מספרים טבעיים:
מחקרים ופעילויות

כתיבה: **ד"ר חיים תירוש**

רות ברקאי

פרופ' דינה תירוש

יצא לאור במימון ובפיקוח האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים במשרד החינוך
ומטה מל"מ, המרכז הישראלי לחינוך מדעי טכנולוגי ע"ש עמוס דה־שליט

משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית
האגף לתכנון ולפיתוח
תכניות לימודים

אוניברסיטת תל־אביב
בית הספר לחינוך
ע"ש חיים וג'ואן
קונסטנטינר

מטה מל"מ, המרכז
הישראלי לחינוך מדעי
טכנולוגי
ע"ש עמוס דה־שליט

המרכז לחינוך
מדעי וטכנולוגי

מסת"ב ISBN 965-274-421-2

הוצאת רמות — אוניברסיטת תל־אביב

יצא לאור בשנת תשס"ו—2005

תוכן העניינים

מבוא

חוברת זו היא השלישית בסדרת חוברות, שנעשה בהן שימוש במחקרים שפורסמו בכתבי עת שונים לצורכי הכשרה וקידום מקצועי של מורים למתמטיקה בבתי ספר יסודיים.

בחוברת שלושה פרקים:

הפרק הראשון עוסק ביחס השוויון ובסימן השוויון, תוך התייחסות להיבטים התפתחותיים ולהוראתם.

הפרק השני מתמקד בפעולות חיבור וחיסור במספרים טבעיים.

הפרק השלישי עוסק בשיקולי דעת אותם יש להפעיל כאשר פותרים בעיות מילוליות.

כל פרק מתבסס על מאמרים בנושא ומציע פעילויות מתאימות.

לפרקים מבנה קבוע:

1. תיאור כללי ומתומצת של הנושא.
2. דפי פעילות המתייחסים להיבטים מתמטיים ולהיבטים דידקטיים.
3. הארות ופתרונות לדפי הפעילויות.

כל פעילות היא יחידה בפני עצמה, ואין תלות ביניהן.

השימוש בפעילויות מומלץ בעיקר בקורסים העוסקים בתכנים מתמטיים הנלמדים בבית הספר היסודי ובאלה העוסקים בהיבטים פסיכולוגיים, דידקטיים ומתודיים של הוראת מתמטיקה בבית הספר היסודי. החוברת בנויה כך שאפשר ללמוד ממנה גם באופן עצמאי.

חזרה

השוויון וסימן השוויון: התפתחות, למידה והוראה

השימוש בסימן "=" במתמטיקה נרחב מאד. זהו אחד הסימנים המתמטיים אותם פוגשים לומדים כבר בראשית לימודי החשבון. סימן זה מעיד על קיום יחס של שוויון בין שני ביטויים מתמטיים.

ישנן עדויות מחקריות רבות לכך שילדים ובוגרים נוטים להתייחס אל סימן השוויון כאל פקודה לבצע פעולת חשבון ולא כאל סימן המבטא יחס (Behr, Erlwanger & Nichos, 1976). כך, למשל, נמצא כי ילדים מתייחסים לסימן השוויון בפסוק [ ]=5+3 כאל הוראה לכך שיש לבצע את פעולת החיבור. כמו כן, לומדים רבים סבורים כי בפסוק מתמטי, לפני סימן השוויון (משמאלו) צריכה להופיע "בעיה מתמטית" ואחרי הסימן - תשובה לבעיה. בהתאם לכך, הם טוענים כי פסוקים כמו 4=1+3 ו- 1+3=2+2 הם "תרגילים לא נכונים" וכי יש לכתוב שוויון לא טיפוסי כמו 5=5 כביטוי הכולל פעולות (למשל 3+2=5).

במאמרים רבים ניתנים הסברים שונים לדומיננטיות של ההתייחסות לסימן השוויון כאל הוראה לביצוע פעולה. ההסברים המרכזיים מתייחסים לתהליכי התפתחות קוגניטיביים ולהשפעות אפשריות של הדגשים הוראתיים. בספרות המקצועית מתוארים גם מחקרים שבחנו השפעות של התערבויות הוראתיות על הבנת יחסי השוויון ועל ההתייחסות לביטויים מספריים (או אלגבריים) שסימן השוויון נכלל בהם (Carpenter, Franke, & Levi, 2003; Seo, & Ginsburg, 2003).

בחרנו להקדיש את הפרק הראשון בחוברת לעיסוק בנושא זה כיוון שמאמרים רבים מדווחים כי במהלך הלימודים תלמידים נחשפים לאמירות מתמטיות בהן מתאים יותר לפרש את הסימן '=' כסימן יחס מאשר כהוראה לבצע פעולה (למשל: $2\times(10+3) = 2\times10+2\times3$; $(2+3)+7 = 2+(3+7)$). למרות זאת, תלמידים רבים מתייחסים אל סימן השוויון אך ורק כאל סימן המציין פעולה ולא כאל סימן המבטא יחס, והתייחסות צרה זו אינה מאפשרת להם להתמודד עם מצבים בהם יש לפרש את סימן השוויון כמבטא יחס. מברך ויצחק, למשל, דיווחו כי תלמידים רבים, כולל בכיתות גבוהות ואפילו סטודנטים, מתייחסים לסימן השוויון כאל הוראה לפעולה (Mebarch, 1983). ממצאים אלה הביאו אותנו להחלטה לפתח פעילויות המתייחסות ליחס השוויון ולסימן השוויון, המיועדות לסטודנטים להוראה ולמורים בבתי ספר יסודיים. בפעילויות אלה נתייחס לשני היבטים מרכזיים: היבט מתמטי והיבט פדגוגי תוכני. הפעילויות מתבססות על מאמרים המתייחסים למשמעויות הניתנות לסימן השוויון ולהיבטים הוראתיים בהקשר זה.

ציינו כאן שלושה מאמרים שכדאי לעודד מורים וסטודנטים להוראה לעיין בהם:

Falkner, K. P.; Levi, L.; & Carpenter, T. R. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics*, 6, 232-236.

Kieren, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 317-326.

Morris, A. K. (2003). The development of children's understanding of equality and inequality relationships in numerical symbolic contexts. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *25*(2), 18-51.

פעילות 1: מיון, דרכי רישום וכתיבת בעיות מילוליות

עבדו תחילה על כל מטלה בדף זה (עבודה יחידנית), ולאחר מכן דונו בעבודותיכם בקבוצות של שלושה עד ארבעה. נסו להגיע להסכמה בהקשר למיון ולדרכי הרישום (תרגילים א׳ ו- ב׳).

א. לפניכם מספר ביטויים, מיינו לקבוצות. תנו שם לכל קבוצה והסבירו על פי מה מיינתם:

$$;\ (-8)\quad ;\ 6\quad ;\ \frac{a}{2}\quad ;\ \frac{1}{3}\quad ;\ -\quad ;\ >\quad ;\ 0.3\quad ;\ =\quad ;\ 128\quad ;\ \sqrt{2}\quad ;\ +\quad ;\ 2y\quad ;\ \frac{1}{2}$$

$$m^2\ ;\ \neq\quad ;\ 1\quad ;\ (-3)\quad ;\ \frac{1}{4}\quad ;\ z\quad ;\ 0.\overline{9}\quad ;\ 2\pi\quad ;\ <\quad ;\ 0\quad ;\ \div$$

ב. קבוצת מורים המלמדים חשבון בבית ספר יסודי שוחחו על האופן בו הם רושמים ביטויים מספריים בכתה א׳.

אביבה רשמה: 5+3 =

רותי רשמה: 5+3 = [ ]

מיכל רשמה: [ ] = 5+3

ירון רשם: 8 = [ ]+3

יעל רשמה: 5+3

רונית רשמה: 5+3 = 2 + [ ]

יאיר רשם: 5+3 = [ ]+ 2

שרית רשמה: 5+3 = [ ]+[ ]

שי רשם: 8 = [ ]

שיר רשמה: 8 = [ ]+[ ]

בתוך הסימון [ ] יש לכתוב מספר.
ציינו, לגבי כל אחת מדרכי הכתיבה, האם תשתמשו בה בכתה והסבירו מדוע.
האם תשתמשו בדרכי כתיבה נוספות? אלו?

ג. רשמו מספר בעיות מילוליות אשר ברישום פתרונן תשתמשו בסימן "+". פתרו את הבעיות.

ד. רשמו מספר בעיות מילוליות אשר ברישום פתרונן תשתמשו בסימן ":". פתרו את הבעיות.

ה. רשמו מספר בעיות מילוליות אשר ברישום פתרונן תשתמשו בסימן "=". פתרו את הבעיות.

ו. רשמו מספר בעיות מילוליות אשר ברישום פתרונן תשתמשו בסימן "<". פתרו את הבעיות.

פעילות 2: מה נשמר ומה לא נשמר?

יחס השוויון הוא רפלקסיבי (לכל a מתקיים $a=a$), סימטרי (לכל a ולכל b אם $a=b$ אז $b=a$) וטרנזיטיבי (לכל a, b, c אם $a=b$ ו $b=c$ אז $a=c$).

א. בדקו, לגבי כל אחד מארבעת היחסים, אלו משלוש התכונות שהזכרנו קודם מתקיימות ואלו אינן מתקיימות:

- $>$
- $<$
- מקביל
- מאונך

ב. חשבו על יחסים נוספים. בדקו לגבי כל אחד מהם אלו משלוש התכונות שהזכרנו קודם מתקיימות ואלו אינן מתקיימות.

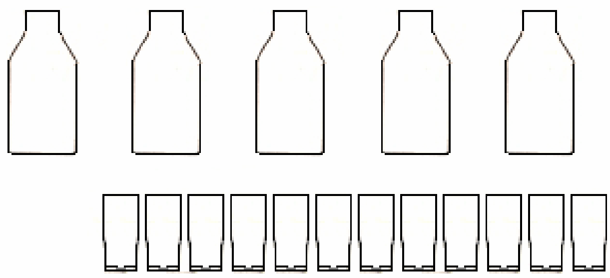
ג. מלאו את הטבלה: רשמו את הביטוי המתקבל בהתאם להוראות בעמודה הימנית, ורשמו בכל משבצת האם הטענה המתקבלת תקפה או שאינה תקפה. (**a ו- b מספרים טבעיים**).

	היחסים ההתחלתיים		
סוג השינוי	**X=Y**	**X<Y**	**X>Y**
דוגמא: הוסף a ל X ו b ל Y כאשר $a=b$	$X+a=Y+b$ טענה תקפה	$X+a<Y+b$ טענה תקפה	$X+a>Y+b$ טענה תקפה
הוסף a ל X ו b ל Y כאשר $a>b$			
הוסף a ל X ו b ל Y כאשר $a<b$			
חסר a מ X ו b מ Y כאשר $a=b$			
חסר a מ X ו b מ Y כאשר $a>b$			
חסר a מ X ו b מ Y כאשר $a<b$			

פעילות 3: שקילות ושוויון – בגני ילדים

א. פיאז'ה ועמיתיו (Inhelder, Sinclair & Bovet, 1974; Piaget,& Szeminska, 1952) הציגו לילדי גן (גילאי 3-6) סדרת משימות ובחנו את האופן בו הילדים ביצעו את המשימות. על השולחן הוצגו שתי קבוצות: קבוצה של בקבוקים (6 בקבוקים) וקבוצה של כוסות (12 כוסות). הילדים התבקשו להתאים כוס לכל בקבוק. בהתאם לתפקוד הילדים הוגדרו שלשה שלבי התפתחות בהבנת יחסי השקילות.

