו לתלמידים ולנתח את תשובותיהם תוך שימוש בשלוש המסגרות התיאורטיות, של סתוי ותירוש, של טול ווינר, ושל פישביין.

הפעילות הבאה, פעילות 1.5, עוסקת בשגיאות ובסיבות לשגיאות בנושא: מספרים ופעולות. באמצעות פעילות זו ניתן לאתגר דיון מתמטי, דיון בשגיאות של תלמידים, ניבוי שגיאות והעלאת השערות לגבי סיבות אפשריות לשגיאות.

שלוש הפעילויות הבאות עוסקות בנוסחאות אלגבריות: בחינת נכונות מתמטית (פעילות 1.6), זיהוי שגיאות וניתוח הסיבות לשגיאות על פי המסגרות התיאורטיות שנלמדו (פעילות 1.7) וניתוח תגובות של תלמידים לנוסחאות אלה (פעילות 1.8).

דף הפעילות 1.9, האחרון בפרק זה, נועד לעורר דיון בסוגיות מרכזיות הקשורות לידע מורים לגבי סיבות אפשריות לשגיאות מתמטיות של תלמידים.

בפרק ב.5 מוצגות הערות והארות לגבי הפעילויות מפרק זה.

פעילות 1.1 – מסיבות לשגיאות... שימוש בכללים אינטואיטיביים

חברו בעיות שתלמידים צפויים לעשות בהם שגיאה שמקורה בכלל האינטואיטיבי **יותר מ A – יותר מ B.**

פתרו את הבעיות **והציגו שגיאות** מתאימות.

<u>בעיה 1</u>:

<u>פתרון</u>:

<u>שגיאה מתאימה</u>:

<u>בעיה 2</u>:

<u>פתרון</u>:

<u>שגיאה מתאימה</u>:

חברו בעיות שתלמידים צפויים לעשות בהם שגיאה שמקורה בכלל האינטואיטיבי **שווה ב A – שווה ב B**.

פתרו את הבעיות **והציגו שגיאות** מתאימות.

<u>בעיה 1</u>:

<u>פתרון</u>:

<u>שגיאה מתאימה</u>:

<u>בעיה 2</u>:

<u>פתרון</u>:

<u>שגיאה מתאימה</u>:

פעילות 1.2 – מסיבות לשגיאות... שימוש בדימויים ובהגדרות שגויות

חברו בעיות שתלמידים צפויים לעשות בהם שגיאה שמקורה בפערים בין דימוי מושג או הגדרה אישית של המושג לבין הגדרתו המתמטית של המושג. **פתרו** את הבעיות **והציגו שגיאות** מתאימות.

בעיה 1:

פתרון:

שגיאה מתאימה:

בעיה 2:

פתרון:

שגיאה מתאימה:

חברו בעיות העשויות להצביע על מידור בחשיבה מתמטית.

בעיה 1:

פתרון:

שגיאה מתאימה:

בעיה 2:

פתרון:

שגיאה מתאימה:

תופעת המידור...

פעילות 1.3 – מסיבות לשגיאות... ידע פורמאלי, אלגוריתמי ואינטואיטיבי

חברו בעיות שתלמידים צפויים לעשות בהם שגיאה שמקורה בפערים בין המרכיבים הפורמאליים והאינטואיטיביים של הידע המתמטי. **פתרו** את הבעיות **והציגו שגיאות** מתאימות.

בעיה 1:

פתרון:

שגיאה מתאימה:

בעיה 2:

פתרון:

שגיאה מתאימה:

חברו בעיות שתלמידים צפויים לעשות בהם שגיאה שמקורה בפערים בין המרכיבים האלגוריתמיים והאינטואיטיביים של הידע המתמטי. **פתרו** את הבעיות **והציגו שגיאות** מתאימות.

בעיה 1:

פתרון:

השגיאה המתאימה:

בעיה 2:

הפתרון:

השגיאה המתאימה:

פעילות 1.4 – ניתוח שגיאות באמצעות מסגרות תיאורטיות שונות

חברו שאלון ובו ארבע בעיות שבהן תלמידים צפויים, לדעתכם, לשגות (ניתן לבחור מהבעיות שחוברו בפעילויות 1.1-1.3). **הציגו** את השאלות לתלמידים **והעלו סיבות** אפשריות לכל אחת **משגיאותיהם באמצעות** שלוש **המסגרות התיאורטיות**.

מלאו את גיליון ההערכה הבא:

בעיה	ניתוח על פי:	סתוי ותירוש	טול ווינר	פישביין
בעיה 1				
שגיאה א:				
שגיאה ב:				
בעיה 2				
שגיאה א:				
שגיאה ב:				
בעיה 3				
שגיאה א:				
שגיאה ב:				
בעיה 4				
שגיאה א:				
שגיאה ב:				

פעילות 1.5 – מספרים ופעולות: ניבוי שגיאות וניתוח סיבות אפשריות

פתרו כל תרגיל בשתי דרכים, ציינו **אלו שגיאות צפויות** בפתרונות תלמידים, **אפיינו ומיינו** את השגיאות, והצביעו על **סיבות אפשריות לשגיאות** אלה.

התרגיל	**שני פתרונות**	**שגיאות צפויות**	**סיבות אפשריות לשגיאות**
$\frac{5+7}{5+14}$	**פתרון א** **פתרון ב**		
$\frac{3+5}{6+10}$	**פתרון א** **פתרון ב**		
$\frac{5\cdot 12+3}{5\cdot 4+12}$	**פתרון א** **פתרון ב**		
סמן: $\frac{1}{3} < = > \frac{1}{2}$	**פתרון א** **פתרון ב**		
$(\frac{1}{2})^4$ גדול/ שווה / קטן $(\frac{1}{3})^2$	**פתרון א** **פתרון ב**		

פעילות 1.6 – נוסחאות אלגבריות: מה נכון ומה שגוי?

לפניכם נוסחאות שהציעו תלמידים. קבעו את נכונות הנוסחאות (הקיפו את קביעתכם והסבירו). האם יש, לדעתכם, ערכים עבור b, a ו- m שעבורם הנוסחה נכונה? (הקיפו את קביעתכם והסבירו).

מס'	**קביעת נכונות לגבי הנוסחה**	**נימוק הקביעה: נכונה / לא נכונה**	**האם יש ערכים עבור b, a ו- m שעבורם הנוסחה נכונה?**
1	$m(a-b)=ma-mb$ הנוסחה נכונה / לא נכונה		**כן** – הדגם: **לא** – מדוע?
2	$(a+b)^2=a^2+b^2$ הנוסחה נכונה / לא נכונה		**כן** – הדגם: **לא** – מדוע?
3	$m\times(a\times b)=m\times a\times m\times b$ הנוסחה נכונה / לא נכונה		**כן** – הדגם: **לא** – מדוע?
4	$m\times\lvert a-b\rvert=m\times\lvert a\rvert-m\times\lvert b\rvert$ הנוסחה נכונה / לא נכונה		**כן** – הדגם: **לא** – מדוע?
5	$(ab)^2=a^2b^2$ הנוסחה נכונה / לא נכונה		**כן** – הדגם: **לא** – מדוע?
6	$\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ הנוסחה נכונה / לא נכונה		**כן** – הדגם: **לא** – מדוע?

פעילות 1.7 – נוסחאות אלגבריות: שגיאות וסיבות אפשריות

לפניכם נוסחאות שהציעו תלמידים. ציינו **מהן הנוסחאות השגויות** ונתחו את **הסיבות** האפשריות לשגיאות (ראו, פישביין טול ווינר וסתוי ותירוש). **נבאו** נוסחאות שגויות נוספות ונתחו אותן באותו אופן.

מס	**הנוסחאות שהציעו התלמידים**	**סיבות אפשריות לשגיאות**
1	$m(a-b)=ma-mb$ הנוסחה נכונה / לא נכונה	**על פי פישביין:**
2	$(a+b)^2=a^2+b^2$ הנוסחה נכונה / לא נכונה	
3	$m\times(a\times b)=m\times a\times m\times b$ הנוסחה נכונה / לא נכונה	
4	$m\times\lvert a-b\rvert=m\times\lvert a\rvert-m\times\lvert b\rvert$ הנוסחה נכונה / לא נכונה	
5	$(ab)^2=a^2b^2$ הנוסחה נכונה / לא נכונה	**על פי טול ווינר:**
6	$\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ הנוסחה נכונה / לא נכונה	
7		
8		**על פי סתוי ותירוש:**
9		
10		

פעילות 1.8 – נוסחאות אלגבריות: תלמידים מגיבים לתלמידים

שלוש תלמידות יעל, אסנת וענת בחנו את הנוסחאות. נתחו את שיקולי הדעת שהציגו.

יעל כתבה *כל הנוסחאות נכונות כי כולן מתבססות על חוק הפילוג.* נתחו את תשובתה של יעל. באיזו מסגרת תיאורטית מתאים, לדעתך, להשתמש לשם כך? מדוע? איזה "נוסחאות" שגויות נוספות תקבל יעל?
אסנת כתבה: *כל הנוסחאות נכונות כי ב-2 האגפים של כל נוסחה יש אותן אותיות ופעולות.* נתחו את תשובתה של אסנת. באיזו מסגרת תיאורטית מתאים, לדעתך, להשתמש לשם כך? מדוע? איזה "נוסחאות" שגויות נוספות תקבל אסנת?
ענת כתבה *כל הנוסחאות שגויות כי חוק הפילוג פועל רק בכפל מעל חיבור.* נתחו את תשובתה של ענת. באיזו מסגרת תיאורטית מתאים, לדעתך, להשתמש לשם כך? מדוע? איזה נוסחאות נכונות נוספות תדחה ענת?

פעילות 1.9 – עמדות ודעות: מסגרות תיאורטיות וסיבות לשגיאות...

1. האם, לדעתכם, ההיכרות עם מסגרות תיאורטיות המציגות סיבות אפשריות לשגיאות של תלמידים במתמטיקה, עשויה להועיל לכם בהוראה? **בהחלט כן / במידה מועטה / כלל לא** (הקיפו, הסבירו והדגימו).

2. האם יש יתרונות בהכרת מסגרות תיאורטיות <u>שונות</u> למטרה זו? הסבירו והדגימו.

3. בפרק זה עסקנו בשגיאות מתמטיות שניתן להסביר את מקורותיהן באמצעות שלוש מסגרות תיאורטיות. האם יש, לדעתכם, שגיאות הנגרמות בשל סיבות אחרות (כלומר, לא ניתן להסבירן על ידי תיאוריות אלה)? הסבירו והדגימו.

פרק ב.2 איזה סוגים של שגיאות נוטים לומדים לעשות?

בפרק זה תשע פעילויות המתייחסות לאפיון ומיון של שגיאות מתמטיות. ניתן לבסס את הדיונים בכיתה על המיונים המוצעים בפרק א.2, וניתן כמובן להציע גם מיונים נוספים.

שתי הפעילויות הראשונות עוסקות בבעיות מילוליות.

בפעילות 2.1 יש להתיר את הבעיות, לנבא שגיאות של תלמידים ולמיין את השגיאות המוצעות.
בפעילות 2.2 יש למיין פתרונות שגויים הנתונים לבעיות אלה.

פעילות 2.3 עוסקת במיון פתרונות שגויים בנושא מספרים ופעולות.

שלוש הפעילויות הבאות עוסקות בנוסחאות אלגבריות.

בפעילות 2.4 יש להצביע על נוסחאות נכונות ושגויות, להסביר מהן השגיאות ולמצוא תנאים שעבורם הנוסחאות תקפות.

בפעילות 2.5 מוצגות נוסחאות אלגבריות נכונות ושגויות. יש לזהות, לאפיין, למיין את השגיאות ולנבא שגיאות נוספות מהסוגים שזוהו.

בפעילות 2.6 יש לנתח שלוש תגובות של תלמידים לנוסחאות המוצגות בפעילות 2.4.

פעילות 2.7 עוסקת במיון פתרונות גיאומטריים שגויים.

בפעילות 2.8, "ממיונים לשגיאות..." יש להתייחס לארבעה מיונים המוצגים בפרק א.2, להסביר ולהדגים את סוגי השגיאות השייכים למיונים אלה.

הפעילות האחרונה בפרק זה, פעילות 2.9 אמורה לעורר דיון בעמדותיהם של מורים לגבי סוגיות מרכזיות הקשורות למיונים של לשגיאות מתמטיות.

בפרק ב.5 מוצגות הערות והארות לגבי השימוש בפעילויות מפרק זה.

פעילות 2.1 – ניבוי ומיון שגיאות בבעיות מילוליות

פתרו את הבעיות הבאות, ציינו אלו **שגיאות צפויות** בפתרונות תלמידים **ואפיינו ומיינו שגיאות** אלה.

<u>בעיה א</u> חבית מלאה יין שוקלת 65 ק"ג. משקל החבית הריקה 15 ק"ג. כמה שוקלות 10 חביות מליאות למחצה?

פתרון:

שגיאות צפויות:	**סוג השגיאה:**

<u>בעיה ב</u> דני בן 13 ואבא מבוגר ממנו לפחות ב- 25 שנים. סבא בן 78 ואבא צעיר ממנו ב- 30 שנים לפחות. השנה אבא חוגג מספר שלם של עשורים (למשל, בן 40, 50, 60, 70, 80, 90). בן כמה אבא?

פתרון:

שגיאות צפויות:	**סוג השגיאה:**

<u>בעיה ג</u> דני קנה 8 חפיסות שוקולד. מחיר חפיסה 7 ₪. כמה עודף קיבל אם נתן 100 ₪ ?

פתרון:

שגיאות צפויות:	**סוג השגיאה:**

בעיה ד 75 תלמידי כיתות ד' יוצאים לטיול. המורה הזמינה שני אוטובוסים, בכל אוטובוס יש 44 מקומות ישיבה. כמה תלמידים תושיב בכל אוטובוס?

פתרון:

שגיאות צפויות:	**סוג השגיאה:**

בעיה ה 567 תלמידי בית ספר רננים יוצאים לטיול. על אחת המורות הוטל להזמין אוטובוסים. בכל אוטובוס יש 44 מקומות ישיבה. כמה אוטובוסים תזמין?

פתרון:

שגיאות צפויות:	**סוג השגיאה:**

פעילות 2.2 – אפיון ומיון פתרונות שגויים בבעיות מילוליות

לפניכם פתרונות שגויים של תלמידים לבעיות מילוליות. אפינו ומיינו את השגיאות על פי שיקול דעתכם (ניתן להסתייע במיונים המוצעים בפרק א.2).