<u>שלב ראשון (פרה-אופרציונלי):</u> הילדים סידרו את כל הכוסות בשורה אחת ואת כל הבקבוקים בשורה אחרת (השורות לא באותו אורך).



כאשר הם נשאלו: האם מספר הבקבוקים שווה למספר הכוסות? הם השיבו: יש יותר בקבוקים (שורת הבקבוקים הייתה ארוכה יותר כי הבקבוקים היו מפוזרים יותר). הם התבקשו שוב להתאים לכל בקבוק כוס אחת, יצרו שתי שורות באורך שווה ואמרו שמספר הבקבוקים שווה למספר הכוסות. לאחר מכן המראיין ריווח את הבקבוקים והילדים טענו (שוב) שיש יותר בקבוקים.

<u>שלב שני (אינטואיטיבי):</u> הילדים התאימו לכל בקבוק כוס, תוך הקפדה על הנחת כוס מול בקבוק ויצירת שתי שורות באורך שווה (הם השתמשו בשש כוסות). כאשר המראיין ריווח את אחת השורות, הילדים טענו שיש בה יותר (בקבוקים או כוסות).

<u>שלב שלישי (אופרציונלי):</u> ילדים בשלב זה יצרו שתי שורות כאשר לכל בקבוק מתאימה כוס (הם השתמשו בשש כוסות). הם ידעו כי שמספר הבקבוקים שווה למספר הכוסות גם לאחר שהמראיין ריווח את אחת השורות.

i. מהם סוגי ההנמקות שניתנו, לדעתכם, על ידי ילדים בשלב ה<u>פרה-אופרציונלי</u> לתשובתם?

ii. מהם סוגי ההנמקות שניתנו, לדעתכם, על ידי ילדים בשלב <u>האינטואיטיבי</u> לתשובתם?

iii. מהם סוגי ההנמקות שניתנו, לדעתכם, על ידי ילדים בשלב <u>האופרציונלי</u> לתשובתם?

ב. פיאז'ה ועמיתיו חזרו על ניסוי זה עם ילדי גן תוך שימוש בקוביות זהות בשתי השורות (במקום בבקבוקים ובכוסות). האם, לדעתכם, הצלחת הילדים במשימה זו היתה רבה יותר / זהה / נמוכה יותר מהצלחתם במשימת הבקבוקים והכוסות? נמקו את תשובתכם

ג. בנו משימות דומות לאלו המתוארות בפעילות זו באמצעותן תבדקו באיזה שלב נמצא הילד מבחינת שימור כמות.

ד. פיאז'ה מתייחס, בכתביו, למושגים: שקילות ושוויון. תנו דוגמא לשתי קבוצות שכאשר נתייחס אליהן נשתמש במושג "שוות" ולשתי קבוצות שכאשר נתייחס אליהן נשתמש ב"שקולות".

פעילות 4: שוויון וסימני השוויון בכתה א'

במאמר של קירן (Kieran, 1981) מתוארות שתי משמעויות אינטואיטיביות של השוויון הרווחות אצל ילדים עם הגיעם לבתי הספר (לפני הוראת רישום פורמאלי של ביטויים מספריים):

1. <u>השוואה בין מספרי האיברים בשתי קבוצות</u> (מניית מספר האיברים בכל קבוצה והשוואת המספרים שהתקבלו): כאשר מתבקשים ילדי גן לקבוע האם בשתי קבוצות (המכילות עצמים דומים או שונים) אותו מספר איברים, הם קובעים זאת באמצעות מניית האיברים בכל אחת מהקבוצות והשוואת המספרים אותם קבלו.
2. <u>תוצאה של חיבור שתי קבוצות ומניית האיברים בקבוצת האיחוד</u> (לעתים מתבצעת מניית האיברים בכל אחת מהקבוצות לפני האיחוד ולעתים לא): ילדים מצרפים עצמים בשתי קבוצות וקובעים את מספר האיברים בקבוצת האיחוד (ביצוע זה מופיע לאחר שילדים מפגינים יכולת למנות איברים בכל אחת משתי קבוצות ולקבוע האם בקבוצות אלה אותו מספר איברים).

המשמעות הראשונה של השוויון קשורה בהתייחסות אל שוויון כאל "אותו דבר" (בקבוצה א' אותו מספר איברים כמו בקבוצה ב'). המשמעות השנייה קשורה בהתייחסות אל השוויון כאל פעולה שיש לבצע (איחוד בין קבוצות, או חיבור מספרי האיברים בשתי הקבוצות כדי לקבוע את מספר האיברים בקבוצה הכוללת).

א. הציעו פעילויות שיכולות, לדעתכם, לסייע בחיזוק ההתייחסות לשוויון כאל "אותו דבר" ובחיזוק ההתייחסות אליו כאל פעולה שיש לבצע.

ב. תלמידים בסיום כתה א' התבקשו להשיב על המטלות:

1. האם $4+3 = 5+2$? נכון/לא נכון, כי:
2. האם $13 = 7+6$? נכון/לא נכון, כי:
3. האם $3 = 3$? נכון/לא נכון, כי:
4. האם $4+3 = 7$? נכון/לא נכון, כי:
5. איזה מספר יש לרשום במקום החסר כך ש- $3+4 = 5+[\ \ ]$?
6. איזה מספר יש לרשום במקום החסר כך ש- $3+4 = [\ ]+5$
7. איזה מספר יש לרשום במקום החסר כך ש- $1+[\ ] = 3$?
8. איזה מספר יש לרשום במקום החסר כך ש- $[\ ] = 1+1$?

(i) ציינו, לגבי כל מטלה, דרכים אפשרויות נכונות שונות בהן הצדיקו תלמידים שהשיבו נכון על המטלה את תשובתם.

(ii) ציינו, לגבי כל מטלה, תשובות שגויות אפשריות והבהירו כיצד הצדיקו תלמידים שהשיבו כך את תשובותיהם.

פעילות 5: שינויים בהתייחסות לשוויון ולסימני השוויון בבתי ספר יסודיים

פעילות זו בודקת מהן המשמעויות הניתנות על ידי תלמידים בבתי ספר יסודיים לסימן השוויון.
הפעילות לקוחה מתוך מחקרים בהם רואיינו ילדים מכיתות א', ב' ו- ד' בנושא זה
(Baroody & Ginsburg, 1983; Morris, 2003).

המראיין הציג את השאלה:

עוגי המפלצת הכין, אתמול בלילה, שיעורי בית בחשבון. הוא רוצה לדעת אם מה שכתב נכון.
אם את/ה היית המורה שלו, מה היית מסמן כנכון ומה כלא נכון?

המראיין הציג לתלמיד 8 פסוקים (כל פסוק נרשם על כרטיסיה נפרדת. סדר הצגת הכרטיסים היה מקרי):

7+6=14-1	**7+6=6+6+1**	**7+6=4+9**	**7+6=6+7**
13=7+6	**7+6=13**	**7+6=0**	**7+6=6**

לגבי כל ביטוי, המראיין שאל:

א. מה זה אומר?

ב. האם עוגי המפלצת כתב את זה נכון? כמו שאתה היית כותב בשיעורי חשבון?

אם התלמיד ענה "כן", לשאלה ב', המראיין שאל:

ג. האם זה נכון? האם זה הגיוני?

אם תלמיד ענה "לא", לשאלה ב', המרואיין שאל:

ג. האם יש דרך לכתוב את זה כך שזה יהיה נכון?

ולבסוף,

ד. האם תשים כרטיס זה בערמה של הכרטיסים הנכונים או בערמה של הכרטיסים השגויים?

אם התלמיד היסס, המראיין שאל:

אם היית צריך לבחור, באיזו ערמה היית שם אותו? אם זה נכון- שים אותו בערמה של הנכונים,
אם זה לא נכון שים אותו בערמה של הלא נכונים.

המראיין המשיך להתייחס לעוגי המפלצת:

עוגי הכין עוד כרטיסים, והוא מבקש שתבדוק גם אותם.

המראיין הציג לתלמיד 10 פסוקים (כל אחד נרשם על כרטיסיה נפרדת והכרטיסיות הוצגו בסדר מקרי):

8=8	**5+1=7-1**	**6+3=4+4+1**	**6+4=5+5**
4+3=3+4	**7=5+2**	**9=9**	**3+1=1+1+1**
	4+2=42	**2+2=2**	

המראיין בקש:

סמן √ ליד הביטויים שכתובים נכון ו-X ליד אלו שאינם כתובים נכון.

כאשר התלמיד סיים לסמן √ ו- X הוא התבקש להסביר את תשובותיו.

במחקרים נמצא כי חלק מהתלמידים מתייחסים לסימן השוויון רק כאל הוראה לפעולה, אחרים מתייחסים לסימן השוויון כאל סימן יחס בלבד, ויש המתייחסים לסימן השוויון גם כאל הוראה לפעולה וגם כאל סימן יחס.

א. רשמו את הפסוקים אותם יניחו תלמידים, המתייחסים לסימן השוויון רק כהוראה לפעולה, בערמת פסוקי האמת. הסבירו את תשובתכם.

ב. מיינו את 18 הפסוקים לקבוצות באופנים שונים. הסבירו בכל מיון את הקריטריון למיון ואת שיקולי הדעת על פיהם יצרתם את הקבוצות.

ג. עליכם לראיין שני תלמידים בכתה א', שני תלמידים בכתה ב' ושני תלמידים בכתה ד' כדי לקבוע את האופנים בהם הם מפרשים את הסימן "=". כתבו את הראיון:

מה תעשו בדרך בה נערך הראיון המתואר בפעילות זו?

מה תשנו?

מדוע?

ד. ראיינו ילדים. נתחו את הראיונות. מה למדתם?

פעילות 6: התייחסות לשוויון, לאי שוויון ולסימניהם בבתי ספר יסודיים (א)

פעילות זו בודקת האם ילדים בבתי ספר יסודיים מכירים תכונות שונות של יחס השוויון ושל היחסים ״<״ ״>״ . הפעילות נבנתה על סמך פעילויות שתוארו במאמרים המתארים ממצאי מחקרים בהם רואיינו ילדים מכיתות א׳, ב׳ ו- ד׳ (Baroody & Ginsburg, 1983; Morris, 2003). במטלות לא נעשה שימוש בסימנים ״=״, ״<״, ״>״ . מבנה המטלות היה אחיד.

המראיין אמר לילד:

אני אראה לך כל מיני כרטיסיות ואני רוצה לראות איך אתה פותר את התרגילים. אתה יכול לפתור אותם בכל דרך שאתה רוצה.

התלמיד קיבל נייר, עפרון ודסקיות מנייה. המראיין הציג בכל פעם כרטיסיה אחת. בכל כרטיסיה נרשמו שתי שורות.

למשל:

7+3	4+6
7+3-2	4+6-2

המראיין חשף, בתחילה, רק את השורה העליונה והסתיר את השורה התחתונה.

המראיין קרא בקול את השורה הראשונה: 7+3 4+6

ושאל:

האם הכמויות האלה (7+3 ו- 4+6) שוות, או שאחת מהן גדולה יותר?

האם הכמות הזו (מצביע על ה- 4+6) שווה לכמות הזו (מצביע על ה- 7+3)? או האם הכמות הזו (מצביע על ה- 4+6) גדולה מהכמות הזו (מצביע על ה- 7+3)? או האם הכמות הזו (מצביע על ה- 7+3) גדולה מהכמות הזו (מצביע על ה- 4+6)?

לאחר שהילד השיב, המראיין בקש שיסביר את תשובתו.

לאחר מכן, המראיין חשף את השורה התחתונה ואמר:

4 ועוד 6 פחות 2 (מצביע על הביטוי באגף שמאל) ו- 7 ועוד 3 פחות 2 (מצביע על הביטוי באגף ימין).

המראיין שאל:

האם הכמויות שוות, או שכמות אחת גדולה יותר? האם הכמות הזו (מצביע על ה- 4+6-2) שווה לכמות הזו (מצביע על ה- 7+3-2)? או האם הכמות הזו (מצביע על ה- 4+6-2) גדולה מהכמות הזו (מצביע על ה- 7+3-2)? או האם הכמות הזו (מצביע על ה- 7+3-2) גדולה מהכמות הזו (מצביע על ה- 4+6-2)?

ושוב הילד התבקש להסביר את תשובתו.

לתלמידים ניתנו 28 כרטיסיות. הם התבקשו להתייחס, באופן שתואר כאן, לכל אחת מהכרטיסיות.

3+5 6+2 3+5+2 6+2+2	56 56 56-34 56-27	8 8 8+2 8+3	27 27 27+56 27+14
50+22 33+39 50+22+60 33+39+60	4+5 3+6 4+5+2 3+6+2	37 37 37-19 37-26	54 54 54+39 54+27
3 2 3+5 2+4	6 5 6-3 5-3	1048 1048 1048+987-987 1048	5 8 5+2 8+3
9 9 9 9-3+3	45+31 40+36 45+31-14 40+36-14	6 6 6+4 6+2	63+49 56+56 63+49+17 56+56+17
5 8 5+3 8+3	7+3 4+6 7+3-2 4+6-2	22+39 23+38 22+39-15 23+38-15	6 9 6-4 9-2
5 6 5-3 6-2	2 3 2+5 3+5	9 9 9-2 9-4	5 5 5-3 5 -2
6 3 6-2 3-2	4 4 4+2-2 4	5+4 6+3 5+4-1 6+3-1	25 25 25 25-17+17

א. שבצו כל אחת מ 28 הכרטיסיות במקום המתאים בטבלה (הטבלה מוצגת בעמוד הבא).

ב. ציינו דרכים אפשרויות נכונות בהן הצדיקו תלמידים את תשובותיהם. ראשית בחרו תרגיל אחד מכל שורה בטבלה ורשמו הסבר (או הסברים) אשר ניתנו לדעתכם על ידי תלמידים. לאחר מכן כתבו אסטרטגיות כלליות בהן תלמידים משתמשים.

ג. ציינו תשובות שגויות אפשריות והבהירו כיצד הצדיקו תלמידים שהשיבו כך את תשובותיהם.

ד. עליכם לראיין באופן דומה שני תלמידים בכתה א׳, שני תלמידים בכתה ב׳ ושני תלמידים בכתה ד׳ כתבו את הראיון:

מה תעשו באופן המתואר כאן?

מה תשנו? מדוע?

ה. ראיינו ילדים. נתחו את הראיונות. מה למדתם?

התכונה	**מספרים קטנים** **(בעשרת הראשונה)**		**מספרים גדולים** **(החל מהעשרת השנייה)**	
יחס השוויון				
חיבור אותו מספר לשני האגפים $a \quad a$ $a+b \quad a+c$				
חיסור אותו מספר משני האגפים $a \quad a$ $a-b \quad a-c$				
פיצוי בחיבור – והוספת אותו מספר לשני האגפים $a+b \qquad (a-c)+(b+c)$ $a+b+d \quad (a-c)+(b+c)+d$				
פיצוי בחיבור – והחסרת אותו מספר משני האגפים $a+b \qquad (a-c)+(b+c)$ $a+b-d \quad (a-c)+(b+c)-d$				
קיזוז (הוספת והפחתת אותו מספר לאחד האגפים) $a \qquad a$ $a-b+b \qquad a$				
יחסי אי שוויון				
אם $a<b$ אז $a+c<b+c$				
אם $a<b$ אז $a-c<b-c$				
אם $a<b$ ו- $c<d$ אז $a+c<b+d$				
אם $a<b$ ו- $c>d$ אז $a-c<b-d$				

פעילות 7: התייחסות לשוויון, לאי שוויון ולסימניהם בבתי ספר יסודיים (ב)

זוהי פעילות נוספת הבודקת האם ילדים בבתי ספר יסודיים מכירים תכונות שונות של יחס השוויון ושל היחסים ״<״ ״>״ . הפעילות נבנתה על סמך פעילויות שתוארו במאמר המתאר ממצאי מחקר בו רואיינו ילדים מכיתות א׳, ב׳ ו- ד׳ (Morris, 2003). במטלות לא נעשה שימוש בסימנים ״=״, ״<״, ״>״ . מבנה המטלות היה אחיד.

לפניכם 14 כרטיסיות:

כרטיסיה 1:
7 4
7+2 4+5

כרטיסיה 2:
2 5
2+9 5+3

כרטיסיה 3:
2 3
2+5 3+4

כרטיסיה 4:
3 6
3+4 6+2

כרטיסיה 5:
2 5
2+6 5+3

כרטיסיה 6:
5 4
5+5 4+6

כרטיסיה 7:
3 2
3+5 2+7

כרטיסיה 8:
4+5 3+6
4+5+2 3+6+2

כרטיסיה 9:
4 3
4+5 3+7

כרטיסיה 10:
3+5 6+2
3+5+2 6+2+2

כרטיסיה 11:
2 3
2+8 3+4

כרטיסיה 12:
7+3 4+6
7+3-2 4+6-2

כרטיסיה 13:
5 4
5+2 4+3

כרטיסיה 14:
5+4 6+3
5+4-1 6+3-1

מיינו את הכרטיסיות על פי התכונות הנבדקות בכל אחת מהן.

לסיכום הפעילויות בהקשר לשוויון, לאי שוויון ולסימניהם הציעו מבדק שרצוי לדעתכם לערוך לילדים בכיתה ד׳ בנושאים אלה. פרטו את שיקולי הדעת שלכם בבחירת הפריטים ובבחירת סדר הפעילויות.

הערות והארות לפעילות 1: מיון, דרכי רישום וכתיבת בעיות מילוליות

א. לפניכם מספר ביטויים, מיינו לקבוצות. תנו שם לכל קבוצה והסבירו על פי מה מיינתם:

$\frac{1}{2}$; $2y$; $+$; $\sqrt{2}$; 128 ; $=$; 0.3 ; $>$; - ; $\frac{1}{3}$; $\frac{a}{2}$; 6 ; (-8) ;

$\div$; 0 ; $<$; 2π ; $0.\overline{9}$; z ; $\frac{1}{4}$; (-3) ; 1 ; $\neq$; m^2

מיון מקובל אפשרי הוא לארבע קבוצות: מספרים, פעולות , יחסים, ביטויים אלגבריים.

מספרים:

$\frac{1}{2}$; $\sqrt{2}$; 128 ; 0.3 ; $\frac{1}{3}$; 6 ; (-8) ; 2π ; $\frac{1}{4}$; (-3) ; 1 ; $0.\overline{9}$; 0

פעולות: $+$; - ; $\div$

יחסים: $=$; $>$; $\neq$; $<$

ביטויים אלגבריים (תבניות מספר): $2y$; $\frac{a}{2}$; z , m^2

אפשר למיין כל קבוצה לתת-קבוצות. למשל את קבוצת המספרים אפשר למיין למספרים טבעיים, מספרים שלמים, מספרים רציונליים ומספרים אי רציונליים ולדון ביחסי ההכלה בין תתי קבוצות אלה. אפשר גם למיין את קבוצת המספרים למספרים חיוביים, מספרים שליליים ואפס.

אפשר להתייחס לתתי קבוצות של קבוצת הפעולות על פי תכונות מאפיינות של הפעולות. למשל, פעולות לגביהן מתקיים חוק החילוף ופעולות עבורן חוק החילוף אינו מתקיים.

יחסים אפשר למיין למשל, ליחסי שקילות וליחסים שאינם יחסי שקילות (ראו הרחבה לגבי יחסי שקילות בפעילות 2).

את הביטויים האלגבריים אפשר למיין, למשל, לביטויים מהמעלה הראשונה ולביטויים מהמעלה השנייה.

תלמידים וסטודנטים נוטים למיין את המספרים למגוון תתי קבוצות (כמו למשל, מספרים טבעיים, שליליים, אי רציונלים וכדומה). את סימני הפעולות ואת סימני היחסים הם נוטים לצרף לקבוצה אחת תחת הכותרת: פעולות. מיון זה תואם את ממצאי המחקר על פיהם תלמידים וסטודנטים נוטים להתייחס לסימן השוויון כאל הוראה לביצוע פעולה (ראו, למשל, אצל Kieren, 1981 ואצל McNeil & Alibali, 2005a, b). חשוב להתייחס בדיון הכיתתי להבחנה בין סימני הפעולות (חיבור, חיסור, כפל, חילוק וכדומה) לבין סימני היחס (גדול, קטן, שווה, שונה וכדומה).

ב. קבוצת מורים המלמדים חשבון בבית ספר יסודי שוחחו על האופן בו הם רושמים ביטויים מספריים בכתה א'.

אביבה רשמה:	5+3 =
רותי רשמה:	5+3 = [ ]
מיכל רשמה:	[ ] = 5+3
ירון רשם:	8 = [ ]+3
יעל רשמה:	5+3
רונית רשמה:	5+3 = 2 + [ ]
יאיר רשם:	5+3 = [ ]+ 2
שרית רשמה:	5+3 = [ ]+[ ]
שי רשם:	8 = [ ]
שיר רשמה:	8 = [ ]+[ ]

בתוך הסימון [ ] יש לכתוב מספר.

ציינו, לגבי כל אחת מדרכי הכתיבה, האם תשתמשו בה בכתה והסבירו מדוע. האם תשתמשו בדרכי כתיבה נוספות? אלו?