הבעיה	פתרונות שגויים	אפיון וסיווג השגיאות
חבית מליאה יין שוקלת 65 ק״ג. משקל החבית הריקה 15 ק״ג. כמה שוקלות 10 חביות מליאות למחצה?	משקל 10 חביות מליאות למחצה $65 \times ½ \times 10 =$ 325 ק״ג	
דני בן 13 ואבא מבוגר ממנו לפחות ב-25 שנים. סבא בן 78 ואבא צעיר ממנו ב- 30 שנים לפחות. השנה אבא חוגג מספר שלם של עשורים (למשל, בן 40, 50, 60, 70, 80, 90). בן כמה אבא?	$x = 13 + 25$ $x = 38$ האב בן 30 כי זה 3 עשורים שלמים, פחות מ-38.	
דני קנה 8 חפיסות שוקולד. מחיר חפיסה 7₪. כמה עודף קיבל אם נתן 100 ₪ ?	$100 – (8 \times 7) =$ $100–54 =$ 46 ₪	
	$8 \times 7 =$ 56 ₪	
	$100 – (8 \times 7) =$ 56 ₪	
75 תלמידי כיתות ד׳ יוצאים לטיול. המורה הזמינה שני אוטובוסים. בכל אוטובוס יש 44 מקומות ישיבה. כמה תלמידים תושיב בכל אוטובוס?	תלוי כמה תלמידים יש בכל כיתה. למשל אם בכיתה ד 1 יש 45 תלמידים ובכיתה ד 2 יש 30 תלמידים אז המורה תושיב את תלמידי ד 1 באוטובוס אחד ואת תלמידי ד 2 באוטובוס שני. תלמידים לא אוהבים לטייל עם כיתה אחרת.	
	$75 : 2 = 37 ½$	
567 תלמידי בית ספר רננים יוצאים לטיול. על אחת המורות הוטל להזמין אוטובוסים. בכל אוטובוס יש 44 מקומות ישיבה. כמה אוטובוסים תזמין?	$567 : 44 =$ 12.886363636363636363636363636 כלומר 12 אוטובוסים.	

פעילות 2.3 – מספרים ופעולות: מיון פתרונות שגויים

לפניכם פתרונות שגויים של תלמידים לתרגילים בנושא מספרים ופעולות. אפיינו ומיינו את השגיאות.

התרגיל	פתרונות שגויים	אפיון וסיווג השגיאות
200:50:10	$200 : 50 : 10 =$ $20 : 5 : 1 = 4$	
$\frac{5+7}{5+14}$	$\frac{5+7}{5+14}=\frac{1+1}{1+2}=\frac{2}{3}$	
$\frac{5\cdot10+13}{5\cdot13+10}$	$\frac{5\cdot10+13}{5\cdot13+10}=\frac{1\cdot10+13}{1\cdot13+10}=$ $\frac{1\cdot1+1}{1\cdot1+1}=\frac{2}{2}=1$	
9-5×[9-5×(9-5)]	$4\times[4\times(9-5)] =$ $4 \times 4 \times 4 = 64$	
סמן: $\frac{1}{2}$ > = < $\frac{1}{3}$	שליש גדול מחצי. בגלל ששלוש גדול משתיים.	
$(\frac{1}{2})^4$ > = < $(\frac{1}{3})^2$	שלוש גדול מ-2 לכן שליש גדול מחצי. החזקות לא משנות את היחס הזה, לכן $(\frac{1}{2})^4 < (\frac{1}{3})^2$	
$\frac{15^4}{15^2}$	$\frac{15^4}{15^2}=15^{4:2}=15^2$	

פעילות 2.4 – מיון נוסחאות אלגבריות : הנכון והשגוי...

לפניכם נוסחאות שהציעו תלמידים. קבעו את נכונות הנוסחאות (הקיפו את קביעתכם והסבירו) האם יש ערכים עבור a ו- b שעבורם הנוסחה נכונה?

מס'	קביעת נכונות לגבי הנוסחה	נימוק הקביעה : נכונה / לא נכונה	האם יש ערכים עבור b, a ו- m שעבורם הנוסחה נכונה?
1	$7^{a+b} = 7^a + 7^b$ הנוסחה נכונה / לא נכונה		**כן** – הדגם : **לא** – מדוע?
2	$(a+b)^7 = a^7 + b^7$ הנוסחה נכונה / לא נכונה		**כן** – הדגם : **לא** – מדוע?
3	$(a+b):7 = a:7 + b:7$ הנוסחה נכונה / לא נכונה		**כן** – הדגם : **לא** – מדוע?
4	$7:(a+b) = 7:a + 7:b$ הנוסחה נכונה / לא נכונה		**כן** – הדגם : **לא** – מדוע?
5	$a^b = b^a$ הנוסחה נכונה / לא נכונה		**כן** – הדגם : **לא** – מדוע?

פעילות 2.5 – אפיון, מיון וניבוי שגיאות בנוסחאות אלגבריות

לפניכם נוסחאות שגויות שהציעו תלמידים. קבעו את נכונות הנוסחאות מיינו את השגיאות על פי בוראסי, על פי רדאץ, ועל פי הרשקוביץ, וינר וברוקהימר. הציעו שגיאות נוספות מאותם סוגים, והסבירו את בחירת השגיאות הנוספות.

מס	הנוסחאות השגויות	אפיון ומיון השגיאות
1	$7^{a+b} = 7^a + 7^b$	**על פי בוראסי:**
2	$(a+b)^7 = a^7 + b^7$	
3	$\sqrt[3]{a^3 + b^3} = a + b$	
4	$7:(a+b) = 7:a + 7:b$	**על פי רדאץ:**
5	$a^b = b^a$	
6		
7		**על פי הרשקוביץ, וינר וברוקהימר:**
8		
9		
10		

פעילות 2.6 – נוסחאות אלגבריות: ניתוח תגובות תלמידים

<u>דני כתב</u>: $a^b=b^a$ *חוק החילוף פועל בחיבור* $a+b=b+a$ *אבל לא בחיסור* $b-a\neq a-b$ *למשל,* $4-2\neq 2-4$ *ולא בחילוק* $b:a\neq a:b$ *למשל,* $4:2\neq 2:4$. *חוק החילוף פועל בכפל, שהוא חיבור מקוצר* $a\times b=b\times a$ *למשל,* $2\times 4=4\times 2$ *וגם בחזקה* $a^b=b^a$ *כי היא כפל מקוצר, למשל,* $4^2=2^4$.

נתחו את הפתרון של דני. באיזה מיון מתאים, לדעתכם, להשתמש כדי לאפיין את השגיאה? ציינו "נוסחאות" שגויות נוספות שדני יקבל כנכונות?

<u>איתן כתב</u>: *בגלל חוק הפילוג* $7^{a+b}=7^a+7^b$ *וגם* $(a+b)^7=a^7+b^7$, *ובגלל חוק החילוף* $7^{a+b}=(a+b)^7$

נתחו את הפתרון של איתן. באיזה מיון מתאים, לדעתכם, להשתמש כדי לאפיין את השגיאה? ציינו "נוסחאות" שגויות נוספות שאיתן יקבל כנכונות?

<u>איילת כתבה</u>: *בדקתי את הנוסחא* $(a+b):7=a:7+b:7$ *על ידי הצבה של המון מספרים, וראיתי שהיא נכונה. למשל, כי* $14:7+21:7=2+3=5$ *וגם* $(14+21):7=35:7=5$ *אז גם* $7:(a+b)=7:a+7:b$

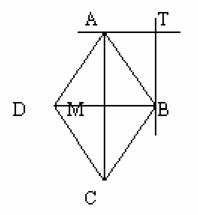
נתחו את הפתרון של איילת. באיזו מיון מתאים, לדעתכם, להשתמש? מדוע? ציינו "נוסחאות" שגויות נוספות שאיילת תקבל כנכונות?

פעילות 2.7 – ניתוח ומיון שגיאות גיאומטריות

<u>פתרו את הבעיות</u> הבאות ופרטו את דרך הפתרון שלכם. לאחר מכן התייחסו לפתרון השגוי המוצג <u>בטבלת הניתוח</u>, הצביעו על השגיאה בכל שאלה ואפיינו אותה.

דף עבודה: בעיות בגיאומטריה

<u>בעיה א</u> נתון מרובע שכל צלעותיו שוות באורכן ל- 10 ס"מ ואורך אחד האלכסונים גם כן שווה ל- 10 ס"מ. מצאו את היקף המרובע ואת שיטחו.



<u>בעיה ב</u> נתון מעוין ABCD ונקודה M נקודת מפגש האלכסונים (AC ו- BD).
העבירו דרך נקודה A ישר מקביל לאלכסון BD. העבירו דרך נקודה B ישר מקביל לאלכסון AC. הישרים המקבילים נחתכים בנקודה T . הוכיחו כי ATBM מלבן.

<u>בעיה ג</u> נתון משולש ABC . אורך הצלע AC הוא 4 ס"מ, אורך הצלע BC היא 3 ס"מ. האם ייתכן כי אורך הצלע AB הוא 8.5 ס"מ? 7.5 ס"מ? 6.5 ס"מ? הסברו את תשובתכם.

<u>בעיה ד</u> נתון משולש BCD ידוע CD=BC ועל צלע BD בנו משולש שווה צלעות BDT. התקבל מרובע BCDT. מהו סוג המרובע שהתקבל?

<u>בעיה ה</u> הגדירו מקבילית

<u>בעיה ו</u> הגדירו טרפז שווה שוקיים.

גיליון ניתוח שגיאות

בעיה	פתרונות שגויים	זיהוי וסיווג השגיאות
א	היקף המרובע 40 ס״מ = 10 ס״מ × 4. במרובע כל הצלעות שוות לכן הזוויות שוות, וגודלן 90 מעלות. לכן השטח: $100 = 10 \times 10$.	
ב	ATBM מקבילית כי נתון AT‖MB ו- TB‖AM כלומר, זהו מרובע בעל שני זוגות של צלעות מקבילות, ואז הזוויות הנגדיות 90 מעלות. מסקנה – ATBM מלבן.	
ג	אף אחת מהתשובות אינה נכונה. אורך הצלע הוא 5 ס״מ. לפי משפט פיתגורס: $(\overline{AB})^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$ מכאן, $\overline{AB} = \sqrt{25} = 5$ כלומר, AB אורכו 5 ס״מ.	
ד	זהו מעוין, כי כל הצלעות שוות. CD=BC אז משולש BCD הוא שווה צלעות והוסיפו עוד שתי צלעות שוות. כל הצלעות שוות.	
ה	מקבילית היא מרובע בעל זוג צלעות מקבילות וזוג צלעות שוות.	
ו	טרפז שווה שוקיים הוא מרובע בעל זוג צלעות מקבילות ושוות.	

פעילות 2.8 – ממיונים לשגיאות...

שאלה 1

מובשוביץ-הדר, זסלבסקי וענבר הציעו מיון שגיאות בן שש קטגוריות.

הדגימו כל קטגוריה באמצעות שגיאות מתאימות.

הקטגוריה	דוגמאות
שימוש בלתי ראוי במידע נתון	
משמעות לשונית שגויה	
הסקה לוגית בלתי תקיפה	
פתרון "בלתי מאומת"	
שגיאות טכניות	
עיוות במשפט או הגדרה	

האם יש לדעתכם קטגוריות המורות על שגיאות "חמורות יותר"? אם כן, אילו הן? מדוע?

האם הייתם משנים מיון זה בדרך כלשהי? אם כן, כיצד? מדוע?

שאלה 2

בוראסי הציעה מיון שגיאות בן 13 קטגוריות: (א) שגיאות חישוביות, (ב) תוצאה שגויה או חלקית, (ג) הגדרה שגויה או חלקית, (ד) הנחה שגויה או חלקית, (ה) אלגוריתם שגוי, (ו) הסברים שגויים או שאינם מספקים, (ז) קבלת פתרונות סותרים, (ח) העברה, ללא הצדקה, של תכונה או הגדרה להקשר שונה, (ט) קבלת תוצאות שאינן הגיוניות, (י) הגעה לתוצאה נכונה בדרך לא יעילה, (יא) שגיאות בתהליך שמוליכות לתוצאות נכונות, (יב) הוכחה שגויה או חלקית למשפט, ו- (יג) צעד ניסיוני שגוי במהלך בדיקת דרכים להתרת בעיה חדשה. **בחרו 5 קטגוריות הנראות לכם חשובות ביותר, והדגימו כל אחת על ידי שגיאה מתאימה.**

הקטגוריה	דוגמאות

הסבירו מדוע בחרתם את חמש הקטגוריות האלה.

שאלה 3

רדאץ הציע מיון שגיאות בן שש קטגוריות. **הדגימו כל קטגוריה באמצעות שגיאה מתאימה.**

הקטגוריה	דוגמאות
(א) שגיאות הנובעות מקשיים בקבלת מידע הקשור לתפיסה מרחבית	
(ב) שגיאות הנובעות מחוסר שליטה במיומנויות, עובדות ומושגים שנלמדו בעבר	
(ג) שגיאות הנובעות מאסוציאציות מוטעות ומקיבעון בחשיבה	
(ד) שגיאות הנובעות מיישום של חוקים או אסטרטגיות בלתי רלוונטיים	
(ה) שגיאות הנובעות משמיעה לקויה הגורמת לטעויות בקריאה, בכתיבה ובהטמעת החומר	
(ו) שגיאות הנובעות מהשפעתה המטעה של סדרת תרגילים או בעיות מילוליות	

2. **האם יש לדעתכם קטגוריות שבהן השגיאות חמורות יותר? אם כן, אילו הן? מדוע?**

3. **האם יש קטגוריות שהייתם מוסיפים למיון זה? אם כן, אילו? מדוע?**

פעילות 2.9 – עמדות ודעות: אפיונים ומיונים של שגיאות מתמטיות...

1. האם יש, לדעתך, חשיבות לכך שמורים יכירו מיונים שונים של שגיאות מתמטיות של תלמידים? מדוע?

2. האם הייתם מידעים מורה עמית לגבי מיון השגיאות של:

א. מובשוביץ-הדר, ענבר וזסלבסקי? כן / לא מדוע?

ב. בוראסי? כן / לא מדוע?

ג. ביינברידג' ? כן / לא מדוע?

ד. הרשקוביץ, וינר וברוקהיימר? כן / לא מדוע?

ה. רדאץ? כן / לא מדוע?

3. איזה שימוש דידקטי ניתן, לדעתכם, לעשות במיונים אלה?

4. האם הייתם מציעים מיון אחר של שגיאות מתמטיות? אם כן מהו?

פרק ב.3 האם להשתמש בשגיאות בהוראה? אם כן, כיצד?

בפרק זה חמש פעילויות שבאמצעותן ניתן לעורר דיון בו יוצגו דעות ועמדות של מורים לגבי שילוב שגיאות בהורת מתמטיקה.

בפעילות 3.1 נתלבט, תוך בחינת עמדות של מורות שונות, לגבי אפשרויות שונות לעשות שימוש בשגיאות בהוראה.

בפעילות 3.2 נדון בשאלה האם נציג בכיתה שגיאות של תלמידים וכן מטלות מאתגרות שגיאה, תוך התייחסות לתרגיל בשברים.

פעילות 3.3 תזמן דיון לגבי שימוש בשגיאות ובמיונים שונים של שגיאות בהוראת בעיות מילוליות.

פעילות 3.4 תזמן ניתוח פתרונות תלמידים באמצעות גיליונות מעקב לגבי מספרים ופעולות, ולאחר מכן בחינה ביקורתית של דרך הוראה זו.

בפעילות 3.5 נבחן את ההצעות של שלוש מורות לגבי התייחסות לשגיאות בהוראת הנושא מספרים ופעולות, ונביע בקורת מנומקת לרעיונות הדידקטיים שהן מציגות.

בפרק ב.5 מוצגות הערות והארות לגבי השימוש בפעילויות מפרק זה.

פעילות 3.1 – כיצד נעשה שימוש בשגיאות בהוראת מתמטיקה?