פעילות זו באה להדגיש את ההתייחסות לסימן השוויון כאל סימן יחס. כפי שציינו, ישנן עדויות לכך שתלמידים נוטים לראות בסימן השוויון הוראה לפעולה ולא סימן המעיד על יחס בין כמויות.
ההתייחסות לסימן כאל הוראה לפעולה היא במשמעות של קלט – פלט: הוראה לפעולה חד כיוונית, בדרך כלל כפעולה משמאל לימין כאשר משמאל לסימן השוויון רשומה ההוראה לפעולה אותה יש לבצע ומימין לסימן השוויון רשומה תוצאת אותה פעולה.

מגוון ההצעות לרישום ביטויים מספרים ופסוקים מספריים המוצעות על ידי המורים משקף אופני כתיבה שונים. נבחן את אופני הכתיבה תוך התמקדות בהתייחסות לסימן השוויון כאל סימן יחס.

אביבה מציעה את הכתיבה הנהוגה בכיתות רבות. ייתכן שהצגה זו, בה תרגיל חשבון (במקרה זה – תרגיל חיבור) רשום באגף שמאל, אחריו רשום סימן השוויון ומימינו לא רשום דבר, מחזקת אצל תלמידים את התחושה כי סימן שוויון מעיד על צורך במציאת הפלט (אגף ימין) לקלט (אגף שמאל), כלומר, כפקודה לבצע את הפעולה הרשומה באגף שמאל ולרשום את התוצאה המתקבלת באגף ימין. מכאן, שמנקודת המבט של הדגשת ההתייחסות לסימן השוויון כאל סימן יחס ולא כאל אופרטור, צורת הרישום של אביבה אינה מומלצת.

צורת הרישום שמציעה **רותי** דומה לדרך של אביבה (כאשר בתוך הסימון [ ] יש לכתוב מספר אחד), אך בגישתה של רותי יש ביטוי לכך שסימן השוויון מצריך קיום שני אגפים כאשר ערכי הביטויים הנרשמים בשניהם שווים זה לזה.

דרך הכתיבה של **מיכל** מרמזת על הסימטריות של יחס השוויון. כלומר, אפשר לרשום את הפסוק [8] = 3+5 גם כך: 5+3 = [8]. ילדים בדרך כלל נוטים לטעון כי רישום זה (5+3 = 8) הפוך (הם טוענים שמי שכתב כך "פשוט התבלבל וכתב את התרגיל הפוך").

כדאי לדון בדומה ובשונה בין דרך הכתיבה של מיכל לבין דרך הכתיבה של **ירון**. בדרך הכתיבה של **ירון** יש לרשום את אחד המחוברים בעוד שאצל מיכל יש לרשום את הסכום. ייתכן שדרך הכתיבה של ירון יכולה לסייע לתלמידים להשתחרר מההתייחסות לסימן השוויון כאל פעולה חד כיוונית, כשהפעולה אותה יש לבצע רשומה משמאל והתוצאה מימין.

יעל מציגה את פעולת החיבור באמצעות ביטוי מספרי. ילדים נוטים לפתור את התרגיל ולרשום 8. כאן אפשר להתייחס למחלוקת המתעוררת בדרך כלל אצל סטודנטים להוראה בהקשר לקביעה האם 5+3 הוא מספר: חלק מהסטודנטים טוענים כי 5+3 הוא מספר כיוון שזו דרך אחרת לכתוב את 8 וחלק טוענים כי 5+3 אינו מספר אלא פעולת חיבור. אפשר להתייחס כאן למונח "procept" אותו טבעו גריי וטול (Gray & Tall, 1994). המושג procept מורכב משתי מלים: pro(cess) ו-(con)cept והוא מביע את הדואליות של מונחים מתמטיים, כלומר את היותם בו-זמנית תהליכים ותוצרים. הביטוי 5+3 מבטא גם את התהליך (פעולת חיבור – ה process) וגם את תוצר הפעולה (המספר 8; התוצר - concept) ולכן הביטוי הוא בו זמנית גם מספר וגם פעולת חיבור. לטענתם של גריי וטול, היכולת להתייחס באופן דו-משמעי לסימבולים מתמטיים חשובה ביותר בהתמודדות עם משימות מתמטיות.

הרישום של יעל אינו כולל את סימן השוויון. כאשר תלמידים מתבקשים לרשום את ערכו של הביטוי עליהם להוסיף את סימן השוויון ואת המספר (8). כלומר, צורת רישום זו מאפשרת התייחסות לכך שסימן השוויון דורש נוכחות של שני אגפים – שני ביטויים מספריים שיש לבחון האם הם שווים זה לזה.

חוקרים ומורים מציינים כי דרכי הכתיבה של **רונית, יאיר ושרית** יכולות לסייע בפיתוח ובחיזוק ההתייחסות לסימן השוויון כאל סימן יחס. מטלות מסוג זה דורשות שימוש בידע לגבי הרכבי מספרים.

כדאי לדון בדרכים שונות בהן תלמידים משלימים את החסר בהקשר לדרכי הכתיבה של רונית, יאיר, ושרית. הפתרונות לגבי צורות הרישום של **יאיר** (2+[ ] = 5+3) ושל **רונית** ([ ]+2 = 5+3) יכולים להיעשות, בין היתר, באופנים הבאים:

- חישוב הערך של 5+3 (כלומר 8), יישום הידע לגבי הרכבי מספרים כדי למצוא את המספר אותו יש להוסיף ל- 2 כדי לקבל 8.
- שימוש ב"פירוק ובפיצוי" בחיבור תוך שמירה על השוויון בין האגפים. בהקשר לרישום שהוצע על ידי יאיר, למשל, המחובר 2 שבאגף ימין קטן ב- 1 מהמחובר 3 באגף שמאל ולכן, כדי לשמור על השוויון, המחובר החסר באגף ימין צריך להיות גדול ב- 1 מהמחובר 5 באגף שמאל – כלומר 6. הפתרון לגבי רונית דומה (אפשר לשם כך להשתמש בחוק החילוף).

באופן דומה אפשר לפתור במספר דרכים גם את הפסוק שהציעה **שרית** [ ]+[ ] = 5+3 :

- לחשב את הערך המספרי של 5+3 ולקבל 8. ליישם את הידע לגבי הרכבי מספרים ולרשום במקומות המיועדים לכך שני מספרים שסכומם 8.
- להשתמש ב"פירוק ובפיצוי" בחיבור. למשל לרשום 2 כמחובר ראשון באגף ימין וכיוון ש 2 קטן ב- 3 מהמחובר הראשון באגף שמאל, המחובר השני באגף שמאל יהיה גדול ב- 3 מהמחובר השני באגף ימין – כדי שהשוויון ישמר. כלומר המחובר השני יהיה 6.

שגיאה אופיינית של ילדים היא לרשום 8 במקום החסר בתרגיל של יאיר (2+[ ] = 5+3) .

סביר להניח כי שגיאה זו נובעת מראיית השוויון כאופרטור המפריד בין התרגיל (משמאל) לבין התוצאה (המספר הראשון מימין).

בדומה, כאשר מוצגת בעיה רב שלבית, למשל: "ביום ראשון דני קיבל 5 שקלים, ביום השני הוא קיבל עוד 3 שקלים וביום השלישי הוא קבל 2 שקלים נוספים. כמה שקלים קבל דני במהלך שלשת הימים?" תלמידים נוטים להשיב נכון אך לרשום 10 = 8+2 = 5+3. סביר להניח כי תלמידים אלה אינם מתייחסים לסימן השוויון כאל סימן המבטא מצב של "אותה כמות". ההתייחסות לסימן היא כאל הוראה לביצוע פעולה וכאל סימן המפריד בין התרגיל לבין התוצאה.

שגיאה אופיינית נוספת היא לרשום 10 במקום החסר בתרגיל של יאיר (2+[ ] = 5+3) ולהסביר "חיברתי את כל המספרים".

לגבי לצורת הרישום של **שרית** כדאי גם לדון בפתרון 5+3 = 5+3 ובפתרון 3+5 = 5+3. שני פתרונות אלה מתייחסים לשימושים אופייניים בסימן "=" לתיאור זהות (הרישום הראשון) ובהקשר לחוק החילוף (הרישום השני).

דרך הכתיבה של **שי** אף היא מתייחסת לזהות ([ ] = 8). אפשר להתייחס, למשל, לזהות בין 8 תפוחים לבין 8 אגסים (זהות מבחינת מספר האיברים בכל קבוצה). מחקרים מדווחים כי תלמידים נוטים להתנגד לרישום זה ולכתוב אותו כביטוי הכולל פעולה, כמו למשל: 5 = 5+0 או 5 = 0+5.

בתרגיל של **שיר** אפשר להתייחס לקושי הצפוי כתוצאה מ"היפוך" בין אגף ימין לאגף שמאל ([ ]+[ ] = 8) וזאת בדומה לצורת הרישום של ירון. כדאי להדגיש את הצורך ברישום הרכב כלשהו של מספרים שערכו 8.

אפשר, כמובן, להתייחס למצבים נוספים בהם משתמשים בסימן השוויון, למשל, בפתרון משוואות, ברישום כללי של תכונות פעולות החשבון, בהנדסה ועוד.

ג. רשמו מספר בעיות מילוליות אשר ברישום פתרונן תשתמשו בסימן "+". פתרו את הבעיות.

דוגמאות לבעיות מילוליות בהן נעשה שימוש בסימן "+"

1. אורי שיחק בגולות, בתחילת המשחק היו לו 14 גולות, במהלך המשחק הוא הרוויח 8 גולות. כמה גולות יש כעת לאורי (בסוף המשחק)?

פתרון: 14+8, לאורי יש 22 גולות.

2. לאורי 14 גולות ולאחיו שי 8 גולות. כמה גולות לשניהם יחד?

פתרון: 14+8, לשניהם יחד 22 גולות.

3. לאורי 14 גולות. מספר הגולות של אורי קטן ב- 8 ממספר הגולות של לשירה.כמה גולות יש לשירה ?

פתרון: 14+8, לשירה יש 22 גולות.

הצגנו כאן שלוש דוגמאות של בעיות מילוליות אשר בפתרונן נעשה שימוש בפעולת החיבור. בעיות אלה מדגימות שלוש קטגוריות אופייניות של בעיות מילוליות הקשורות לפעולת החיבור ולפעולת החיסור: בעיות דינמיות, בעיות סטטיות ובעיות השוואה.

בעיה 1 היא בעיה דינמית: בעיה דינמית היא בעיה המתארת התפתחות של אירוע או של תהליך שינוי. כלומר: יש מצב התחלתי- שינוי במצב זה ומצב סופי. התלמיד נשאל על אחד המצבים (בבעיה שהצגנו כאן, שואלים על המצב הסופי).

בעיה 2 היא בעיה סטטית: בבעיה סטטית מתוארות קבוצות שמתקיימים ביניהן יחסי הכלה (בדרך כלל שתי קבוצות זרות וקבוצה שלישית שהיא קבוצת האיחוד). התלמיד נשאל על גודל אחת הקבוצות (בבעיה שהצגנו שואלים על קבוצת האיחוד).

בעיה 3 היא בעיית השוואה: בעיות השוואה עוסקות בהשוואה כמותית בין שתי קבוצות המתוארות בבעיה. בבעיה מתואר היחס הכמותי בין שתי הקבוצות. התלמיד נשאל על גודל אחת הקבוצות או על היחס ביניהן (בבעיה שהצגנו כאן שואלים על גודל אחת הקבוצות).

כאשר תלמידים מתבקשים לכתוב בבעיות מילוליות בהן נעשה שימוש בפעולת החיבור או בפעולת החיסור הם נוטים בדרך כלל לכתוב בעיות "דינמיות" בדומה לבעיה 1.

ד. רשמו מספר בעיות מילוליות אשר ברישום פתרונן תשתמשו בסימן ":" פתרו את הבעיות.

דוגמאות לבעיות מילוליות בהן נעשה שימוש בסימן ":"

1. סבתא חילקה 18 גולות שווה בשווה, לששת נכדיה. כמה גולות קיבל כל נכד?

פתרון: 6 : 18 כל נכד קיבל 3 גולות.

2. סבא חילק 18 גולות לנכדיו. כל נכד קיבל שש גולות. לכמה נכדים חילק סבא את הגולות?

פתרון: 6 : 18 סבא חילק את הגולות ל 3 נכדים.

הצגנו כאן שתי בעיות מילוליות המדגישות את ההבחנה בין שתי משמעויות של פעולת החילוק: חילוק לחלקים שווים וחילוק להכלה..

בעיה 1 היא בעיה של חילוק לחלקים שווים: בבעיה של חילוק לחלקים שווים נתונה הכמות הכללית ונתון מספר הקבוצות שיש לחלק ביניהן, באופן שווה, את הכמות הכללית. שואלים על הכמות בכל קבוצה.

בעיה 2 היא בעיה של חילוק להכלה: בבעיה של חילוק להכלה נתונה הכמות הכללית ונתונה הכמות (אותה כמות) בכל קבוצה. שואלים על מספר הקבוצות שיתקבל כתוצאה מחלוקת הכמות הכללית לקבוצות.

לומדים נוטים בדרך כלל לכתוב בעיות של חילוק לחלקים שווים, כאשר הם מתבקשים לכתוב בעיות מילוליות בהן נעשה שימוש בפעולת החילוק.

ה. רשמו מספר בעיות מילוליות אשר ברישום פתרונן תשתמשו בסימן "=". פתרו את הבעיות.

דוגמאות לבעיות מילוליות בהן נעשה שימוש בסימן "="

1. לאורי יש 5 גולות יותר מאשר לשי. ידוע כי מספר הגולות של שניהם שווה למספר הגולות של אבנר. כמה גולות יש לכל אחד מהם? רשמו יותר מאפשרות אחת.

פתרון: נסמן ב- Δ את מספר הגולות שיש לשי. מספר הגולות של אורי יסומן ב - $\Delta+5$, נסמן את מספר הגולות של אבנר ב- [ ].

בהתאם לבעיה - צריך להתקיים התנאי הבא: $\Delta+5+\Delta=$ [ ].

כמובן שאפשר לסמן ב- Δ את מספר הגולות של אורי. יתקבל התנאי [ ] $= \Delta + \Delta - 5$

בבעיה זו יוצרים משוואה תוך שימוש בסימן השוויון לייצוג היחס בין שני מספרים: מספר הגולות שיש לאורי ולשי ביחד, בהקשר למספר הגולות של אבנר. כלומר, בבעיה זו יש למצוא מספרים מתאימים כך שיתקיים השוויון המבוקש.

2. לנטע 5 גולות, לרינת 7 גולות, ולשירה 8 גולות. כמה גולות יש לנעמה אם ידוע כי מספר הגולות של נטע ורינת (ביחד) שווה למספר הגולות של שירה ונעמה (ביחד)?

פתרון: 5+7 = 8+[ ]

3. רן שיחק בגולות. בתחילת המשחק היו לו 14 גולות, כמה גולות הרוויח רן במהלך משחק, אם בסוף המשחק היו לו 22 גולות?

פתרון: 14+[ ] = 22

4. לגיל 14 גולות. כמה גולות יש לנורית, אם ביחד יש להם 22 גולות?

<u>פתרון:</u> $14+[\ ] = 22$

5. לאריאל 14 גולות. כמה גולות יש לשירה יותר מאשר לאריאל אם לשירה יש 22 גולות?

<u>פתרון:</u> $14+[\ ] = 22$

בבעיות אלה ישנו ביטוי, בתשובות התלמידים, לשוויון בין שני האגפים. דרך הפתרון המוצגת כאן, לבעיות אלו, מדגישה את ההבחנה בין סימני הפעולה לבין סימן השוויון כיחס. בעיות 3, 4 ו- 5 הן בעיות דומות לבעיות שהוצגו במשימה ג' (בעיות מילוליות בהן נעשה שימוש בסימן: "+"). השוני הוא בגודל עליו שואלים. שאלה דינמית בה שואלים על השינוי או על המצב ההתחלתי מזמינה דרכי פתרון העושים שימוש בסימן השוויון כסימן יחס. בדומה, שאלה סטטית בה נתון גודל קבוצה אחת, וגודל קבוצת האיחוד ושואלים על הקבוצה השנייה, מזמינה דרכי פתרון העושים שימוש בסימן השוויון כסימן יחס. בעיה 3, בה נתונות הכמויות שהיו לרן בתחילת המשחק ובסופו, מזמנת במיוחד שימוש ברישום של הגודל ההתחלתי, הגודל החסר והכמות הסופית כיוון שילדים נותנים להמחיש את הבעיה תוך שימוש בחפצים.

ו. רשמו מספר בעיות מילוליות אשר ברישום פתרונן תשתמשו בסימן ">". פתרו את הבעיות.

1. לאורי 5 גולות יותר מאשר לשי. לשניהם יחד יש יותר מ- 15 גולות. כמה גולות יש לאורי וכמה גולות יש לשי? רשמו יותר מאפשרות אחת.

<u>פתרון:</u> אם נסמן ב- Δ את מספר הגולות שיש לשי, נקבל כי צריך להתקיים: $\Delta+5+\Delta>15$. אי שוויון זה מתקיים כאשר $\Delta > 5$.

כמובן שאפשר לסמן ב- Δ את מספר הגולות של אורי ואז לקבל את התנאי $\Delta+\Delta-5>15$.

במקרה זה, אי השוויון יתקיים כאשר $\Delta>10$

2. רן שיחק בגולות. בתחילת המשחק היו לו 14 גולות. כמה גולות הרוויח רן במהלך המשחק אם בסוף המשחק היו לו יותר מ-22 גולות? רשמו יותר מאפשרות אחת.

<u>פתרון:</u> $14+\Delta>22$

3. לגיל 14 גולות. כמה גולות יש לאחיו צבי אם ביחד יש להם יותר מ- 22 גולות? רשמו יותר מאפשרות אחת.

<u>פתרון:</u> $14+\Delta>22$

4. לרינת 14 גולות. לשירה 22 גולות. כמה גולות רינת צריכה להרוויח במשחק כדי שיהיו לה יותר גולות מאשר לשירה? רשמו יותר מאפשרות אחת.

<u>פתרון:</u> $14+\Delta>22$

הערות והארות לפעילות 2: מה נשמר ומה לא נשמר?

יחס השוויון הוא רפלקסיבי (לכל a מתקיים $a=a$), סימטרי (לכל a ולכל b אם $a=b$ אז $b=a$) וטרנזיטיבי (לכל a, b, c אם $a=b$ ו $b=c$ אז $a=c$).

<table><tr><td>
א. בדקו, לגבי כל אחד מארבעת היחסים, אלו משלוש התכונות שהזכרנו קודם מתקיימות ואלו אינן מתקיימות:

- $>$
- $<$
- מקביל
- מאונך
</td></tr></table>

יחס שהוא רפלקסיבי, סימטרי, וטרנזיטיבי נקרא יחס **שקילות** (Equivalence).

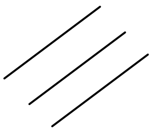
באופן כללי אם נסמן יחס על ידי סמל כלשהו (למשל הסימן R) אזי יחס נקרא ***יחס שקילות*** אם הוא מקיים את התנאים הבאים:

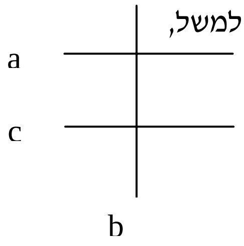
(i) רפלקסיבי - לכל a מתקיים כי aRa.

(ii) סימטרי – לכל a ו- b מתקיים: אם aRb אז bRa

(iii) טרנזיטיבי – לכל a, b ו- c מתקיים אם aRb וגם bRc אז aRc.

נבדוק אילו תכונות, מבין שלוש התכונות שהזכרנו, מקיימים היחסים $<$, $>$, מקביל, מאונך:

היחס	רפלקסיבי	סימטרי	טרנזיטיבי
$>$	היחס **אינו** רפלקסיבי: כדי שיחס זה יהיה רפלקטיבי צריך להתקיים $a>a$. אך $a=a$ ולא גדול ממנו. (דוגמא: $7>7$ אינו פסוק אמת).	היחס **אינו** סימטרי: אם $a>b$ אז לא מתקיים ש $b>a$. (דוגמא: $7>3$ ולכן 3 אינו גדול מ 7).	היחס **הוא** טרנזיטיבי: אם $a>b$ ו- $b>c$ אז $a>c$.
$<$	היחס **אינו** רפלקסיבי: כדי שיחס זה יהיה רפלקטיבי צריך להתקיים $a<a$. אך $a=a$ ולא קטן ממנו. (דוגמא: $7<7$ אינו פסוק אמת).	היחס **אינו** סימטרי כי: אם $a<b$ אז לא מתקיים ש $b<a$. (דוגמא: $3<7$ ולכן 7 אינו קטן מ 3).	היחס **הוא** טרנזיטיבי אם $a<b$ ו- $b<c$ $a<c$.
מקביל	היחס **אינו** רפלקסיבי: היחס "מקביל" מוגדר לגבי שני ישרים, לפחות.	היחס **הוא** סימטרי: אם a מקביל ל- b (למשל ישר או מישור) אזי גם b מקביל ל-a.	היחס **הוא** טרנזיטיבי: אם a מקביל ל- b ו-b מקביל ל- c אזי a מקביל ל- c. למשל, 

היחס	רפלקסיבי	סימטרי	טרנזיטיבי
מאונך	היחס **אינו** רפלקסיבי: היחס "מאונך" מוגדר לגבי שני ישרים.	היחס **הוא** סימטרי: אם a מאונך ל- b אז גם b מאונך ל-a. אם ישר אחד מאונך לישר השני אזי הזווית ביניהם היא בת 90^0 ולכן גם הישר השני מאונך לישר הראשון.	היחס **אינו** טרנזטיבי: אם a מאונך ל- b ו- b מאונך ל- c אזי a לא מאונך ל- c. למשל, 

ב. חשבו על יחסים נוספים. בדקו לגבי כל אחד מהם אלו משלוש התכונות שהזכרנו קודם מתקיימות ואלו אינן מתקיימות.