ארבע מורות, אורית, בתיה, גל ודפנה הציגו את דעותיהן לגבי שימוש בשגיאות בהוראת מתמטיקה. בחנו את הדעות השונות והשיבו על השאלות.

<u>אורית</u>: *כשאני מלמדת נושא, אני מראה איך פותרים בעיות ומדגישה נקודות מתמטיות חשובות. כשתלמיד שוגה בכיתה, אני מראה לו את הפתרון הנכון ומדגישה מה צריך לעשות בעיקר בשלב שבו טעה. אני לא מדברת על השגיאה ובטח שלא מראה לאחרים שגיאות כדי שלא לבלבל אותם.*

האם אתם מסכימים עם גישתה של אורית? כן / לא / אחר הסבירו את עמדתכם

<u>בתיה</u>: *כשאני מלמדת נושא מסוים אני בוחנת את המתמטיקה הרלוונטית ואת השגיאות האופייניות של תלמידים, כדי למנוע מתלמידי שגיאות. אני בוחרת תרגילים שבהם לא ישגו. אם מישהו בכל זאת שוגה בכיתה, בהפסקה אני מראה לו ששגה ואיך לתקן את השגיאה. אני לא מלמדת שגיאות.*

האם אתם מסכימים עם גישתה של בתיה? כן / לא / אחר הסבירו את עמדתכם

<u>גל</u>: *כשתלמיד עושה שגיאה עקרונית, אני מציגה אותה בפני כל הכיתה. עורכים דיון כדי להבהיר שזו שגיאה ומדוע זו שגיאה, במטרה שלא יעשו שגיאה זאת בעתיד. אני לא עוסקת בשגיאות שתלמידים בכיתה לא שגו בה.*

האם אתם מסכימים עם גישתה של גל? כן / לא / אחר הסבירו את עמדתכם

<u>דפנה</u>: *בכל נושא מתמטי שאני מלמדת, אני מכינה דפי עבודה המציגים פתרונות נכונים ופתרונות שגויים ומבקשת מתלמידים לזהות את השגיאות ולנתח אותן. אנחנו עובדים על דפי כאלה בהזדמנויות שונות, בפתיחת נושא, במהלכו או בשיעור מסכם.*

האם אתם מסכימים עם גישתה של דפנה? כן / לא / אחר הסבירו את עמדתכם

פעילות 3.2 – האם נציג פתרונות שגויים ובעיות מאתגרות שגיאות?

1. ידוע שכאשר מבקשים תלמידים לפתור את הביטוי $\frac{6+7}{18+28}$ בדרך אחת מרבית התלמידים פותרים נכון, ואילו כאשר מבקשים מהתלמידים לפתור בשתי דרכים, תלמידים רבים שוגים.

האם תבקשו מתלמידיכם לפתור בשתי דרכים? כן / לא מדוע?

2. ידוע שכאשר מבקשים תלמידים לפתור את הביטוי $\frac{6+7}{18+28}$ מתקבלים הפתרונות הבאים:

<u>פתרון א:</u> $\frac{6+7}{18+28}=\frac{13}{46}$ נכון / שגוי

הסבר:

<u>פתרון ב:</u> $\frac{6+7}{18+28}=\frac{1+1}{3+4}=\frac{2}{7}$ נכון / שגוי

הסבר:

<u>פתרון ג:</u> $\frac{6+7}{18+28}=\frac{6}{18}+\frac{7}{28}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4+3}{12}=\frac{7}{12}$ נכון / שגוי

הסבר:

בחנו כל אחד מהפתרונות, קבעו אם הפתרון נכון, והסבירו את קביעתכם. אם הפתרון שגוי, לדעתכם, הצביעו על השגיאה.

3. **האם תתנו לתלמידיכם לפתור דף עבודה כזה? כן / לא הסבירו את עמדתכם.**

פעילות 3.3 – בעיות מילוליות: דיון בשגיאות

1. **הציגו בפני עשרה תלמידים**, בראיונות אישיים, את הבעיות בדף העבודה הבא:

דף עבודה: בעיות מילוליות

בעיה א חבית מלאה יין שוקלת 65 ק"ג. משקל החבית הריקה 15 ק"ג. כמה שוקלות 10 חביות מליאות למחצה?

בעיה ב דני בן 13 ואבא מבוגר ממנו לפחות ב- 25 שנים. סבא בן 78 ואבא צעיר ממנו ב- 30 שנים לפחות. השנה אבא חוגג מספר שלם של עשורים (למשל, בן 40, 50, 60, 70, 80, 90). בן כמה אבא?

בעיה ג 567 תלמידי בית ספר רננים יוצאים לטיול. על אחת המורות הוטל להזמין אוטובוסים. בכל אוטובוס יש 44 מקומות ישיבה. כמה אוטובוסים תזמין?

2. פרטו בגיליון הניתוח **פתרונות נכונים** שונים של התלמידים, ציינו **פתרונות שגויים** שונים **ומיינו שגיאות** אלה על פי המיון של בינברידג' (פרק א.2, מיון 2.4) ועל פי מיון נוסף על פי בחירתכם.

גיליון ניתוח

בעיה	פתרונות נכונים	פתרונות שגויים	זיהוי וסיווג השגיאות
בעיה א			
בעיה ב			
בעיה ג			

3. עליכם לקיים עם התלמידים **שיעור בנושא בעיות מילוליות**. מה תעשו?

א. תציגו בפני התלמידים פתרונות נכונים שונים לשלוש השאלות.

ב. תציגו בפני התלמידים מבחר פתרונות נכונים ושגויים לשלוש השאלות, לשם דיון.

ג. תדונו עם כל הקבוצה בקשיים השונים של כל עשרת התלמידים.

ד. אחר. מה?

הסבירו בפירוט את תכנון השיעור.

4. האם מיון תשובות התלמידים, וניתוח השגיאות שימש אתכם בתכנון השיעור?

אם כן, כיצד? אם לא, מדוע?

פעילות 3.4 –פתרונות תלמידים וגיליונות מעקב : מספרים ופעולות

הציגו בפני קבוצה בת חמישה תלמידים לפחות את דף העבודה הבא:

פתרו כל תרגיל בשתי דרכים לפחות :

תרגיל 1 $200:50:10$ תרגיל 2 $\frac{5\cdot10+13}{5\cdot13+10}$ תרגיל 3 $9-5\times[9-5\times(9-5)]$

אספו ובדקו את עבודות התלמידים. **החזירו** לתלמידים את עבודותיהם בדוקות, **חלקו להם גיליונות מעקב** שבהם רשימת שגיאות אופייניות הקשורות לתרגילים אלה, ובקשו **מכל תלמיד למלא את גיליון המעקב** לגבי הפתרונות שהציג.

גיליון מעקב

	התרגיל: **הדרך:**	1 א	1 ב	2 א	2 ב	3 א	3 ב
	סוג השגיאה						
1.	טעות חיבור/ חיסור						
2.	טעות כפל/ חילוק						
3.	שגיאה בסדר פעולות חשבון						
4.	שימוש בפעולה לא מתאימה						
5.	התעלמות מסימן מינוס לפני סוגרים						
6.	שגיאה בצמצום						
7.	העתקה לא נכונה של התרגיל						
8.	שגיאה בפרוק לגורמים						
9.	אי סיום פתרון התרגיל						
10.	אחר :						

בדקו את **עבודת התלמידים** יחד עם **גיליונות המעקב** שלהם. **דונו** עם התלמידים בפתרונותיהם, בשגיאותיהם, בניתוח שערכו לשגיאות, ובחשיבות שיש למודעותם לסוג השגיאות שהם נוטים לעשות.

1. **תעדו את מהלך ההוראה והכינו דו"ח מפורט לגבי כל אחד מהשלבים.**
2. **האם תשתמשו בעתיד בהוראה בגיליונות מעקב כאלה? הסבירו את עמדתכם**.

פעילות 3.5 – מורות מלמדות : מספרים ופעולות

לפניכם תכנון הוראה של שלוש מורות, נועה, טלי ואירית לגבי התרגילים מפעילות 3.4.

נועה: *(א) כל תלמיד יפתור את תרגילים בעצמו. (ב) אאסוף ואבדוק את הפתרונות (ג)אכין דף עבודה שיציג מגוון מהפתרונות הנכונים והשגויים שעלו בכיתה.*

דף עבודה לפניך מספר פתרונות לכל תרגיל. התייחסו לכל פתרון. קבעו אם הפתרון נכון. אם, לדעתכם, הפתרון שגוי הסבירו מהי השגיאה.		
200:50:10	$\frac{5\cdot 10+13}{5\cdot 13+10}$	9-5×[9-5×(9-5)]
פתרון א נכון / שגוי מדוע? פתרון ב נכון / שגוי מדוע? פתרון ג נכון / שגוי מדוע?	פתרון א נכון / שגוי מדוע? פתרון ב נכון / שגוי מדוע? פתרון ג נכון / שגוי מדוע?	פתרון א נכון / שגוי מדוע? פתרון ב נכון / שגוי מדוע? פתרון ג נכון / שגוי מדוע?

(ד) התלמידים יעבדו יחידנית על דפי העבודה. (ה) יערכו דיונים בקבוצות קטנות לגבי נכונות הפתרונות. (ו) נציג של כל קבוצה יציג את מסקנותיה לכל הכיתה ונערוך דיון במליאה.

מה דעתכם על הצעתה של נועה? האם תיישמו הוראה כזאת בכתתכם? מדוע?

טלי: *אתייחס לכל תרגיל בנפרד. אזמין חמישה תלמידים לפתור את התרגיל על הלוח, האחרים יפתרו ראשית במחברותיהם, ואם יהיו לתלמידי הכיתה רעיונות נוספים, נרשום גם אותם על הלוח. התלמידים יתבקשו להעתיק למחברות את כל הפתרונות ולהעריך את נכונותם. נערוך דיון כיתתי בכל הפתרונות.*

מה דעתכם על הצעתה של טלי? האם תיישמו הוראה כזאת בכתתכם? מדוע?

אירית: *ראשית נערוך דיון לגבי התרגיל 200:50:10. אני רוצה לשתף את התלמידים בטעות שאני עשיתי כשפתרתי אותו. כתבתי 20:5:1 – נדמה היה לי שכך צמצמתי את כל האפסים. חשוב לי להראות להם שגם אני טועה, לנתח איתם את השגיאה ולאחר מכן לשמוע ולנתח רעיונות שלהם.*

מה דעתכם על הצעתה של אירית? האם תיישמו הוראה כזאת בכתתכם? מדוע?

פרק ב.4 אירועי שגיאה בשיעורי מתמטיקה

פרק זה כולל שלוש פעילויות שגיאה:

פעילות שגיאה 1: הגדרות שונות למעגל.

פעילות שגיאה 2: סכום הזוויות הפנימית במצולע.

פעילות שגיאה 3: פעולת החילוק.

כל פעילות שגיאה כוללת פעילויות מקדימות, ופעילות המתייחסת לתמלילים של אירועי הוראה אשר התפתחו משגיאה.

הפעילויות המקדימות מעלות בעיקר סוגיות מתמטיות לגבי הנושאים הנדונים באירועי השגיאה, ואת אירועי השגיאה יש לנתח על פי הנקודות הבאות:

א. אופי השגיאה
ב. רמת הדיון המתמטי
ג. מצב הלמידה בו פותח אירוע השגיאה
ד. רמת המעורבות של הלומד באירוע השגיאה
ה. מקור השגיאה (מיהו השוגה?)
ו. המסגרת ששבה מפתחים את אירוע השגיאה
ז. המטרות ההוראתיות של הפעילות
ח. התוצאות המרכזיות של הפעילות

בפרק ב.5 מוצגות הערות והארות לגבי השימוש בפעילויות מפרק זה.

פעילות שגיאה 1: הגדרות שונות למעגל

פעילות מקדימה 1.1: הגדרות והסברים

א. מהו מעגל?

ב. האם זוהי הגדרה מתמטית למושג מעגל? כן / לא מדוע?

אם כן – האם יש הגדרה נוספת למושג מעגל?

אם לא- מדוע אין זו הגדרה? כיצד יש לשנות את תשובתך כך שתתקבל הגדרה של המושג?

פעילות מקדימה 1.2: התייחסות להגדרות תלמידים

לפניכם הגדרות שהציעו תלמידים. בדקו את נכונותן (הקיפו את קביעתכם והסבירו).

מס'	הגדרות שהציעו תלמידים	נימוק הקביעה: נכונה / לא נכונה
1	סדרה של נקודות הנמצאות במרחק שווה מנקודה יחידה, A.	ההגדרה נכונה / לא נכונה, מפני ש...
2	$2\pi k$ נוסחת היקף, רדיוס, מרכז מדויק, 360 מעלות.	ההגדרה נכונה / לא נכונה, מפני ש...
3	מעגל, 3.14, צורת תפוז, מטבע, הארץ, פאי (π)	ההגדרה נכונה / לא נכונה, מפני ש...
4	מעגל הוא צורה גיאומטרית ששטחה שווה ל- πr^2	ההגדרה נכונה / לא נכונה, מפני ש...
5	צורה גיאומטרית עם 360^0 ונקודת מרכז במישור הדו ממדי. ישר העובר דרך המרכז הוא קוטר וחצי קוטר הוא רדיוס, מעגל מזכיר אפס שמן, אך נחמד לסמיילי	ההגדרה נכונה / לא נכונה, מפני ש...
6	קו עקום, רציף וסגור	ההגדרה נכונה / לא נכונה, מפני ש...

אירוע שגיאה 1.1

דיון ב"הגדרת המעגל": *$2\pi k$ נוסחת היקף, רדיוס, מרכז מדויק, 360 מעלות.*

(1) מורה [לקטיה, התלמידה שהציעה את ההגדרה]: *מה שכתבת נכון?*
(2) קטיה: *כן... אבל אני לא מצליחה לכתוב תשובה מושלמת. אני פשוט רושמת כל דבר שעולה בדעתי.*
(3) מורה: *למה את חושבת שלא מתאים לרשום רשימה ארוכה של תכונות?*
(4) קטיה: *אני לא אמרתי שזה לא יהיה טוב, אבל...*
(5) מורה: *אה... היית רוצה להוסיף תכונות?*
(6) קטיה: *אה... אני פשוט לא זוכרת.*
(7) מארי: *אבל בהגדרה צריך להציג את הדברים באופן הכי פשוט שאפשר.*
(8) מורה: *אז אנחנו רוצים שההגדרה תזהה מעגל בלבד. רשימה ארוכה של תכונות תהייה אפילו יותר טובה. אז למה את לא אוהבת את זה?*
(9) מארי: *למה? כי הגדרה זה משהו שצריך לזכור... את לא רוצה לזכור את כל הדברים הקטנים... את כל הרשימה.*

ניתוח אירוע שגיאה 1.1

א. מהי השגיאה ומה אופייה?

ב. מהי רמת הדיון המתמטי?

ג. מהו מצב הלמידה בו פותח אירוע השגיאה?

ד. מהי רמת המעורבות של הלומד באירוע השגיאה?

ה. מהו מקור השגיאה (מיהו השוגה)?

ו. מהי המסגרת שבה מפתחים את אירוע השגיאה?

ז. מהן המטרות ההוראתיות של הפעילות?

ח. מהן התוצאות המרכזיות של הפעילות?

פעילות שגיאה 2: סכום הזוויות הפנימיות במצולע

פעילות מקדימה 2.1: פתרו והסבירו

א. מהו סכום הזוויות הפנימיות במשולש? במרובע? במשושה? במצולע בן 12 צלעות? הסבירו.

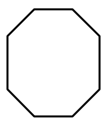
ב. מהו סכום הזוויות הפנימיות במצולע בן n צלעות ($n>2$, מספר טבעי)? הסבירו.

פעילות מקדימה 2.2: הוכחת טענות לגבי מצולעים קמורים וקעורים

השתמשו בשרטוטים הבאים, קבעו את **נכונות הטענות** הבאות **ונמקו** את קביעותיכם.

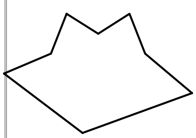
א. **נתון מצולע בן 8 צלעות**, סכום הזוויות הפנימיות הוא $180 \times 6 = 180(8-2)$

נכון / לא נכון. הסבירו את קביעתכם.



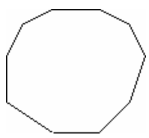
ב. **נתון מצולע בן 8 צלעות**, סכום הזוויות הפנימיות הוא $180 \times 6 = 180(8-2)$

נכון / לא נכון. הסבירו את קביעתכם.



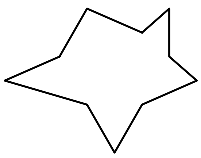
ג. **נתון מצולע בן 10 צלעות**, סכום הזוויות הפנימיות הוא $180 \times 8 = 180(10-2)$

נכון / לא נכון. הסבירו את קביעתכם.



ד. **נתון מצולע בן 10 צלעות**, סכום הזוויות הפנימיות הוא $180 \times 8 = 180(10-2)$

נכון / לא נכון. הסבירו את קביעתכם.



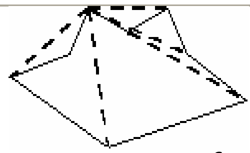
<u>לסיכום</u>

1. מהו לדעתכם סכום הזוויות הפנימיות במרובע? במשושה?
2. מהו לדעתכם סכום הזוויות הפנימיות במצולע בן 15 צלעות?

האם תשובתכם נכונה לכל מצולע בן 15 צלעות? רק למצולע קמור? רק למצולע קעור? הסבירו.

פעילות מקדימה 2.3: התייחסות לטענות תלמידים

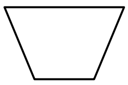
לפניכם טענות שהציגו תלמידים. בדקו את נכונותן (הקיפו את קביעתכם והסבירו).

טענות של תלמידים	נימוק הקביעה: נכונה / לא נכונה
קיים מצולע שבו n צלעות, כך שסכום הזוויות הפנימיות שלו שווה ל- $n\times 180$	הטענה נכונה / שגויה, כי
 סכום הזוויות במצולע קמור עם n צלעות: 180 x (n-2), כי כשמעבירים את כל האלכסונים מקודקוד במצולע נוצרים n-2 משולשים. *אי אפשר* להשתמש בנוסחה זו עבור *מצולעים קעורים*. כי כשמנסים להעביר את כל האלכסונים מקדקוד, מקבלים משולשים שחלקם בפנים וחלקם בחוץ...	הטענה נכונה / שגויה, כי

פעילות מקדימה 2.4: הוכחת טענות לגבי מרובעים, מחומשים ומשושים

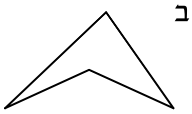
השתמשו בשרטוטים הבאים, **קבעו** את **נכונות הטענות** הבאות **ונמקו** את קביעותיכם

נתון מרובע, סכום הזוויות הפנימיות הוא 180 x 2 = 180 x (4-2) א

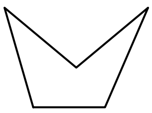


א. נכון / לא נכון הסבירו את קביעתכם.

ב. נכון / לא נכון הסבירו את קביעתכם. ב

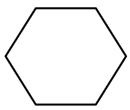


נתון מחומש, סכום הזוויות הפנימיות הוא 180 x 3 = 180 x (5-2) ג



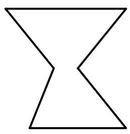
ג. נכון / לא נכון הסבירו את קביעתכם.

נתון משושה, סכום הזוויות הפנימיות הוא 180 x 3 = 180 x (6-2)

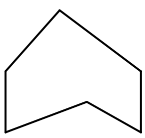


ד. נכון / לא נכון הסבירו את קביעתכם. ד

ה. נכון / לא נכון הסבירו את קביעתכם. ה

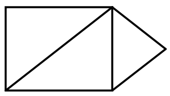


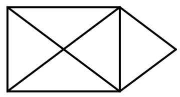
ו. נכון / לא נכון הסבירו את קביעתכם. ו



מהו סכום הזוויות הפנימיות במצולע בן 17 צלעות? הסבירו.

אירוע שגיאה 2.1 – מהו סכום הזוויות הפנימיות במצולע?





(1) מורה: מה נוכל לומר על סכום הזוויות הפנימיות במחומש?
(2) מארי: נחלק את המחומש למשולשים... 3 x 180
(3) מורה: או.קי. זה נראה נכון? מארי צודקת?
(4) קטיה: למה זה 3 x 180?
(5) מארי: כי יש שני משולשים [במרובע]
(6) קטיה: אבל את יכולה לשרטט אלכסון נוסף.
(7) מורה: זה מעניין... עכשיו יש לנו 5 משולשים.
(8) מארי: נכון.
(9) מורה: סכום כל הזוויות בכל המשולשים עכשיו זה 5 x 180. זה בטוח. אבל האם זה סכום הזוויות של המחומש או אולי יש לנו משהו מיותר?
(10) [קטיה מצביעה על הזוויות שבתוך המרובע]
(11) מורה: אז אם רוצים להשתמש ברעיון זה צריך להוריד את המיותר. כמה מעלות יש בזוויות המיותרות?
(12) מארי: כולן יחד?
(13) קטיה: או.קי., כל אחת 90 מעלות.
(14) מארי: וואו... 90 מעלות, אז זה 180 כפול 4
(15) מורה [מתקנת במהירות]: 90 כפול 4.
(16) מארי [מסופקת אם אפשר להסיק מסקנה כזו]: אבל לא הוכחתם שזה ריבוע.
(17) מורה: לא. זה נכון. האם אפשר להסיק שיש פה 360 מעלות גם בלי להוכיח שזה ריבוע?
(18) מארי: כן, אפשר, כיוון שזה מעגל סביב הנקודה הפנימית. וואו... איזו תגלית!!
(19) מורה: אז יש בפנים 360 מעלות שזה 2 x 180 אז אפשר להגיד שסכום הזוויות הוא: 5 x 180- 2 x 180 שזה בעצם 3 x 180 . עכשיו שתי השיטות נתנו אותה תוצאה...

ניתוח אירוע שגיאה 2.1

א. מהי השגיאה ומה אופייה?	ה. מה מקור השגיאה (מיהו השוגה?)
ב. מה רמת הדיון המתמטי?	ו. מה המסגרת שבה מפתחים את אירוע השגיאה?
ג. מה מצב הלמידה בו פותח אירוע השגיאה?	ז. מהן המטרות ההוראתיות של הפעילות?
ד. מה רמת המעורבות של הלומד באירוע השגיאה?	ח. מהן התוצאות המרכזיות של הפעילות?

אירוע שגיאה 2.2 / א – סכום הזוויות הפנימיות במעושר-כוכב (קעור)

(1) אבי: חשבתי על איך הוכחנו את המקרה הקודם [של סכום זוויות פנימיות במצולע **קמור**]. העברנו אלכסונים מקדקוד וכך נוצרו משולשים... במקרה של הכוכבים אין דרך לקבל כך משולשים... כמו קודם, אז זה... הנוסחה לא פועלת [מלמולי הסכמה].

(2) גלית: ניסיתי להעביר כל מיני אלכסונים (במעושר בצורת כוכב) ופשוט אי אפשר לדעת אם הנוסחה נכונה או לא.. זה לא... משולשים... זה צורות מוזרות שחלקן בפנים וחלק בחוץ...

(3) דן: נוסחה זו נוסחה. כשהיא פועלת היא פועלת תמיד. לא צריך להוכיח כל פעם מחדש.

(4) מורה: ואם בכל זאת רוצים להוכיח אותה פעם נוספת?

(5) דן: אז אני לא יודע... להוכיח... כאילו...

(6) גלית [לאבי]: ואתה בטוח שזה לא נכון?

(7) מורה: אבי, אתה יודע בוודאות שזה לא נכון?

(8) אבי: אני לא הוכחתי שזה לא נכון... גם לא הוכחתי שזה נכון...

(9) מורה [לכל הכיתה]: מה דעתכם? האם הטענה כי סכום הזוויות במצולע היא $180(n-2)$ נכונה בכל המקרים?

(10) [אף אחד לא מצביע]

(11) מורה: מי חושב שהטענה לא נכונה במקרה של מצולע בן 10 צלעות בצורת כוכב, למשל?

(12) [תלמידה אחת מצביעה- יעל]

(13) מורה: מי חושב שלא ברור אם הטענה נכונה... שאין לנו עדיין דרך לבדוק

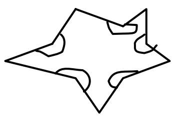
(14) [כולם, פרט ליעל מצביעים]

(15) מורה: נראה שהמצב קצת השתנה. רובכם חשבתם בהתחלה כי הטענה שגויה. מה קרה? אבי?

(16) אבי: לא הראיתי שהטענה לא נכונה. הראיתי שאי אפשר... שאני לא יכול להראות שהיא נכונה. וזה לא אותו דבר.

(17) מורה: להראות שלא יוצא $180 \times (10-2)$. להראות... שיוצא [סכום] אחר...

(18) יעל: אני חושבת שאפשר להראות [ניגשת ללוח משרטטת ומדגישה את זוויות כמו בשרטוט] הזוויות האלו ענקיות הסכום חייב להיות גדול יותר...



(19) מורה: מה דעתכם? (20) [שקט]

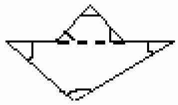
(21) רביב: זה נראה... אבל זה לא הוכחה...

(22) מורה: איך נחליט? (23) [שקט]

ניתוח אירוע שגיאה 2.2 / א

א. מהי השגיאה ומה אופייה?	ה. מה מקור השגיאה (מיהו השוגה?)
ב. מה רמת הדיון המתמטי?	ו. מה המסגרת שבה מפתחים את אירוע השגיאה?
ג. מה מצב הלמידה בו פותח אירוע השגיאה?	ז. מה המטרות ההוראתיות של הפעילות?
ד. מה רמת המעורבות של הלומד באירוע השגיאה?	ח. מה התוצאות המרכזיות של הפעילות?

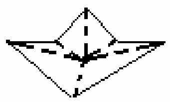
אירוע שגיאה 2.2 / ב – סכום הזוויות הפנימיות במצולע קעור



(33) עדי: *אני שרטטתי משושה כזה, ופה זה לא יוצא...* [ ] *חילקתי את הצורה לשני משולשים, ואז סכום הזוויות הפנימיות הוא* 2x180...
זה לא מתאים לנוסחה.

(36) מורה: *מה דעתכם על הפתרון של עדי?*

(37) רונית: *וואו...*



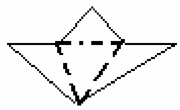
(38) בתיה: *לפי השיטה שלי זה כן יוצא. הטענה כן נכונה.*

(39) [בתיה מראה את דרך הפתרון שלה]

(40) בתיה: *חילקתי לשישה משולשים וחסרתי 360 מעלות.* 180 x6-360=(6-2) x 180

(41) מורה: *מה דעתכם?* [שתיקה] *יתכן שבתיה וגם עדי צודקות?* [גיחוך] *מי חושב שלא ייתכן ששתיהן צודקות* [כולם מצביעים].

(43) בתיה: *ייתכן ששתינו טועות...*



(45) גדי: *גם לפי השיטה שלי זה יוצא כמו לבתיה. משונה, אצלי יש 4 משולשים.*

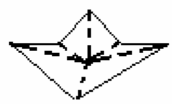
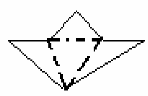
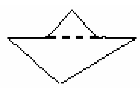
(46) מורה: *מה דעתכם?*

(47) [קולות- גדי ובתיה צודקים...]

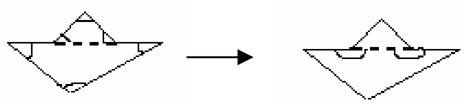
(48) מורה: *רגע... רגע... אנחנו חייבים למצוא, אם כך, למה לעדי יצא פתרון שונה. יש למשהו רעיון?*

(49) [שתיקה]

(50) מורה: *סמנו את הזוויות של המשולשים בכל אחת מהחלוקות.* [משרטטים על הלוח]

השיטה של בתיה:	השיטה של גדי:	השיטה של עדי:
		
סומנו כל הזוויות הפנימיות של המשושה + מעגל פנימי.	**סומנו כל** הזוויות הפנימיות של המשושה.	**לא סומנו כל** הזוויות הפנימיות של משושה.

(51) עדי: *בעצם בדרך החלוקה שלי חסרות לי שתי זוויות שטוחות, שכל אחת מהן היא 180 מעלות. וזה בדיוק מה שהיה חסר.*



ניתוח אירוע שגיאה 2.2 / א

א. מהי השגיאה ומה אופייה?	ה. מה מקור השגיאה (מיהו השוגה?)
ב. מה רמת הדיון המתמטי?	ו. מה המסגרת שבה מפתחים את אירוע השגיאה?
ג. מה מצב הלמידה בו פותח אירוע השגיאה?	ז. מה המטרות ההוראתיות של הפעילות?
ד. מה רמת המעורבות של הלומד באירוע השגיאה?	ח. מה התוצאות המרכזיות של הפעילות?

פעילות שגיאה 3 : פעולת החילוק

פעילות מקדימה 3.1: פתרו והסבירו

פתרו את התרגיל 480:80:10 בשתי דרכים. א. ב.

פעילות מקדימה 3.2: התייחסות לפתרונות תלמידים

לפניכם דרכים שונות, נכונות ושגויות, שהוצגו לפתרון התרגיל 10 :80 :480 , קבעו לגבי כל דרך האם היא נכונה או לא ונמקו את קביעתכם.

מס'	פתרונות של תלמידים	נימוק הקביעה: נכון / לא נכון
1	480 : 80 :10 = 6:10	פתרון **נכון / לא נכון** מפני ש...
2	480 : 80 :10 = 480 : (80:10) = 480 : 8	פתרון **נכון / לא נכון** מפני ש...
3	480 : 80 :10 = 480 :10 : 80 = 48 : 80	פתרון **נכון / לא נכון** מפני ש...
4	480 : 80 :10 = 48 : 8: 1= 48:8	פתרון **נכון / לא נכון** מפני ש...
5	480 : 80 :10= 480 :8 :1=480:8	פתרון **נכון / לא נכון** מפני ש...
6	480 : 80 : 10 = 480: (80 x 10)=480:800	פתרון **נכון / לא נכון** מפני ש...