היחסים: חפיפה ודמיון הם יחסי שקילות.
יחס ההכלה (הכלה ממש) **אינו** מקיים את כל שלושת התכונות של יחס שקילות. יחס זה אינו רפלקסיבי ואינו סימטרי אך הוא טרנזיטיבי.

נגדיר יחס נוסף שהוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי ולכן הוא יחס שקילות. נסמן יחס זה ב- ~ היחס יוגדר בין שני זוגות של מספרים סדורים באופן הבא: $(a, b)\sim(c,d)$ אם ורק אם $ad = bc$.
נבחן את שלוש התכונות לגבי הגדרת יחס זה (כדאי לעודד את הלומדים לנסות לזהות מה מבטא יחס זה – אפשר לסייע להם באמצעות רישום כל אחד מהזוגות הסדורים כמונה – למשל a וכמכנה – למשל b):

(i) רפלקסיבי: צריך להראות כי $(a, b)\sim(a, b)$. חוק החילוף מתקיים לגבי פעולת הכפל ולכן $ab=ba$

(ii) סימטרי: צריך להראות כי אם $(a, b)\sim(c, d)$ אז $(c, d)\sim(a, b)$. ואמנם אם $ad = bc$ אזי בגלל חוק החילוף לגבי הכפל נקבל כי גם $da = cb$ וכיוון שיחס השוויון הוא סימטרי נקבל כי $cb = da$ ולפי הגדרת היחס ~ נקבל כי $(a, b)\sim(c, d)$.

(iii) טרנזיטיבי: צריך להראות כי אם $(a, b)\sim(c, d)$ ו- $(c, d)\sim(e, f)$ אז $(a, b)\sim(e, f)$.
ואמנם מכיוון ש $(a, b)\sim(c, d)$ אז מתקיים כי $ad = bc$, ומכיוון ש- $(c, d)\sim(e, f)$ אזי $cf = de$. נכפול את שני אגפי השוויון הראשון ב- f ונקבל $adf = bcf$.
נשתמש בשוויון השני הנובע מהנתון ($cf = de$), נציב בשוויון הרשום בסוף השורה הקודמת ונקבל: $adf =bcf = bde$. קבלנו כי $adf = bde$ כלומר, $af=be$ ולפי הגדרת היחס: $(a, b)\sim(e, f)$.

ג. מלאו את הטבלה (רשמו את הביטוי המתקבל בהתאם להוראות בעמודה הימנית, רשמו בכל משבצת האם הטענה המתקבלת תקפה או שאינה תקפה. (**a ו- b מספרים טבעיים**).

	היחסים ההתחלתיים		
סוג השינוי	**X=Y**	**X>Y**	**X<Y**
דוגמא: הוסף a ל X ו b ל Y כאשר a=b	X+a = Y+b טענה תקפה	X+a> Y+b טענה תקפה	X+a< Y+b טענה תקפה
הוסף a ל X ו b ל Y כאשר a>b	X+a = Y+b הטענה אינה תקפה (מתקיים ש- X+a>Y+b)	X+a > Y+b טענה תקפה	X+a < Y+b הטענה אינה תקפה
הוסף a ל X ו b ל Y כאשר a<b	X+a = Y+b הטענה אינה תקפה (מתקיים ש- X+a<Y+b)	X+a > Y+b הטענה אינה תקפה	X+a< Y+b טענה תקפה
חסר a מ X ו b מ Y כאשר a=b	X-a = Y-b טענה תקפה	X-a >Y-b טענה תקפה	X-a< Y-b טענה תקפה
חסר a מ X ו b מ Y כאשר a>b	X-a = Y-b הטענה אינה תקפה (מתקיים ש- X-a<Y-b)	X-a > Y-b הטענה אינה תקפה	X-a< Y-b טענה תקפה
חסר a מ X ו b מ Y כאשר a<b	X-a = Y-b הטענה אינה תקפה (מתקיים ש- X-a>Y-b)	X-a> Y-b טענה תקפה	X-a< Y-b טענה אינה תקפה

הטבלה באה להדגיש את תכונות יחסי השוויון ואת תכונות יחסי אי-השוויון בהקשר לפעולות החיבור והחיסור.

לגבי שוויון:

1. אם $x = y$ ו $a = b$ אזי $x \pm a = y \pm b$. כאשר מוסיפים (או מחסרים) גדלים שווים מגדלים שווים מתקבלים גדלים שווים.
2. אם $x = y$ ו- $a>b$ אזי $x+a>y+b$
3. אם $x = y$ ו- $a>b$ אזי $x-a<y-b$ (מצב זה קשה לחלק מהתלמידים הצעירים. הם נוטים לקבוע כי כאשר מחסרים מספר גדול יותר – מתקבל מספר גדול יותר).

לגבי אי-שוויון:

4. אם $x<y$ ו- $a=b$ אזי $x \pm a < y \pm b$
5. אם $x<y$ ו- $a<b$ אזי $x+a<y+b$

6. אם $x<y$ ו- $a>b$ אזי $x-a<y-b$ (מצב זה קשה לחלק מהתלמידים הצעירים. הם נוטים לקבוע כי לאחר ההפחתה יתקיים בין שני האגפים מתקיים יחס של שוויון כיוון ש"מהמספר הגדול מחסרים מספר קטן – ומהמספר הקטן מחסרים מספר גדול- אז מתקבל שוויון").

בטבלה יש ביטוי להבחנה בין שני מצבים: מצב בו הטענה אינה תקפה עבור כל המקרים בתחום ההגדרה ומתקיימת, עבור כל אותם מקרים, טענה אחרת. במצב השני הטענה תקפה לחלק מהמקרים אך אינה תקפה למקרים אחרים, כלומר, יחסי הסדר נקבעים על פי הערכים הספציפיים של הכמויות אותן הוסיפו או החסירו.

למשל, לגבי פעולת החיבור:

אם $x<y$ ו- $a>b$ אז ייתכנו מצבים שונים: מצב בו $x+a = y+b$, $x+a<y+b$ או $x+a>y+b$.

דוגמא: נניח ש $x = 3$ ו- $y = 6$ ואם $a = 4$ ו- $b=1$ אזי מתקיים כי $3+4 = 6+1$;

אם $a=2$ ו- $b=1$ אזי מתקיים כי $3+2<6+1$;

כאשר $a = 7$ ו- $b=2$ אזי נקבל כי $3+7>6+2$.

כלומר, ייתכנו כל שלושת המצבים.

באותו אופן כדאי לבדוק לגבי פעולת החיסור, כלומר,

אם $x<y$ ו- $a<b$, בדקו את יחסי הסדר בין הביטויים $x-a$ ו- $y-b$.

מצאו דוגמאות מספריות עבור a ו- b, כך שיתקיימו שלושת המצבים האפשריים בין שני הביטויים $x-a$ ו- $y-b$.

התייחסנו קודם לטעויות אופייניות של תלמידים צעירים לגבי טענות תקפות. ממצאי מחקרים (ראו למשל אצל Morris, 2003) מצביעים על כך שילדים צעירים משתמשים בכללים איכותיים לא תקפים בהשוואה של כמויות מספריות גם לגבי טענות לא תקפות. למשל, אם $a<b$ ו- $c>d$ הם טוענים כי $a+c = b+d$ (תפיסה שגויה לפיה כאשר מוסיפים למספר הקטן "מספר גדול" ולמספר הגדול מוסיפים "מספר קטן" מתקבל בהכרח שוויון).

הערות והארות לפעילות 3: שקילות ושוויון – בגני ילדים

א. התייחסות לשלושת שלבי ההתפתחות בהבנת יחסי השקילות, על פי פיאז'ה:

i. מהם סוגי ההנמקות שניתנו, לדעתכם, על ידי ילדים בשלב הפרה-אופרציונלי לתשובתם?

ii. מהם סוגי ההנמקות שניתנו, לדעתכם, על ידי ילדים בשלב האינטואיטיבי לתשובתם?

iii. מהם סוגי ההנמקות שניתנו, לדעתכם, על ידי ילדים בשלב האופרציונלי לתשובתם?

בשלב הראשון (פרה-אופרציונלי) הילדים לא יצרו התאמה חד-חד ערכית ועל בין שתי הקבוצות, כלומר הם לא יצרו התאמה בה לכל בקבוק מותאמת בדיוק כוס אחת. טענתו של פיאז'ה בהקשר זה היא כי בשלב זה הילדים אינם יכולים להתעלם ממיקום העצמים במרחב. כלומר הילדים מגיבים בהתאם לצורת ארגון העצמים במרחב הם מתרכזים בשטח שתופסים העצמים. הם אינם יכולים להתעלם מהיבט זה ולכן הם טוענים שבקבוצה המרווחת יש יותר חפצים.

בשלב השני (אינטואיטיבי) הילדים יוצרים בעצמם התאמה חד-חד ערכית. הם מתאימים לכל בקבוק כוס, ובכך יוצרים שוויון במספר העצמים בשתי הקבוצות, ללא ספירה. אך כאשר המראיין שיבש את ההיבט החזותי של ההתאמה שהילדים ביצעו, על יד ריווח (או ציפוף) אחת הקבוצות (כוסות או בקבוקים), השוני בארגון במרחב וביטול ההתאמה החזותית גרם לכך שהילדים טענו שמספר האיברים באחת הקבוצות (המרווחת יותר) גדול יותר. כלומר, הילדים יוצרים התאמה חד-חד ערכית בין שתי קבוצות של עצמים, אבל כאשר משנים מצב זה אין לחשיבתם את היכולת להפיכות, כלומר, להחזרת המצב לקדמותו. הם נוטים להתרכז במיקום העצמים במרחב, ולטעון לאי שוויון. בשלב זה, לפעמים הילדים עומדים על השוויון במספר, למרות פיזור אחת הקבוצות, וזאת כאשר פיזור העצמים בשתי הקבוצות דומה.

בשלב השלישי (אופרציונלי) תפיסת השוויון מושגת מיד והיא נשארת קבועה למרות שינויים במיקום העצמים במרחב. כלומר, הילדים משמרים את המספר וחשיבתם אינה מושפעת משינויים חזותיים. הילדים בשלב זה מסבירים את השוויון באופנים שונים: הם מחזירים את המצב לקדמותו כדי להראות שלא נעשה שינוי בכמות (נימוק באמצעות הפיכות- כלומר –החזרה למצב הקודם) טיעון נוסף הוא: "לא הוספנו ולא הורדנו, ולכן לא שינינו את הכמות" (הבנה ששינוי מתרחש על ידי הוספה או החסרה ולא על ידי שינויי מיקום), טיעון אחר: "אלו אותם הבקבוקים ואותן הכוסות – ולכן הכמות נשארה זהה" (נימוק המתייחס לזהות) וכן: "השורה של הבקבוקים ארוכה יותר, אך הרווחים ביניהם גדולים יותר מאשר הרווחים בין הכוסות" (נימוק המתייחס לפיצוי).

ב. פיאז'ה חזר על ניסוי זה עם ילדי גן תוך שימוש בקוביות זהות בשתי השורות (במקום בבקבוקים ובכוסות). האם, לדעתכם, הצלחת הילדים במשימה זו היתה רבה יותר / זהה / נמוכה יותר מהצלחתם במשימת הבקבוקים והכוסות? נמקו את תשובתכם.