פעילות מקדימה 3.3: שיקולי דעת דידקטיים

בכיתה ה׳ בקשה המורה את התלמידים לפתור את התרגיל 10: 80 : 480 בשתי דרכים. ארבעה תלמידים הוזמנו לעבוד על הלוח. הם כתבו:

תלמיד א. $480 : 80 :10 = 6:10 = 0.6$

תלמיד ב. $480 : 80 :10 = 480 : (80:10) = 480 : 8 = 60$

תלמיד ג. $480 : 80 :10 = 480 :10 : 80 = 48 : 80 = 48/80$

תלמיד ד. $480 : 80 :10 = 48 : 8 :1 = 6$

תלמידי הכיתה התבקשו לקבוע איזה פתרון נכון, איזה שגוי ומה השגיאה, והציג את דעותיהם בדיון כיתתי.

מה דעתכם לגבי פעילות זו? האם הייתם עובדים כך בכתתכם? כן / לא מדוע?

לפניכם שני אירועי שגיאה המציגים דיון שהתנהל בכיתה בהתייחס לתשובות תלמידים אלה.

אירוע שגיאה 3.1 – תוצאה אחת או מספר תוצאות?

(1) מורה [לכיתה, לגבי הפתרונות שעל הלוח]: *מה דעתכם?...*

(2) ענת: *מאוד... מעניין... הפתרונות השונים... שונים ממש...*

(3) מורה: *מה הכוונה "ממש"?*

(4) ענת: 0.6 , 60*, ככה...*

(5) יעל: 0.6 *ו-48/80 זה אותו דבר... כי מצמצמים ב-8...*

(6) ענת: *יש גם 6...*

(7) מורה: *ומה דעתכם על זה?* [שיש תוצאות שונות]

(8) רוני: *זה לא בסדר.*

(11) מורה: *ענת, מה דעתך?*

(12) ענת: *לדעתי זה מעניין.. אם בקשת דרכים שונות וקיבלנו לכל דרך... כמעט... גם פתרון שונה...*

(13) גל: *אבל לתרגיל חשבון יש תוצאה אחת... מספר אחד...*

(14) ענת: *עובדה... כאן לא.. [ ] אבל בכל הפתרונות השתמשנו בכללים שהכרנו... בפתרון א׳ פשוט פתרנו לפי סדר פעולות חשבון- הלכנו משמאל לימין. בפתרון ב׳ הפעלנו את חוק הקיבוץ, בפתרון ג׳ חוק החילוף ובפתרון ד׳- צמצמנו... אז... הכול חוקים מתמטיים...*

ניתוח אירוע שגיאה 3.1

א. מהי השגיאה ומה אופייה?	ה. מה מקור השגיאה (מיהו השוגה?)
ב. מה רמת הדיון המתמטי?	ו. מה המסגרת שבה מפתחים את אירוע השגיאה?
ג. מה מצב הלמידה בו פותח אירוע השגיאה?	ז. מה המטרות ההוראתיות של הפעילות?
ד. מה רמת המעורבות של הלומד באירוע השגיאה?	ח. מה התוצאות המרכזיות של הפעילות?

אירוע שגיאה 3.2 – כיצד נקבע מי נכון ומי שגוי?

(25) ענת [מתבוננת בארבעת הפתרונות שעל הלוח, ראו פעילות מקדימה 3.3]: *אני ממש מבולבלת. אני זוכרת... הכול* [כל הפתרונות] *נראה הגיוני.*

(31) יעל: *האמת הכול נראה הגיוני... אז צריך למצוא דרך אחת שעליה אנחנו יכולים לסמוך. אני מתכוונת שלפחות נדע כמה יוצא.*

(35) רוני: *אם נדע כמה יוצא נוכל לדעת מי [איזו דרך] שגוי לפי זה שהתוצאה שלו שונה.*

(38) מורה: *כמו "פתרון עוגן" שמולו בודקים את היתר?*

(39) נועה: *כן, ואז נוכל לפסול את אלה שיצא פתרון אחר...*

(40) מורה: *הבנתי. אנחנו לא נסתפק בזיהוי מי שגוי, אנחנו גם נשאל למה זה שגוי.... ומה לגבי דרכים שונות המוליכות לתוצאה זהה... הנכונה שמצאנו... אם יש כאלה... הן בטוח נכונות?*

(41) דפנה: *יש מקרים שמגיעים לתוצאה בדרך שגויה.*

(42) מורה: *נכון, אז גם כאן נצטרך להצדיק, למה זה נכון. איזו דרך נראית לכם הכי? איך נתחיל?*

(43) יעל: *צריך לחזור לסדר פעולות חשבון. זה הבסיס.*

(44) [קובעים שדרך א' היא פתרון לפי סדר פעולות חשבון ולכן פתרון התרגיל הוא 0.6]

(46) מיכל: *...חוק החילוף וחוק הקיבוץ עובדים רק בכפל ובחיבור.*

(47) עדי: *נכון, אין חוק החילוף בחילוק.*

(48) מיכל: *וחוק הקיבוץ [גם אינו פועל]*

(51) ענת: *אז שני הפתרונות ב' ו- ג' זה שגיאות. אסור היה להפעיל את חוק הקיבוץ וחוק החילוף.*

(52) נועה: *אז הנה, יצאה תוצאה שווה [לתוצאה] לנכונה, וזו דרך שגויה.*

(53) ענת: *מה?!*

(54) נועה: *6/10=48/80 וזה* 0.6*, אז כאילו פתרון ג' בסדר אבל הוא לא.... כי אין חוק החילוף....*

(55) גל: *אז נשאר לנו להראות למה הצמצום לא עובד.*

(56) רוני: *דווקא צמצמנו את כל המספרים ב- 10...*

(57) יעל: *אולי צמצום זה רק בשברים...*

ניתוח אירוע שגיאה 3.2

קבעו לגבי כל שגיאה באירוע:

א. מהי השגיאה ומה אופייה?	ה. מה מקור השגיאה (מיהו השוגה?)
ב. מה רמת הדיון המתמטי?	ו. מה המסגרת שבה מפתחים את אירוע השגיאה?
ג. מה מצב הלמידה בו פותח אירוע השגיאה?	ז. מה המטרות ההוראתיות של הפעילות?
ד. מה רמת המעורבות של הלומד באירוע השגיאה?	ח. מה התוצאות המרכזיות של הפעילות?

פרק ב.5 מילות סיכום, הערות והארות...

בפרק זה נציג מספר התייחסויות לפעילויות המוצגות בשער ב'.

הערות והארות לפרק ב.1 - מדוע שוגים?

פעילות 1.1 – פעילות 1.3 מבקשות לחבר בעיות תוך התבססות על המסגרות התיאורטיות של סתוי ותירוש, של טול ווינר, ושל פישביין, להתיר את הבעיות ולהציג שגיאות אופייניות רלוונטיות. תיאור של המסגרות התיאורטיות ודוגמאות רלוונטיות ניתן למצוא גם בפרק א.1.

בעיה שתלמידים צפויים לעשות בהם שגיאה שמקורה בכלל האינטואיטיבי ***יותר A – יותר B***.

נתון מרובע ומשושה. האם סכום הזוויות החיצוניות בריבוע גדול / שווה / קטן מסכום הזוויות החיצונית במשושה?

הפתרון: ***הסכום שווה בשני המקרים ל- 360^0. במצולע בן n צלעות, סכות הזוויות הפנימיות $180(n-2)$ וסכום הזוויות החיצוניות $180n-180(n-2)=360$. כלומר סכום הזוויות החיצוניות במצולע תמיד 360^0.***

השגיאה המתאימה: ***סכום הזוויות החיצוניות במשושה גדול מזה של המרובע, מפני שמספר הצלעות גדול יותר במשושה (A), אז סכום הזוויות החיצוניות גדול יותר (B).***

בעיה שתלמידים צפויים לעשות בה שגיאה שמקורה בכלל האינטואיטיבי ***שווה A – שווה B***.

נתון ריבוע שצלעו 10 ס"מ. האריכו כל אחת משתי צלעות נגדיות ב- 2 ס"מ ואת שתי האחרות קיצרו ב- 2 ס"מ. האם שטח המרובע החדש גדול / שווה / קטן משטח הריבוע מקורי?

הפתרון: ***שטח המרובע החדש קטן משטח הריבוע המקורי.***

הסבר א: ***שטח המרובע החדש $12\times8=96$ והוא קטן משטח הריבוע המקורי (100).***

הסבר ב: ***שטח המרובע החדש $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ והוא קטן משטח הריבוע המקורי (a^2)***

השגיאה המתאימה: ***שטח הריבוע החדש שווה לשטח הריבוע מקורי***

הסבר א: ***קיצרו והאריכו באותו מס ס"מ (A), אז שטח המרובע החדש שווה לשטח הריבוע המקורי (B).*** הסבר ב: ***ההיקפים שווים (שווה ב A) – אז השטחים שווים (שווה ב B).***

בעיה שתלמידים צפויים לעשות בה שגיאה שמקורה בהתבססות על ***דימוי המושג***.

בקבוצה 8 תלמידים בהם 5 בנים ו 3 בנות. 2 בנות בלונדיניות (יעל, דנה) ואחת שחורת שער (יונית). כמו כן, 3 בנים בלונדינים (רון, גל, דן), ו- 2 בעלי שער חום (רונן, איתי). א. מהי קבוצת התלמידים (בנים/בנות) בעלי השער השחור? ב. מהי קבוצת הבנים בעלי השער השחור?

הפתרון: ***א. מהי קבוצת התלמידים בעלי השער השחור? $S=\{$ יונית $\}$***

ב. מהי קבוצת הבנים בעלי השער השחור? $\varnothing$

השגיאה המתאימה: ***א. אין תשובה כי רק ליונית שער שחור ואין קבוצה בת איבר אחד.***

ב. אין תשובה, כי אין בנים כאלה (דימוי מושג קבוצה: אוסף בן 3 איברים, לפחות).

בעיה שתלמידים צפויים לעשות בהם שגיאה שמקורה ***באינטואיציות שגויות***.

האם 0.234 גדול / שווה / קטן מ 0.7? הפתרון: ***0.234 קטן מ 0.7***

השגיאה המתאימה: ***0.234 גדול מ 0.7 מפני שגם במספרים הטבעיים: 234 גדול מ 7 (תשובה אינטואיטיבית המבוססת על הכללת יתר של ידע קודם לגבי המספרים הטבעיים, ידע שאינו רלוונטי במערכת החדשה).***

פעילות 1.4 היא פעילות תובענית, המבקשת לחבר שאלון בן ארבעה פריטים, להציגו לתלמידים ולנתח את פתרונותיהם תוך שימוש בשלוש המסגרות התיאורטיות שנדונו בפרק א.1. חשוב יהיה להדגיש שלעיתים ניתן להסביר סיבות אפשריות לשגיאה מסוימת באמצעות מסגרת תיאורטית אחת ואי אפשר להסבירה באמצעות מסגרת אחרת, ולעיתים ניתן להסביר שגיאה מסוימת במספר דרכים. כדאי לציין את הדמיון ואת ההבדלים בין המסגרות התיאורטיות השונות, תוך התבססות על פרק א.5.

פעילות 1.5 עוסקת בשגיאות ובסיבות לשגיאות לגבי מספרים ופעולות. להלן שתי דוגמאות.

דוגמא א' – תרגיל $\boxed{\mathbf{\frac{3+5}{6+10}}}$ **פתרון נכון:** ***דרך א'*** $\frac{3+5}{6+10}=\frac{3}{6+10}+\frac{5}{10+6}=\frac{3}{16}+\frac{5}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$

דרך ב' $\frac{3+5}{6+10}=\frac{\cancel{3+5}}{2\cancel{(3+5)}}=\frac{1}{2}$ ***ודרך ג'*** $\frac{3+5}{6+10}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$

בדך א' מתייחסים לכך ש- 6+10 הוא מכנה משותף, בדרך ב' מוציאים במכנה גורם משותף (3+5), ולאחר מכן מצמצמים, ובדרך ג' מחשבים את סכום הביטוי במונה ואת סכום הביטוי במכנה. נציין כי לעיתים, כאשר מבקשים מתלמידים לפתור תרגיל זה בדרך אחת מרביתם מציגים דרך נכונה. אבל, כאשר מבקשים מהתלמידים לפתור בשתי דרכים, הם שוגים.

שגיאות אופייניות: (i) $\frac{\cancel{3}+\cancel{5}}{\cancel{6}+\cancel{10}}=\frac{1+1}{2+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3+5}{6+10}=\frac{3}{6}+\frac{5}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

בפתרון השגוי (i) שאמנם הוביל במקרה זה לתוצאה נכונה, התלמיד צמצם את ה- 3 במונה עם ה- 6 במכנה, ואת ה- 5 שבמונה עם ה-10 שבמכנה, למרות פעולת החיבור. בדרך כלל, דרך זו מובילה לתוצאה שגויה. למשל, בתרגיל $\frac{5+7}{5+14}$: $\frac{2}{3}=\frac{1+1}{1+2}=\frac{5+7}{5+14}$, ואילו הפתרון הנכון הוא: $\frac{5+7}{5+14}=\frac{12}{29}$. ניתן לבקש מהמורים לחקור באילו מקרים דרך זו מוליכה לתוצאה נכונה. בפרק א.2 ניתן למצוא סוג שגיאות המוליכות לתוצאה נכונה.

בשגיאה (ii) מפרקים באופן שגוי את התרגיל ל"חיבור שברים". נציין, כי נמצא שגם לומדים אשר יודעים כי בחיבור שברים: $\frac{3}{6}+\frac{5}{10}\neq\frac{3+5}{6+7}$ רשמו כי $\frac{3+5}{6+10}=\frac{3}{6}+\frac{5}{10}$ כשהתבקשו להתייחס לתרגיל $\frac{3+5}{6+10}$.

דוגמא ב' – קבעו מי גדול יותר $\boxed{\mathbf{(\tfrac{1}{2})^4 \text{ או } (1/3)^2}}$

פתרון נכון: ***דרך א'*** $(½)^4 = 1/16$ ו- $(1/3)^2 = 1/9$; $\frac{1}{9}>\frac{1}{16}$ ולכן $(1/3)^2 > (½)^4$.

דרך ב' $(½)^4 = (1/4)^2$ ומכוון ששליש גדול מרבע נקבל כי $(1/3)^2 > (1/4)^2$, ולכן $(1/3)^2 > (½)^4$.

שגיאות אופייניות: (i) שליש גדול מחצי מפני ששלוש גדול משתיים, החזקות אינן משנות יחס הזה, ולכן $(1/3)^2 > (½)^4$. (ii) חצי גדול משליש ולכן $(1/3)^2 < (½)^4$. (iii) המעריך של חזקת החצי (4) גדול מהמעריך של חזקת השליש (2), לכן $(1/3)^2 < (½)^4$. (iv) חצי גדול משליש וגם החזקה שמעלים את חצי גדולה יותר, ולכן $(1/3)^2 < (½)^4$.

שגיאה (i) הובילה למסקנה נכונה תוך התבססות על הנחה שגויה ששליש גדול מחצי. השגיאות האחרות מתייחסות ליחס הגודל בין המעריכים השונים או ליחס הגודל בין בסיסי החזקות ולפי יחס זה קובעים איזה ביטוי גדול יותר. ניתן להסביר את השגיאות באמצעות המסגרת של פישביין וטול ווינר (קישור לטבעיים) או על ידי הכלל האינטואיטיבי גדול ב- A גדול ב- B (בפרק א.1)

פעילויות 1.6, 1.7 ו- 1.8 עוסקות בשגיאות ובסיבות לשגיאות בנושא: נוסחאות אלגבריות.

הנוסחאות השגויות (שאינן מתקיימות תמיד) הן: נוסחה 2 – $\boxed{(a+b)^2 = a^2 + b^2}$ ונוסחה 8 – $\boxed{\sqrt{a^2+b^2} = a+b}$ שמתקיימות כאשר a, או b, שווים לאפס. נוסחה 3 – $\boxed{m\times(a\times b) = m\times a\times m\times b}$ שמתקיימת כאשר a, b, או m שווים לאפס או כאשר $m=1$; ונוסחה 4 – $\boxed{m\times|a-b| = m\times|a| - m\times|b|}$ מתקיימת עבור $a>b\geq 0$. שגיאות של תלמידים מתבטאות בקבלת נוסחאות שגויות ובדחיית נוסחאות נכונות (כפי שהדגמנו בפעילות 1.8). ניתן להסביר את השגיאות כהרחבת יתר של חוק הפילוג (דימוי מושג שגוי על פי טול ווינר, או מודל אלגוריתמי שגוי על פי פישביין), אפשר גם להסבירן על ידי תיאורית הכללים האינטואיטיביים של סתוי ותירוש, באמצעות הכלל האינטואיטיבי שווה ב A (האותיות, המשתנים והפעולות) שווה ב B (התוצאה).

פעילות 1.9 מתבססת על הניתוח שהצגנו בפרק א.5.

הערות והארות לפרק ב.2- איזה סוגים של שגיאות נוטים לומדים לעשות?

פעילות 2.1 ופעילות 2.2 עוסקות במיון שגיאות תלמידים בפתרונותיהם לבעיות מילוליות. פעילויות אלה מבוססות על המיונים של מובשוביץ-הדר, זסלבסקי וענבר ושל בוראסי, לגבי שגיאות תלמידים בפתרונות לבעיות אלה. השגיאות ממוינות בפרק א.2 על ידי מובשוביץ-הדר, זסלבסקי וענבר בקטגוריות: (א) שימוש בלתי ראוי במידע הנתון: התעלמות ממידע; עיוות משמעות; (ב) משמעות לשונית שגויה- תרגום מוטעה של עובדות מתמטיות המתוארות בייצוג אחד לאחר, ו- (ג) הסקה לוגית בלתי תקפה. כמו כן ממוינות השגיאות על ידי בוראסי בקטגוריות: (א) שגיאות חישוב, (ב) תוצאה שגויה / תוצאה חלקית, ו- (ג) קבלת עובדות או תוצאות שאינן הגיוניות.

פעילות 2.3 עוסקת במיון שגיאות תלמידים לתרגילי חשבון בנושא "מספרים ופעולות". ניתן להתבסס בעיקר על המיון של בוראסי בפרק א.2 (למשל, בקטגוריות של (*) אלגוריתם שגוי, (*) העברה, ללא הצדקה, של תכונות או הגדרות לקונטקסט חדש, או (*) שגיאות בתהליך שמוליכות לתוצאות נכונות). נביא תחילה התייחסות מתמטית למספר דוגמאות.

למשל, לתרגיל: **$\boxed{9-5\times[9-5\times(9-5)]}$**

פתרון נכון: *דרך א'* $9-5\times[9-5\times(9-5)]= 9-5\times[9-5\times4] = 9-5\times[9-20]= 9-5\times(-11)= 9+55=64$

דרך ב' $9-5\times[9-5\times(9-5)] = 9-5\times[9-45+25] = 9-45+225-125 = -36+225-125= -36+100 = 64$

בדרך א' פועלים על פי סדר פעולות חשבון (חישב בסוגריים העגולים, בסוגריים המרובעים, וכפל קודם לחיבור). דרך ב' מתבססת על חוק הפילוג של הכפל מעל לחיסור, כאשר תחילה מפלגים את הסוגריים העגולים ולאחר מכן את הסוגריים המרובעים. ייתכנו דרכים נוספות לפתרון התרגיל.

שגיאה אופיינית: $9-5\times[9-5\times(9-5)] = 4\times[9-5\times(9-5)] = 4\times[4\times(9-5)] = 4\times4\times4 = 64$

פתרון "משמאל לימין" תוך התעלמות מתפקיד הסוגרים ומקדימות הכפל לחיבור. מפתיע שלמרות התהליך השגוי, עבור המספרים המוצגים בתרגיל זה התוצאה נכונה. עם זאת, דרך פתרון זו, בהתייחסות לתרגיל: $10-5\times[10-5\times(10-5)]$ תוביל לתוצאה השגויה, 125 (הפתרון הוא 85).

תרגילים מסוג זה מזמנים התייחסות לשאלה: באילו מקרים נשמרת התוצאה גם כאשר פועלים בדרך השגויה. כלומר, מתי $a-b[a-b(a-b)]=(a-b)(a-b)(a-b)$? (ראו פרק 4.8 שבשער א).

לתרגיל: $\boxed{\frac{15^4}{15^2}}$ **פתרון נכון:** $\frac{15^4}{15^2}=15^2$. ניתן להסבירו על ידי אחד מחוקי חזקות: $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$, ניתן גם להמיר את החזקה בפעולת כפל ולהסביר את פתרון התרגיל על ידי צמצום שברים.

שגיאה אופיינית: $\frac{15^4}{15^2}=15^{4:2}=15^2$. מעבר שגוי ממנת החזקות למנת המעריכים.

נציין שיש התייחסות למספר תרגילים המוצגים בפעילות זו בניתוח פעילות 1.5, ולגבי התרגיל 10 :50 :200, יש בפעילות שגיאה 3 בפרק ב.4 התייחסות לתרגיל הדומה, 10 :80 :480 עם מגוון פתרונות נכונים, ושגיאות אופייניות, ובפרק ב.5, בניתוח אירוע שגיאה 3 – פעולת החילוק, יש דיון בתרגיל.

שלוש הפעילויות הבאות עוסקות בנוסחאות אלגבריות: **פעילות 2.4** דורשת בחינת נכונות מתמטית של חמש נוסחאות אלגבריות (נציין כי רק נוסחה 4 – $(a + b):7=a:7 + b:7$ נכונה; וכי חוק החילוף מתקיים בחזקה ($a^b=b^a$) כאשר $4^2=2^4$ או כאשר $a=b>0$). **פעילות 2.5** דורשת אפיון, מיון וניבוי שגיאות אלגבריות, באמצעות המיונים של בוראסי, רדאץ והרשקוביץ, וינר וברוקהימר (ראו פרק א.2). **פעילות 2.6** מציגה ניתוח של תלמידים לגבי מספר נוסחאות, תוך הכללת יתר בקבלה או בדחייה של חוק החילוף וחוק הקיבוץ.

פעילות 2.7 עוסקת בניתוח ומיון שגיאות גיאומטריות של תלמידים לבעיות שנותחו בפרק א.2. על ידי מושקוביץ-הדר, זסלבסקי וענבר התייחס לקטגוריות: (א) שימוש בלתי ראוי במידע נתון (ב) הסקה לוגית בלתי תקפה- ישנה "קפיצה" בלתי מנומקת (ג) עיוות משפט או הגדרה- עיוות הראשית. ועל ידי בוראסי בהתייחס לקטגוריות: (א) הנחה שגויה, הנחה חלקית, ו- (ב) הגדרה שגויה, הגדרה חלקית.

פעילות 2.8 מזמנת דיון במיונים שהוצעו על ידי מספר חוקרים, ודורשת מן התלמידים להציע שגיאות המתאימות לקטגוריות השונות. ייחודה של הפעילות הכך שהיא "הפוכה" בדרישתה להציעה שגיאות לקטגוריות ולא, כרגיל, למיין שגיאות נתונות על פי הקטגוריות. כמובן שניתן למצוא דוגמאות מתאימות גם בפרק א.2.

פעילות 2.9 נועד לעורר דיון בסוגיות הקשורות לעמדות מורים לגבי היתרונות בהיכרות עם מיונים שונים של שגיאות תלמידים, וכיצד לשלב ידע זה בהוראה. ניתן להשתמש גם בניתוח הרלוונטי, הקצר בפרק א.5.

הערות והארות לפרק ב.3 - האם להשתמש בשגיאות בהוראה? אם כן, כיצד?

בפרק זה חמש פעילויות שבאמצעותן ניתן לעורר דיון שיאתגר הצגת דעות ועמדות של מורים לגבי שילוב שגיאות בהוראת מתמטיקה. ניתן לדון עם המורים בשלוש הגישות המרכזיות של מורים וחוקרים מתחום הוראת המדעים (פרק א.3) לפני העברת הפעילויות או אחריהן, בשיחה מסכמת. על החשיבות שאנו מיחסות לדיון כזה ראו פרק א.5.

פעילות 3.1 ופעילות 3.5 מעלות שאלות לגבי אפשרויות שונות לעשות שימוש בשגיאות בהוראה תוך התייחסות לעמדותיהן הדידקטיות של מספר מורות.

פעילות 3.2 מזמנת דיון בסוגיות האם נציג שגיאות של תלמידים וכן האם נציג מטלות מאתגרות שגיאה, תוך התייחסות לתרגיל בשברים. במחקר שהשתמש במשימה זו לשם בדיקת עמדות של מורים בבית ספר יסודי בארץ לגבי הצגת מטלות מאתגרות שגיאות לתלמידים, ולגבי הצגת פתרונות שגויים ודיון כתתי בשגיאות (Tsamir & Tirosh, 2003), נמצא שמרבית המורים נטו להציג בעיות מאתגרות שגיאה, לשם שיפור הידע המתמטי של התלמידים. יחד עם זאת, רבים הסתייגו מהצגה של שגיאות שלא עלו באופן טבעי בכיתה. המורים הציגו ארבעה סוגים של שיפוטים:

א. ***אציג מטלה כזו.*** כמעט כל המורים שצידדו בהצגת שגיאות במהלך ההוראה נימקו את עמדתם במניית היתרונות בתכנים המתמטיים שירכשו התלמידים באופן זה.

ב. ***אשתמש במטלה כזו בכיתה בתנאי ש....*** מורים אלה הציבו תנאים לגבי ידע קודם של התלמידים (למשל, רק אם שולטים במושג "מכנה משותף"), השלב בהוראה (למשל, רק לסיכום הנושא), והישגי התלמידים (רק לתלמידים שהישגיהם במתמטיקה טובים).

ג. ***לא אציג מטלה כזו בכיתתי.*** מורים ששללו הצגה של מטלה כזו התייחסו בדרך כלל לנימוקים הקשורים בלומד (יבלבל את התלמידים).

ד. ***אינני יודעת אם אציג מטלה כזו בכיתה.*** מורים שלא החליטו אם להציג, טענו שזו סוגיה שעליהם לחשוב עליה יותר, או שהם עצמם לא בטוחים בפתרונות הנכונים ולכן אינם יכולים להתייחס לשאלה (עד שיבררו לעצמם את ההיבט המתמטי).

פעילות 3.3 מזמנת הפעלת תלמידים בראיונות הוראתיים ובניתוח שגיאותיהם על פי בינברידג' (ראו פרק א.4). על המורים לבחון את ההוראה בחינה רפלקטיבית, ולציין לעצמם ולעמיתיהם יתרונות, חסרונות ושיקולים דידקטיים לגבי דרך זו.

פעילות 3.4: מזמנת בחינה רפלקטיבית של הוראה באמצעות גיליונות מעקב של תלמידים (על פי מקקי, פרק א.4). המורים יתבקשו לקחת חלק בהוראה מסוג זה ולאחר מכן להביע את דעתם לגבי גישה זו ולגבי נטייתם ליישם אותה בכיתותיהם.

הערות והארות לפרק ב.4- אירועי שגיאה בשיעורי מתמטיקה

פעילות שגיאה 1: הגדרות שונות למעגל

אירוע זה מבוסס על מאמר של בוראסי (Borasi, 1994), בו היא מדווחת על תוצאות של ניסוי הוראתי עם שתי תלמידות. לתלמידות הוצגו **הגדרות שגויות** למושג המעגל, והן התבקשו לנתח כל אחת מההגדרות (ראו פעילות מקדימה 1.2). ההצעות כללו את ההגדרות שנתנו תלמידות הכיתה והגדרות שניתנו בכיתות מקבילות. מטרת הדיון בהגדרות הייתה להביא את התלמידות למודעות לגבי הצורך לבודד את המושג כאשר הן מגדירות מעגל או כל הגדרה מתמטית אחרת.

פעילות מקדימה 1.1: הגדרות והסברים

א. ההגדרה המקובלת עבור מעגל היא: **כל** הנקודות במישור הנמצאות במרחק שווה מנקודה **נתונה**. או **המקום הגיאומטרי** של נקודות במישור הנמצאות במרחק שווה מנקודה **נתונה**.

ג. הגדרה מתמטית היא הגדרה מחוקקת, היא משמשת קריטריון חד משמעי לאבחן בין דוגמאות השייכות למושג לבין אלו שאינן שייכות למושג (אי דוגמאות). תכונה נוספת הנדרשת מהגדרה מתמטית

היא חוסר במעגליות. חשוב לדון גם במינימאליות ההגדרה, תכונה זו אינה הכרחית אך אם ההגדרה אינה מינימאלית, יש להוכיח שאין סתירה בין הפריטים השונים הכלולים בהגדרה.

פעילות מקדימה 1.2: התייחסות להגדרות תלמידים

כל ההגדרות בפעילות זו שגויות.

׳	**הסבר – מדוע ההגדרה שגויה**		**הסבר – מדוע ההגדרה שגויה**
1	ההגדרה מתאימה גם לקשת (חסרה המילה "כל" הנקודות) וגם לכדור (חסרה הדרישה "במישור").	4	אמנם מעגל שרדיוסו r שטחו πr^2, אך לא כל צורה ששטחה πr^2 היא בהכרח מעגל (למשל, ריבוע שצלעו $\sqrt{\pi}r$).
2	אסופה של תכונות אינה מגדירה מעגל. הנוסחה $2\pi K$ מתאימה גם להיקף ריבוע שצלעו $0.5\pi K$	5	אוסף בלתי מייצג של מונחים, והתייחסות ציורית ורגשית, לא מתמטית, למושג מעגל
3	משתמשת במושג המוגדר (מעגל). הגדרת מעגל תוך התייחסויות לעצמים מוחשיים שצורתם מזכירה מעגל או כדור (דו או תלת מימדי).	6	לפי הגדרה זו גם אלה מעגלים. 