נמצא שמשימת הקוביות הזהות קשה לילדים יותר מאשר משימת הבקבוקים. כלומר, במשימת הקוביות הצלחת הילדים הייתה נמוכה יותר מאשר הצלחתם במשימת הבקבוקים והכוסות. הבדל

זה נובע ככל הנראה מאופי העצמים אותם הילדים התבקשו להתאים. ההתאמה בין הבקבוקים לכוסות היא התאמה מתבקשת מאליה, והילד נתקל בהתאמה זו בחיי היום יום. למשל, ילד עשוי לראות (או אף לסייע) בסידור שולחן לארוחה כך שבקבוקים אישיים עומדים ליד כוסות בהתאמה מרחבית, מספרית. העצמים המושווים (הבקבוקים והכוסות) קשורים אלה באלה ויש מקום לבדוק האם לכל כוס מתאים בקבוק ולהיפך. כלומר, בהתאמה של בקבוק לכוס יש התייחסות תפקודית לכוסות ולבקבוקים וההתאמה היא טבעית. במשימת הקוביות נתבקשו הילדים להשוות בין שתי קבוצות של עצמים זהים. בהתאמה זו אין קשר תפקודי כדוגמת הקשר בין הכוס לבקבוק. ייתכן שקושי נוסף הוא בכך שקשה לזהות לאיזו קבוצה שייך כל אחד מהעצמים בשתי הקבוצות (כלומר כל אחת מהקוביות).

ג. בנו משימות דומות לאלו המתוארות בפעילות זו באמצעותן תבדקו באיזה שלב נמצא הילד מבחינת שימור כמות.

יכולת שימור היא היכולת להכיר כי כמות מסוימת (אורך, שטח, נפח וכדומה) אינה משתנה למרות שינויים במיקום במרחב, בזמן או במרכיב אחר שאינו גורם לשינוי הכמות.

בניסוי טיפוסי שערך פיאז'ה לגבי שימור כמות הוא הציג שני גביעים (שקופים) זהים (גביע א' וגביע ב') המכילים נוזלים בכמות שווה (הוא והילד הסכימו כי בשני הגביעים יש אותה כמות של נוזלים). לאחר מכן הוא מזג את הנוזל שבאחד הגביעים (גביע א'), לתוך גביע ג' (שקוף) מאורך וצר יותר מגביעים א' ו-ב'. הילד נשאל "האם כמות הנוזל בגביע ג' שווה לכמות הנוזלים בגביע ב'? מדוע? אם תשובתו הייתה: "לא" הוא נשאל: "באיזה גביע יש יותר נוזלים: בגביע א' או בגביע ב'? מדוע?"

פיאז'ה ביצע ניסוי זה באופנים שונים. הוא מזג, לעיני הילדים, את הנוזל בגביע א' לשני גביעים קטנים יותר בעלי ממדים שווים (ד1 ו- ד2) ושאל את הילדים האם כמות הנוזל בשני הגביעים הקטנים שווה לכמות הנוזל בגביע הגדול (גביע ב'). לאחר מכן הוא מזג, שנית, את הנוזל שבאחד מהגביעים הקטנים (גביע ד1), לתוך שני גביעים קטנים יותר (ה1 ו- ה2) ושוב שאל את הילד לגבי שוויון כמות הנוזלים בגביעים השונים (ה1 ו-ה2 לעומת ד1; ה1, ה2 ו-ד1 לעומת ב' וכדומה). לעיתים הילד מזג בעצמו את הנוזלים לגביעים בעלי תכונות וצורות שונות מהגביע המקורי. בכל המקרים הילד התבקש להשוות בין הכמויות.

ניסוי נוסף שאפשר לבצע (ואף הוא בוצע על ידי פיאז'ה) הוא לקיחת שני גושי פלסטלינה זהים והגעה להסכמה עם הילד על שוויון הכמויות. לאחר מכן יוצרים לעיני הילד (או שהילד יצור בעצמו), כדור מאחד מהגושים וצורת נחש מאורך (או בייגלה) מהשני. שואלים את הילד האם כמויות הפלסטלינה בכל אחת מהצורות שוות, וממשיכים לשאול באופן שתואר קודם.

ניסויים דומים של פיאז'ה התייחסו לכמויות לא רציפות:
בשני גביעים זהים הושמו חרוזים שונים בתהליך של יצירת התאמה חד-חד ערכית. כלומר, כאשר המראיין שם חרוז כחול בגביע אחד, הילד שם חרוז אדום בגביע שלו. כשסיימו את התהליך, הילדים נשאלו האם מספר החרוזים בשני הגביעים שווה. התשובה לשאלה זו, הייתה בדרך כלל חיובית בכל הגילים. בשלב הבא הועברו החרוזים מאחד הגביעים לכלי אחר (מוארך יותר, רחב יותר וכדומה) ושוב נשאלו הילדים לגבי שוויון בכמות החרוזים בכל אחד מהכלים.

באופן בו מתואר הניסוי בדף פעילות 3 ובהערות וההארות לפעילות עלול להתקבל רושם מוטעה לפיו הראיונות עם הילדים התנהלו באותו אופן וכי בכל הראיונות נשאלו אותן שאלות. חשוב להבהיר כי בכל ראיון הייתה התייחסות לתשובות של כל ילד, וכי הראיונות התנהלו בהתאם לתשובות אלה. כך, למשל, אחד מהניסויים לגבי שימור מספר נערך תוך שימוש בדסקיות. על השולחן הונחו, בתוך שתי קופסאות, 20 דסקיות כחולות ו 20 דסקיות אדומות.

בשלב הראשון של ניסוי זה (שלב בדיקת השוויון) המראיין הניח כשמונה דסקיות כחולות בשורה וביקש מהילד להניח אותו מספר של דסקיות אדומות, תוך כדי אמירה: "שים אותו מספר של דסקיות אדומות כמו דסקיות כחולות, בדיוק אותו מספר, לא יותר ולא פחות". כבר בשלב הזה נערכו שינויים באופן הראיון בהתאם לתגובות הילד (לעתים הוקטן מספר הדסקיות, לעתים המראיין הניח בעצמו את הדסקיות האדומות ויצר התאמה חד-חד ערכית מספרית וחזותית ושאל את הילד האם בשתי השורות אותו מספר דסקיות).

בשלב השני (שלב בדיקת השימור) המראיין שינה את אופן סידור הדסקיות באחת השורות לעיני הילד על ידי ציפוף או ריווח הדסקיות. הוא שאל: "האם מספר הדסקיות האדומות שווה למספר הדסקיות הכחולות? האם יש יותר דסקיות אדומות? האם יש יותר דסקיות כחולות? מדוע?" בניסוח השאלה נעשו שינויים כדי לוודא שהילד מבין את הכוונה (למשל – האם יש אותו מספר של דסקיות אדומות ושל דסקיות כחולות?).

בשלב השלישי (שלב ההצעה הנגדית) ילד ששימר נשאל: "הסתכל על השורה של הדסקיות האדומות (השורה הארוכה יותר). ילד אחר אמר שיש יותר דסקיות אדומות כי שורה זו ארוכה יותר. מי צודק? אתה או הוא?" ילד שלא שימר נשאל: "אבל, אתה לא זוכר שקודם שמנו דסקית אדומה מול דסקית כחולה. ילד אחר אמר שגם עכשיו יש אותו מספר של דסקיות אדומות ודסקיות כחולות. מי צודק? אתה או הוא?".

בשלב הרביעי (הבנה כמותית) הילד התבקש למנות את הדסקיות הכחולות ולאחר שסיים, המראיין הסתיר את הדסקיות האדומות ושאל: "כמה דסקיות אדומות אתה חושב שיש? האם אתה יכול להגיד בלי לספור? כיצד אתה יודע?

השלב השלישי (ובעקר השלב הרביעי) לא התבצעו בכל המקרים. ההחלטה אם לקיים אותם נעשתה בהתאם לתשובות הילד בשלבים הראשונים.

ד. פיאז'ה מתייחס, בכתביו, למושגים: שקילות ושוויון. תנו דוגמא לשתי קבוצות שכאשר נתייחס אליהן נשתמש במושג "שוות" ולשתי קבוצות שכאשר נתייחס אליהן נשתמש ב"שקולות".

שתי קבוצות שנתייחס אליהן כאל קבוצות שוות הן, למשל, שתי קבוצות המכילות קוביות זהות במראה ובמספר (ראו שאלה ב'), לעומת זאת, במקרה של שתי קבוצות אשר קבוצה אחת היא של בקבוקים והקבוצה השניה היא של כוסות, ומספר הבקבוקים בקבוצה אחת שווה למספר הכוסות בקבוצה השנייה, נאמר כי הקבוצות שקולות. כלומר, לשתי קבוצות המכילות עצמים זהים נתייחס כקבוצות שוות, ולשתי קבוצות המכילות אותו מספר של עצמים אך לפחות אחד העצמים בקבוצה אחת אינו זהה לאחד העצמים בקבוצה השנייה נתייחס כקבוצות שקולות.

מבחינה מתמטית קבוצות הן שוות אם ורק אם הן מכילות את אותם האיברים. כלומר, כדי לקבוע כי בין שתי קבוצות A ו-B מתקיים יחס של שוויון (A=B) יש לוודא שכל איבר השייך ל- A שייך גם ל- B, וכל איבר השייך ל-B שייך גם ל- A.

שתי קבוצות A ו-B הן שקולות אם קיימת התאמה חד- חד ערכית מ A על B.

<u>דוגמא לשתי קבוצות (מספרים) שוות :</u>

A = {המספרים הטבעיים הזוגיים} ;   B = {המספרים הטבעיים המתחלקים ב-2 ללא שארית}

שתי קבוצות אינסופיות אלה שוות (A=B) כיוון שכל המספרים הזוגיים הם מספרים המתחלקים ב- 2 ללא שארית, ולכן כל איבר שנמצא בקבוצה A נמצא בקבוצה B, ולהיפך : כל מספר טבעי שמתחלק ב- 2 ללא שארית הוא מספר זוגי, ולכן כל איבר שנמצא ב- B נמצא גם ב- A.

<u>דוגמא לשתי קבוצות (מספרים) שקולות :</u>

A = {המספרים הטבעיים} ;   B = {המספרים הטבעיים הזוגיים}

הקבוצה A מכילה את כל המספרים הטבעיים : {... ,1, 2, 3, 4} והקבוצה B מכילה את המספרים הטבעיים הזוגיים : {.. ,2, 4, 6, 8}. ברור ששתי קבוצות אלו אינן שוות. אמנם כל איבר ב- B נמצא ב- A אך ההפך אינו נכון, ישנם איברים ב-A (המספרים האי זוגיים) שאינם נמצאים ב- B. עם זאת שתי קבוצות אלו הן קבוצות שקולות מכיוון שקיימת התאמה חד-חד ערכית ועל בין שתי הקבוצות : למספר טבעי, n, מותאם המספר הזוגי 2n. (בדקו שזו אכן התאמה חד- חד ערכית מ A על B. כלומר לכל איבר ב-A מותאם איבר אחד ויחיד ב-B ולהפך).