ניתוח אירוע שגיאה 1.1

א. **אופי השגיאה** – השגיאה המתייחסת להגדרות שגויות והגדרות חלקיות של מושג המעגל.
ב. **רמת הדיון המתמטי** – באירוע שלוש רמות הדיון המתמטי (בוראסי): (1) עבודה על מטלה ספציפית- הפקת הגדרה עבור מושג מסוים (המעגל), (2) הבנת תוכן מתמטי – הבנה של מושג המעגל, (3) הבנת העולם המתמטי (טבעה של המתמטיקה) – דיון בתכונות של הגדרות מתמטיות. (למשל, (3) "למה את חושבת שלא מתאים לרשום רשימה ארוכה של תכונות?"; (5) "היית רוצה להוסיף תכונות?"; (8) "אז אנחנו רוצים שההגדרה תזהה מעגל בלבד. רשימה אורכה של תכונות תהייה אפילו יותר טובה. אז למה את לא אוהבת את זה?").
ג. **מצב הלמידה** – טיפול- תיקון השגיאה (Remediation) – השאלה והתשובות נקבעו על ידי המורה (הציגה הגדרות שגויות של מעגל ובקשה מהתלמידות לבדוק את תקפותן). המורה מנסה להוביל את קטיה לזהות ולתקן את השגיאה [(1) כל מה שכתוב נכון?; (3) למה את חושבת שלא מתאים לרשום רשימה ארוכה של תכונות?]
ד. **רמת המעורבות של הלומד** – החקירה מתעוררת בעקבות שגיאה של התלמידים, ומנוהלת בעיקר על ידי המלמד – המורה פיתחה פעילות המבוססת על שגיאות התלמידות: בדיקת תקפותן של הגדרות (שגויות) למעגל.
ה. **מקור השגיאה (מיהו השוגה)** -- הדיון מתמקד בשגיאה שנעשתה על ידי תלמידה הלוקחת חלק בפעילות זו (קטיה). השגיאה נבחרה מראש על יד המורה והוצגה לתלמידים במהלך פעילות מתוכננת.
ו. **המסגרת שבה מפתחים את אירוע השגיאה** -- דיון כתוב בו הוצגו לתלמידות מספר הגדרות שגויות.
ז. המטרות ההוראתיות של הפעילות
בהתייחסות לתוכן המתמטי-
להביא את התלמידות למודעות לגבי הצורך לבודד מושג מתמטי. לזמן דיון בשאלות:
- אילו תכונות ניתן להסיק מההגדרה המוצגת?
- אילו דוגמאות של המושג אינן מתוארות באמצעות ההגדרה?
- האם כל התכונות המצוינות הכרחיות? - האם אפשר לוותר על תכונה כלשהי?
- האם אפשר לשנות את ההגדרה ולתקן אותה?
בהתייחסות לטבעה של המתמטיקה-
דיון בתכונות הנדרשות מהגדרות מתמטיות. לזמן דיון בשאלות:

- אילו תכונות היינו רוצים שיהיו להגדרה מתמטית?
- אילו תכונות היינו רוצים שלא יהיו להגדרה מתמטית?
- לשם מה מגדירים?

ח. התוצאות המרכזיות של הפעילות

מסקנות מתמטיות שהוסקו באירוע השגיאה "הגדרות שונות של מעגל":
- רשימה ארוכה של תכונות אינה בהכרח הגדרה.
- הגדרת מעגל צריכה לזהות מעגלים בלבד.

נקודות נוספות למחשבה:
- בהתייחס להגדרות הנוספות, מדוע אינן מגדירות מעגל? מהן דוגמאות נגדיות אפשריות? מה תפקידן של דוגמאות נגדיות? כיצד ניתן לתקן כל הגדרה?
- בהתייחס לאירוע ההוראה: האם היה ניתן לגרום לתלמידים להסיק יותר מסקנות בלי אמירות מופרשות של בוראסי? אם כן, כיצד?

פעילות שגיאה 2: סכום הזוויות הפנימיות במצולע

אירוע זה מבוסס על מאמר של בוראסי (Borasi, 1994), בו היא מדווחת על פעילות שעשתה כדי להגיע עם התלמידות להכללה לגבי סכום הזויות הפנימיות במצולע. בוראסי הציגה בפני התלמידות את הטענה: בכל מצולע, סכום הזוויות הפנימיות שווה ל- 180 מעלות כפול מספר הצלעות. היא שאלה: האם הטענה נכונה, לדעתך? ובקשה מהן להסביר את תשובותיהן.

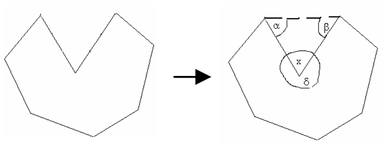
פעילות מקדימה 2.1: פתרו והסבירו

סכום הזוויות **בכל** מצולע (קמור או קעור), בעל n צלעות הוא $(n-2) \times 180$. נציין כאן מספר היבטים המתייחסים להיבט המתמטי של נוסחה זו. בהתייחסות למצולעים קמורים ניתן להוכיח נוסחה זו על ידי: (i) חישוב מספר המשולשים הנוצרים על ידי **העברת כל האלכסונים מקודקוד** כלשהו: מספר אלכסונים היוצאים מקדקוד כלשהו הוא n-3 ולכן מספר המשולשים שנוצרים הוא n-2, ולכן סכום הזוויות יהיה: $180(n-2)$. (ii) מציאת נקודה פנימית במצולע P כך שכל הקטעים מנקודה זו אל כל קדקודי המצולע יהיו בתוך מצולע. יצירת **n משולשים כך שהנקודה הפנימית P היא קדקוד שלהם**, ולכן סכום הזוויות הפנימיות הוא: $180(n-2)=180n-360$. (iii) הסבר אינדוקטיבי- סכום הזוויות **במשולש** הוא $(3-2)x180$, המעבר **למרובע** הוא על ידי הוספת קדקוד ומכאן **הוספת משולש**, ולכן סכום הזוויות במרובע שווה ל- $2x180=(4-2)x180$, המעבר **למחומש ממרובע** הוא על ידי הוספת קדקוד ולכן **הוספת משולש** ולכן סכום הזוויות יהיה: $3x180=(5-2)x180$ וכך הלאה....

כפי שהדגשנו, הנוסחה $(n-2) \times 180$ **תקפה** גם בהתייחסות למצולעים קעורים, אולם ההנמקות (הצדקות) שהובילו לנוסחה זו, בהתייחס למצולעים קמורים, אינן תמיד תקפות בהתייחסות למצולעים קעורים. למשל, קיימים מצולעים קעורים שבהם לא קיימת נקודה פנימית כך שכל הקטעים מנקודה זו לכל קדקודי המצולע יהיו בתוך מצולע. לדוגמא:  בנוסף, ההסבר המתבסס על האלכסונים אינו תקף, כיון שבמצולע קעור לא כל האלכסונים הם פנימיים (פעילות מקדימה 2.3).

אחת הדרכים שניתן להצדיק נוסחה זו, לגבי מצולעים קעורים, היא על יד הוכחה באינדוקציה, תוך מעבר ממצולע קעור למצולע קמור (לגביו הוכחנו את הנוסחה) וחישוב הזוויות הנוספות לעומת הזוויות

החסרות. נציג כאן את הרעיון המרכזי של ההוכחה הפורמאלית למקרה של מצולע קעור. לשם כך <u>נתייחס למצולע קעור בעל n צלעות וזווית נישאה אחת</u>. נחבר את שני הקדקודים הסמוכים לקדקוד הזווית הנישאה ונקבל מצולע קמור בעל (n-1) צלעות. סכום הזוויות במצולע הקמור שהתקבל הוא: $180[(n-1)-2]=180(n-3)$



על מנת לחשב את סכום הזוויות במצולע הקעור, בעל n הצלעות, יש להוסיף את ההפרש בין הזווית הנישאה (נסמנה δ) לסכום שתי הזוויות המסומנות במצולע הקמור (נסמנן α ו- β). ניתן להוכיח, במספר דרכים כי: $\delta-(\alpha+\beta)=180$.

למשל, מחיסור שתי המשוואות: $-\begin{cases} x+\delta=360 \\ x+\alpha+\beta=180 \end{cases}$ נקבל כי: $\delta-(\alpha+\beta)=180$

לכן סכום הזוויות במצולע הקעור הוא: $180(n-3)+[\delta-(\alpha+\beta)]=180(n-3)+180=180(n-2)$

פעילות מקדימה 2.2: טענות והוכחות לגבי מצולעים קמורים וקעורים

ניתן להשתמש בדרך שהצגנו בסעיף קודם כדי להראות שכל הנוסחאות נכונות. מטרת פעילות 2.2 היא לעורר דיון לגבי סכום הזוויות הפנימיות במצולעים קעורים ואפשר להציגה לתלמידים לפני פעילות 2.1. פעילויות 2.1 ו-2.2 ו-2.4 ניתנו ל- 12 סטודנטים שידעו כי סכום הזוויות במשולש הוא 180 מעלות וכי סכום הזוויות הפנימיות במצולע קמור בעל n צלעות הוא $180 \times (n-2)$, לאחר שני שיעורים של דיון במצולעים קמורים. <u>בפעילות 2.1</u> השיבו כל הסטודנטים כי סכום הזוויות הפנימיות הוא $180(n-2)$, ובכל פעם הציבו במקום n את מספר הצלעות של המצולע עליו נשאלו. <u>בפעילות 2.2</u> - כל הסטודנטים יישמו את הנוסחה לגבי מצולעים קמורים. לגבי המצולעים הקעורים: שני סטודנטים כתבו: "הנוסחה $180(n-2)$ היא כללית וצריכה לענות על כל סוגי המצולעים". שמונה סטודנטים כתבו שהטענה לא נכונה וש"אי אפשר להפעיל את הנוסחה במקרה זה", ושני סטודנטים כתבו ש"אי אפשר לדעת אם הנוסחה נכונה לגבי מצולעים אלה כי הם שונים".

בהסברים כתבו הסטודנטים כי במצולעים המוזרים אי אפשר להוכיח את נוסחת הסכום על ידי חלוקה למשולשים. למשל, ענת, שטענה כי אי אפשר להפעיל את הנוסחה לגבי המצולעים המוזרים כתבה: "במצולע הזה...[קמור]...  אפשר להעביר אלכסונים מאחד הקדקודי [של המצולע] ולקבל משולשים שסכום זוויותיהם שווה לסכום הזוויות הפנימיות של המצולע. לעומת זאת, במצולע קעור אי אפשר להשתמש בסכום זוויות המשולשים כי חלק המשולשים שנוצרים יוצאים מחוץ למצולע... ולכן סכום הזוויות של כל המשולשים לא שווה לסכום הזוויות של המצולע. למשל, 

פעילות מקדימה 2.3: התייחסות לטענות תלמידים

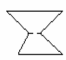
טענה 1 היא טענה שגויה. על מנת להפריך טענה זו (טענת "קיים" שאינה נכונה) יש להציג הוכחה כללית. הטענה מזמנת דיון מתמטי לגבי טענות מתמטיות שאינן תקפות מטיפוס "קיים" ובאי המספיקות של דוגמא נגדית לשם הפרכתן. ניתן להרחיב את הדיון לתפקידן של דוגמאות בהוכחות מתמטיות, במספיקות מול הכרחיות בתיקוף / הפרכה של טענות מטיפוס "לכל" או מטיפוס "קיים".
לגבי טענה 2 ראו הערות המתייחסות לפעילות 2.1.

פעילות מקדימה 2.4: טענות והוכחות לגבי מרובעים, מחומשים ומשושים

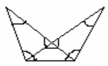
פעילות זו מזמנת בדיקה של ישימות הנוסחה במקרים הפשוטים (מספר קטן של צלעות) של מצולעים קעורים, מתוך כוונה ליצור אצל הלומדים ספקות לגבי מסקנותיהם השגויות בפעילות 2.3.

בקרב 12 הסטודנטים שלנו שהשיבו על שאלות אלה, מרביתם ציינו כי במרובע, מחומש ומשושה קמורים סכום הזוויות הוא אכן (n-2)180, אבל במצולעים קעורים לא ניתן לדעת. למשל, ארבעה סטודנטים העבירו בשרטוט ב' אלכסון חיצוני  וטענו שאי אפשר לדעת מהו סכום הזוויות הפנימיות. שלושה מהם העבירו בשרטוט ג' את האלכסון  וכתבו פעם נוספת ש"אי אפשר לדעת מהו סכום הזוויות הפנימיות של המצולע", ואילו הסטודנט הרביעי לא שרטט וכתב שאי אפשר לדעת.

בשרטוטים ה' ו- ו' העבירו שניים מסטודנטים אלו, אלכסון שחילק את המשושה לשני מרובעים:

  אחד מהם כתב, פעם נוספת, ש"אי אפשר לקבוע את סכום הזוויות הפנימיות" ואילו השני כתב: "כל מרובע הוא שני משולשים ולכן סכום הזוויות הפנימיות הוא 180 x 4, וזה בעצם מתאים ל- 180 x (6-2). פה זה עובד".

התלמידים האחרים הצליחו לפתור את הבעיות בדרכים שונות. למשל, הפתרונות הנכונים לשרטוט ב' היו דומים לתשובה של יעל שהעבירה את האלכסון הפנימי  ורשמה "זה בעצם שני משולשים. כלומר, 180 x 2 = 180 x (4-2)".

בתגובה לשרטוט ג', רוב הפתרונות עשו שימוש בשרטוט  ורשמו: חלקנו את המחומש לשלושה משולשים שסך הזוויות שלהם, זה זוויות המחומש. לכן סכום הזוויות 3x180 = (5-2)x180.

רונית שרטטה:  ורשמה: "לא הצלחתי לחלק את הצורה למשולשים, אז חילקתי לשני מרובעים, וכל מרובע חילקתי לשני משולשים. קבלתי ארבעה משולשים, 180 x 4. הזווית המסומנת היא לא זווית פנימית במחומש (היא רק עזרה לי לחשב) לכן צריך להוריד 180 מעלות (זווית שטוחה) וקבלתי 180 x 3 = 180 x (4-1) , וזה בעצם 180 x (5-2). אז הנוסחה עובדת".

בשרטוטים ה' ו- ו' מרבית הסטודנטים חילקו את הצורה למשולשים ורשמו: 180 x 4 = 180 x (6-2). הנוסחה נכונה.

לחלק מהסטודנטים ניתן שרטוט נוסף, ומרביתם העבירו  קווי עזר, והסיקו שסכום הזוויות הפנימיות של המצולע הוא 180 x (6-2).

ניתוח אירוע שגיאה 2.1

א. אופי השגיאה - דיון בשגיאה המתייחסת לטענה שגויה לגבי חישוב סכום זוויות פנימיות במחומש קמור.

ב. רמת הדיון המתמטי - הדיון מתמקד ברמה של <u>הבנת תוכן מתמטי</u> (בוראסי), בניסיון להגיע לנוסחה לחישוב סכום הזוויות הפנימיות של מצולע כלשהו. אילו המורה (בוראסי) הייתה מתייחסת בדיון למספיקות של דוגמא נגדית להפריך טענת "לכלי", ולדרכי תיקוף והפרכה המתאימים לטיפוסים שונים של טענות מתמטיות, היה זה דיון ברמה של <u>הבנת העולם המתמטי</u>. יש לציין בשלב (9) המורה אינה מאתגרת חשיבה מתמטית (למשל, האם שתי התוצאות אפשריות), אלא מיד מציעה לחפש "אולי יש משהו מיותר".

ג. מצב הלמידה - <u>גילוי (Discovery)</u> – מטרת אירוע זה היא ללמוד נושא חדש: "סכום הזוויות הפנימיות במצולע", תוך התייחסות ראשונית למחומש.

ד. רמת המעורבות של הלומד - התלמידות לוקחות חלק פעיל בפעילות היזומה ומנוהלת על ידי המורה.
ה. מקור השגיאה (מיהו השוגה?) - במאמר בוראסי בקשה את התלמידות לבחון את הטענה "סכום הזוויות הפנימיות במצולע בן n צלעות הוא 180n", כלומר, הטענה השגויה הוצגה על ידי המורה , כדי לדון בשגיאה ולהסיק את המסקנה הנכונה. (במאמר, בוראסי מציגה את הנושא תוך בקשה לבחון את תקפותה של טענה שגויה, אולם באירוע הוראה שהצגנו נתנו בפי המורה שאלה ותלמידה הציעה א הפתרון השגוי).
ו. המסגרת שבה מפתחים את אירוע השגיאה - דיון כתתי לגבי פתרון שגוי של סכום הזויות במצולע.
ז. המטרות ההוראתיות של הפעילות – לבנות הוכחה לנוסחת "סכום הזוויות במחומש" ולבחון את תקפותן של השערות התלמידות. לענות על השאלה: כיצד ניתן לבדוק את תקפותה של הטענה? (במאמר נבדקה גם האפשרות להכליל ולהסיק לגבי סכום הזוויות במצולע כלשהו).
ח. התוצאות המרכזיות של הפעילות - המסקנה: יש להתייחס רק לזוויות הפנימיות של המצולע, לכולן, ולגרוע את הזוויות שנוצרות בתוך המצולע. נקודות נוספות למחשבה: האם ניתן להכליל מאירוע הוראה זה שסכום הזוויות הפנימיות בכל מצולע הוא 180(n-2)? בכל מצולע קמור? מהי הכללה לגיטימית?

ניתוח אירוע שגיאה 2.2 (א' – ב')

א. אופי השגיאה - דיון בשגיאה המתייחסת לנוסחה למציאת סכום הזוויות הפנימיות במצולע קעור (בו קיים לפחות אלכסון אחד שאינו פנימי).
ב. רמת הדיון המתמטי - רמת הדיון (בוראסי) הבנת תוכן מתמטי: האם הנוסחה 180(n-2) המתאימה למציאת סכום הזוויות הפנימיות במצולע קמור בעל n צלעות, מתאימה גם למצולע קעור בעל n צלעות? יש גם התייחסות לעולם המתמטי באופן כללי, (א) האם הוכחנו? ו- (ב) קביעת תחום היישום של נוסחה מתמטית.
(1)אבי, למשל, טוען כי הנוסחה לא חלה על מצולעים קעורים, כי אין אפשרות לחלקם למשולשים. (3)דן, לעומתו, אינו רואה צורך בבדיקת תחום היישום של הנוסחה, ומסביר כי "נוסחה [ ] אם היא פועלת היא פועלת תמיד".
בנוסף ניתן לראות את החשיבה האינטואיטיבית, ויזואלית של (18)יעל, שטענה כי במצולע קעור יש זוויות פנימיות גדולות יותר [מאשר במצולע קמור] ולכן סכומם גדול יותר ואת (21)רביב, המפגין מולה בקרה של ידע פורמאלי, ומסייג באמירה: "זה נראה אבל זה לא הוכחה".
ג. מצב הלמידה - גילוי (Discovery)- הפעילות מתמקדת בשאלה האם הנוסחה לחישוב סכום זוויות פנימיות במצולע [180(n-2)], שהוכחה לגבי מצולעים קמורים, תקפה גם לגבי מצולעים קעורים. הנושא מוצג תוך הצגת רצף פעילויות, בהן הלומדים מתבקשים לחשב את סכום הזוויות הפנימיות במצולעים קמורים וקעורים (ראו הערות והארות לגבי הפעילויות המקדימות העוסקות בסכום הזוויות במצולעים).
ד. רמת המעורבות של הלומד - הלומדים דנים בפעילות היזומה על ידי תלמיד ומנוהלת על ידי המורה.
ה. מקור השגיאה (מיהו השוגה?) – תלמיד שהתלבט בהכללה.
ו. המסגרת שבה מפתחים את אירוע השגיאה – דיון כיתתי בו הלומדים מתלבטים בהתאמה של הנוסחה לחישוב סכום הזוויות הפנימיות במצולעים קמורים, למצולעים קעורים.
ז. המטרות ההוראתיות של הפעילות - לבחון האם נוסחה שהתקבלה לגבי מצולעים קמורים, תקפה גם למצולעים קעורים. להתייחס לרעיונות תלמידים, לדרכי פתרון שונים ולדרכים לבחינת תקפותן של טענות.
ח. התוצאות המרכזיות של הפעילות – התייחסות להבדל בין הקביעות: "הטענה אינה תקיפה" לבין "אינני יודע אם הטענה תקיפה", או "נראה שסכום הזויות גדול יותר" לעומת " הוכחנו שסכום בזוויות גדול יותר".

פעילות שגיאה 3: פעולת החילוק

פעילות זו מבוססת על עבודתם של קורן וצמיר (Tsamir & Koren, 2001; קורן וצמיר, 2004).

פעילות מקדימה 3.1: פתרו והסבירו

נציג כאן ארבע דרכים אפשריות לפתור את התרגיל. (א) לפי סדר פעולות חשבון (דרך א' שהציגו הלומדים בתחילת אירוע ההוראה): 0.6 = 10 : 6 = 10 : 80 : 480, (ב) החלפת סדר המחלקים (דרך ג' שהציגו הלומדים בתחילת אירוע ההוראה): 0.6 = 80 : 48 = 80 : 10: 480 = 10: 80 : 480
(ג) חילוק במכפלת המחלקים: 0.6 =800 : 480= (80x10) : 480 =10: 80 : 480 (דרך 6 בפעילות 3.2) ו- (ד) פעולת החילוק ככפל בהפכי: $480:80:10=480\times\frac{1}{80}\times\frac{1}{10}$

פעילות מקדימה 3.2: התייחסות לפתרונות תלמידים

פתרונות 1, 3, ו- 6 נכונים, פי שהסבנו בסעיף קודם. **הפתרונות השגויים**:

<u>פתרון 2</u> - $480 : 8 = 480 : (80:10) \neq 480 : 80 :10$, $a : b : c = (a : b) : c$. ואילו $(a : b) : c \neq a : (b : c)$

<u>פתרון 4</u> - $48 : 8:1=48:8 \neq 480 : 80 :10$ אמנם, בחילוק מותר לצמצם (לחלק באותו מספר השונה מאפס) את המחולק ואת המחלק אך לא ניתן לצמצם את המחולק <u>ושני</u> המחלקים. קל לראות זאת אם עוברים לייצוג ד בסעיף קודם (פעילות 3.1). התוצאה גדלה פי 10.

<u>פתרון 5</u> - $480:8 :1=480:8 \neq 480 : 80 :10$ השגיאה בפתרון זה היא בצמצום של שני המחלקים ולא של מחולק ומחלק.

2 ניתוח אירועי השגיאה 3.1 ו- 3.2 (שהתרחשו בכיתה ברצף)

א. אופי השגיאה - השגיאה מתבטאת באלגוריתמים שגויים לתרגיל 10 : 80 : 480.
ב. רמת הדיון המתמטי - <u>עבודה על מטלה ספציפית</u> - חישוב ובקרת פתרונות לתרגיל, וכן התייחסות מסוימת, להבנת <u>העולם המתמטי</u> – יחידות הפתרון לתרגיל חשבון [(7)מורה]. אמנם, במהלך הדיון המתמטי מאוזכרים חוקים מתמטיים שונים כמו סדר פעולות חשבון, חוק החילוף, חוק הקיבוץ ולהגדרות כמו פעולת החילוק- אך אין זה דיון של ממש. לכן, איננו רואות פה דיון ברמה של <u>הבנת תוכן מתמטי</u>.
ג. מצב הלמידה - <u>תיקון השגיאה (Remediation)</u> – המורה דרשה שני פתרונות במטרה לאתגר מגוון דרכים נכונות ושגויות. לאחר מכן הוצגו על הלוח פתרונות נכונים ושגויים של תלמידים לשם דיון בנכונותם. תלמידים הבינו שחלק מהפתרונות שהוצגו שגויים (למרות שאפשר שאינם יודעים מהי התשובה הנכונה), למשל, (13)גל "אבל לתרגיל חשבון יש תוצאה יחידה". והדיון החשוב באירוע 3.2 לגבי "דרכים לקביעת נכונות": (למשל, (43)יעל "צריך לחזור לסדר פעולות חשבון. זה הבסיס"; (47)עדי: "אין חוק החילוף בחילוק".
ד. רמת המעורבות של הלומד - החקירה מתעוררת בעקבות שגיאות של תמידים, ואלה לוקחים חלק פעיל בחקר הפתרונות. המורה מנחה ומוליכה את הדיון.
ה. מקור השגיאה (מיהו השוגה?) - <u>תלמידי הכיתה</u>.
ו. המסגרת שבה מפתחים את אירוע השגיאה – <u>דיון כיתתי</u> בשיעור.
ז. המטרות ההוראתיות של הפעילות - בחינת דרכים השונות בהן ניתן לפתור את תרגיל החילוק 480:80:10 ודיון בנכונותן. זיהוי שגיאות, ויכולת להסביר מדוע זו שגיאה. וכן, לבחון מהי פעולה חשבונית, מהו חילוק, ובאילו חוקי פעולות ניתן להשתמש על מנת לפתור תרגיל.

ח. התוצאות המרכזיות של הפעילות - דיון או התלבטות שנותרה לגבי (א) יחידות התוצאה לתרגיל חשבון, (ב) פעולת החילוק (ג) סדר פעולות החשבון, מהו? למה כך? (ד) חוקים דוגמת, חוק החילוף וחוק הפילוג (ה) מהו צמצום?

רשימת מקורות

אביטל, ש. (1975). שתי בעיות למחשבה. *גיליונות לחשבון* 39. הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל. חיפה.

אביטל, ש. (1976). היכן השגיאה? *גיליונות לחשבון* 45. הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל. חיפה.

אביטל, ש. (1979). מדוע דינה צדקה? *גיליונות לחשבון* 55. הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל. חיפה.

אביטל, ש. (1981). מה אפשר לעשות עם שגיאותיו של תלמיד ? *שבבים – עלון למורי המתמטיקה 15*, 1-5.

גודמן, א. וזהבי, נ. (1983). הטעות כנקודת מוצא. *שבבים – עלון למורי המתמטיקה 24*, 1-7.

דרייפוס, ט. (1979). טעות לעולם חוזרת *שבבים – עלון למורי המתמטיקה 12*, 1-12.

הרמתי, א. (1977). הטעיות ותועלתן בהוראה. *שבבים – עלון למורי המתמטיקה 6*, 1-4.

הרשקוביץ, ר., וינר, ש. וברוקהיימר, מ. (1981). האתגר שבשגיאות. *שבבים – עלון למורי המתמטיקה 17*, 1-11.

סמובול,פ. ואפלבאום, מ. (2003) מצא את הטעות. *על"ה - עלון למורה המתמטיקה 30*, 45-48.

צמיר פ., קורן, מ. (2004). קורותיו של תרגיל. *מספר חזק 2000- עלון למורים לבתי ספר יסודיים, 7, 39-43.*

תירוש, ד. (1996) *מתמטיקה מחקר והוראה*. מכון מופ"ת- מחקר ופיתוח תוכניות בהכשרת עובדי הוראה.

תירוש, ד., צמיר,פ., אזהרי, נ., ברש, א., קליין, ר. (1999). *העקביות המתמטית של תלמידים,* אוניברסיטת תל אביב - בית ספר לחינוך, הוצאת "רמות".

תירוש,ד., ברש, א., צמיר, פ., קליין, ר. (2000). *היבטים פסיכולוגיים בהוראת המתמטיקה*. מכון מופ"ת- מחקר ופיתוח תוכניות בהכשרת עובדי הוראה.

תירוש ד., תירוש ח., ברקאי ר., צמיר פ. (2003) *מחקרים ופעילויות: מספרים עשרוניים*, משרד החינוך- האגף לתכנון ולפיתוח תוכניות לימודים, אוניברסיטת תל אביב - בית ספר לחינוך, מטה מל"מ, המרכז הישראלי לחינוך מדעי טכנולוגי ע"ש עמוס דה- שליט, הוצאת "רמות".

Alro, H. & Skovsmose, O. (1996). On the Right Track. *For the Learning of Mathematics 16*, 2-8.

Ashlock, R.B. (1994). Error patterns in computation. New-York: Macmillan Publishing Company (sixth edition).

Bainbridge, R. (1981). To err is human: Towards a more positive approach to young children's mistakes in arithmetic. *Mathematics in School 10* (5), 10-13.

Borasi, R. (1985). Using errors as springboards for the learning of mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics 7* (3&4), 1-14

Borasi, R. (1986). *Reconceiving Mathematics Instruction: A Focus on Errors*. Issues in Curriculum Theory, Policy, and Research Series.

Borasi R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors, *For the Learning of Mathematics*, 7, 1-8.

Borasi R. (1994). Capitalizing on Errors As "Springboards for Inquiry": A Teaching Experiment *Journal for Research in Mathematics Education, 25,*166-208.

Bouvier, A. (1987). The Right to Make Mistakes. For the Learning of Mathematics 7(3), 17-25.

Edwards, H. C. (1993). Mistakes and Other Classroom Techniques: An Application of Social Learning Theory. *Journal on Excellence in College Teaching 4,* 49-60.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht, Netherlands: Reidel.

Fischbein, E. (1993). The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Straser, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 231-245). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Goodman, A. (1979). A problem with the order of operations. *Mathematics Teacher*.

McAcy, K. B. (1993). Sharing Teaching Ideas: Careless Mistakes. *Mathematics Teacher 86*, 298-9.

Meyerson, L. N. (1976) Mathematical Mistakes. *Mathematics Teaching 76*, 38-40.

Movshovitz-Hadar, N., Inbar, S. & Zaslavsky, O. (1986). Students distortions of theorems. *Focus on Learning Problems in Mathematics 8*, 49-57.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O. & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*, 3-14.

Radatz, H. (1979) Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 10*, 163-171.

Stavy, R., & Tirosh, D. (2000) *How students' (mis-)understand science and mathematics: Intuitive rules*. New York: Teachers College Press.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12* 151-169.

Thompson, A. G. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics ,15 ,* 105-.127

Tsamir, P., & Tirosh, D. (2003) Errors in an in-service mathematics teacher classroom: What do we know about errors in the classroom? *Paper presented at the 3rd International Symposium Elementary Maths Teaching (SEMT 3). Prague: The Czech Republic.(Plenary lecture).*

Tsamir, P. & Koren, M. (2001). Elementary school prospective teachers' solution of 200: 50: 10. In M. van den Heuvel (Ed.), *Proceeding of the 25th International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (Vol. I, pp. 374). Utrecht, The Netherlands: University of Utrecht.

Vinner, S., Hershkowitz, R. & Bruckheimer, M. (1981) Some cognitive factors as causes of Mistakes in the addition of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 12*,70-76

Watson, I. (1981). Investigating Errors of Beginning Mathematicians. *Educational Studies in Mathematics 11* 319-29.

Zehavi, N., & Bruckheimer, M. (January, 1984). $(x-y)^2$ is equal to x^2-y^2. *Mathematics in School.*