קבוצות שוות (מכילות בדיוק אותם איברים) הן גם שקולות, אך קבוצות שקולות אינן בהכרח שוות, כפי שראינו בדוגמא הקודמת.

הערות והארות לפעילות 4: שוויון וסימני שוויון בכיתה א׳

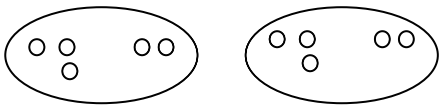
א. הציעו פעילויות שיכולות, לדעתכם, לסייע בחיזוק ההתייחסות לשוויון כאל ״אותו דבר״ ובחיזוק ההתייחסות אליו כאל פעולה שיש לבצע.

נציג מגוון פעילויות העושות שימוש בקבוצות עצמים (עצמים דומים או שונים).

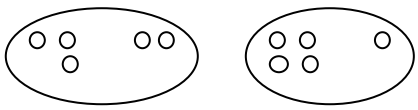
אפשר, למשל, להציג לילדים שתי קופסאות כשבכל אחת מהן אותו מספר עצמים, נניח 4 עצמים. לבקש מהילדים לקבוע האם בשתי הקופסאות יש אותו מספר של עצמים. לאחר מכן להוסיף לכל קופסא מספר זהה של פריטים, למשל להוסיף 3 עצמים לכל קופסא. בשלב זה אפשר לבקש מהילד להשוות את מספר העצמים שיש בכל קבוצה או לבקש מהילד לומר כמה עצמים יש בכל קופסה. פעילות זו מחזקת הן את ההתייחסות אל השוויון כאל ״אותו דבר״ והן כאל פעולה שיש לבצע. כמו כן, על פי תשובות התלמידים אפשר לבחון את התייחסותם לשוויון (״הוספת אותו דבר לשתי הקופסאות ולכן יש בשתיהן אותו דבר״, לעומת מניית העצמים בכל אחת מהקופסאות ואמירה כי ״בכל קופסא 7 עצמים ולכן ״אותו דבר״).

פעילות נוספת, המשלבת את שתי המשמעויות היא להציג לילד קבוצת עצמים, נניח קבוצה המכילה 6 חרוזים. ליד קבוצה זו לבנות, עם הילד, קבוצה נוספת באופן הבא: לקחת 4 חרוזים ולהניח אותם, להניח לידם עוד 2 חרוזים. וכעת לשאול את הילד האם בשתי הקבוצות (זו של ה- 6 חרוזים וזו של ה- 4+2 חרוזים) אותו מספר של חרוזים או שבאחת מהן יש יותר חרוזים (כמובן שאפשר להרכיב את הקבוצה השנייה גם מ 3+3 או 5+1).

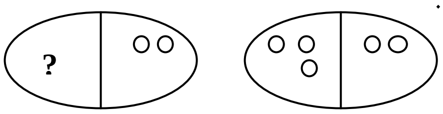
כמו כן, אפשר להציג לפני הילדים שתי קבוצות:



או שתי קבוצות:



ולבקש מהילדים לקבוע האם בשתי הקבוצות יש אותו מספר של כדורים או האם באחת הקבוצות יש יותר כדורים. אפשר להציג פעילות דומה: להניח לפני הילד שתי קופסאות ולומר לו שבשתי הקופסאות יש אותו מספר כדורים. בכל קופסה יש שני תאים. מראים לילד קופסה אחת שבה רואים שבתא אחד יש 2 כדורים ובתא השני יש 3 כדורים. בקופסה השניה מראים לילד רק את הכדורים באחד התאים ושואלים אותו כמה כדורים יש, לדעתו, בתא השני של הקופסה (נזכיר לילד שבשתי הקופסאות יש אותו מספר של כדורים).



במאמר של פאלקנר, לוי וקרפנטר (Falkner, Levi, Carpenter, 1999), המתמקד בתפישות של תלמידים בכיתות א׳-ב׳ לגבי שוויון, מוצגת פעילות שניתנה לתלמידים בכיתה ב׳. לתלמידים הוצג הביטוי הבא: $a = b+2$. התלמידים נשאלו מי לדעתם גדול יותר, a או b. תלמידים המתייחסים

לסימן השוויון כאל סימן לביצוע פעולה טענו כי b גדול יותר כי יש בו "עוד 2 יותר מאשר ב- a".
הילדים המתייחסים לסימן שוויון כאל יחס ידעו כי a גדול יותר, כי ל b "צריך להוסיף" כדי לקבל את a.

ב. תלמידים בסיום כתה א' התבקשו להשיב על המטלות:
1. האם 4+3=5+2 ? נכון/לא נכון, כי:
2. האם 13=7+6 ? נכון/לא נכון, כי:
3. האם 3=3 ? נכון/לא נכון, כי:
4. האם 7 =4+3 ? נכון/לא נכון, כי:
5. איזה מספר יש לרשום במקום החסר כך ש [ ]+5 = 3+4 ?
6. איזה מספר יש לרשום במקום החסר כך ש 5+[ ] = 3+4
7. איזה מספר יש לרשום במקום החסר כך ש 3 = [ ]+1 ?
8. איזה מספר יש לרשום במקום החסר כך ש 1+1 = [ ] ?

(i) ציינו, לגבי כל מטלה, דרכים אפשרויות נכונות שונות בהן הצדיקו תלמידים שהשיבו נכון על המטלה את תשובתם.
(ii) ציינו, לגבי כל מטלה, תשובות שגויות אפשריות והבהירו כיצד הצדיקו תלמידים שהשיבו כך את תשובותיהם.

סעיף זה עוסק בידע של ילדים על ייצוג שוויון באמצעות כתיב מתמטי מקובל (פסוקים). מטלות מסוג זה דורשות יישום ידע לגבי אופני כתיבה בחשבון ומיומנויות חישוב. מטלות מסוג זה יכולות לסייע לפתח התייחסות אל סימן השוויון כאל סימן יחס (המטלות יכולות לשמש כמטלות הערכה לגבי תפיסות של תלמידים את סימן השוויון).

לגבי (i) ו (ii) - נתייחס לשתים מהמטלות (מטלה 1 ומטלה 6).

דרכים אפשריות נכונות בהן תלמידים שהשיבו נכון על **מטלה 1** (4+3=5+2) הצדיקו את תשובתם:

א. "4+3 זה 7, ו- 5+2 זה 7, ושבע שווה לשבע".

התלמידים חישבו את הערך המספרי של כל אחד מאגפי השוויון וקבעו את הקשר בין שתי התוצאות שהתקבלו.

ב. "מה- 3 שבתרגיל 4+3 נעביר 1 ל- 4, ונקבל את התרגיל 5+2".
באסטרטגיה זו התלמיד השתמש בפירוק המספר להרכביו וב"פיצוי". מבחינה מתמטית התלמיד השתמש בחוק הקיבוץ לגבי פעולת החיבור: $5+2 = (4+1)+2 = 4+(1+2) = 4+3$.
כמובן שייתכנו אופנים אחרים של פירוק ופיצוי, למשל ב- 5+2, אפשר לפרק את ה- 5 ל- 4+1, ולקבל 4+3: $5+2 = (4+1)+2 = 4+(1+2) = 4+3$.

הדרכים שהצגנו כאן דורשות יישום מיומנות חישוב - חישוב הערך המספרי של כל אחד מאגפי השוויון (דרך א'), או, קביעת הכמות המספרית שיש ל"הפחית" מאחד המספרים באגף מסוים ולהוסיף למספר השני באותו אגף כדי לקבל ביטוי זהה לביטוי באגף השני (דרך ב'). בשתי הדרכים יש לקבוע את הקשר בין התוצאות שהתקבלו בכל אגף ואת הקשר בין שני הביטויים.

ג. דרך נכונה נוספת היא השוואה ישירה בין שני האגפים: "4 (באגף שמאל) קטן ב- 1 מ- 5 (באגף ימין) ו- 3 (באגף שמאל) גדול ב- 1 מ- 2 (באגף ימין) ולכן 3+4 ו 2+5 שווים".

דרכים אפשרויות נכונות בהן תלמידים שהשיבו נכון על **מטלה 6** (3+4 = [ ]+5) הצדיקו את תשובתם:

א. "3+4 זה 7, צריך לחשב כמה יש להוסיף ל- 5 כדי לקבל 7. 2+5 זה 7, ולכן נרשום 2 במקום החסר".

באסטרטגיה זו יש שימוש בחיבור באחד האגפים ובהשלמה לכמות הנדרשת באגף השני.

ב. "אפשר להעביר 1 מה- 3 ל- 4, ולקבל 2+5, ולכן נרשום 2 במקום החסר".

באסטרטגיה זו יש שימוש בפירוק המספר להרכביו ובפיצוי.

ג. "ב 5+[ ] הגדלנו את המחובר השני ב- 1 לעומת המחובר השני בתרגיל 3+4 ולכן המחובר החסר צריך להיות קטן ב- 1 מהמחובר הראשון בתרגיל 3+4".

אפשר להציג אסטרטגיה זו בכתיב מתמטי כך: $3+4=(3-1)+(4+1)= 2+5$

דרכים שגויות אפשריות בהן תלמידים שהשיבו באופן שגוי על **מטלה 1** הצדיקו את תשובתם (תלמידים אלה טענו כי 5+2 אינו שווה ל 4+3)

תלמידים שהשיבו באופן שגוי על מטלה זו טענו כי התרגיל (הביטוי) הרשום אינו נכון. תלמידים אלו טענו כי: "4+3 לא שווה ל- 5+2. 4+3 שווה ל- 7, ולא ל- 5+2. צריך היה להיות כתוב [באגף ימין] רק 7 ולא עוד תרגיל". תלמידים אלה מתייחסים לסימן השוויון כאל הוראה לבצע פעולה. לדעתם באגף אחד של השוויון (בדרך כלל באגף שמאל) חייב להיות רשום תרגיל ובאגף השני ערך מספרי שהוא התוצאה של אותו תרגיל. כלומר, על פי תפיסתם הרישום צריך להיות: $4+3 = 7$.

חלק מילדים אלה "מתקנים" את הרישום באופן הבא: $4+3 = 7+2=9$. תלמידים אלה, התופסים את סימן השוויון כהוראה לבצע פעולה, רואים ב 7 את תוצאת התרגיל 4+3 ומתייחסים ל 7+2 כאל תרגיל נוסף שתוצאתו 9.

דרכים שגויות אפשריות בהן תלמידים שהשיבו באופן שגוי על **מטלה 6** הצדיקו את תשובתם (תלמידים אלה טענו כי כי $3+4 = [7]+5$ או כי $3+4 = [12]+5$)

מרבית התלמידים שטעו במטלה זו רשמו את המספר 7 במקום החסר כיוון שזו "התשובה של התרגיל (הרשום באגף שמאל של השוויון)". אחרים רשמו – 12 כלומר חברו את כלל המספרים בתרגיל.

הערות והארות לפעילות 5:

שינויים בהתייחסות לשוויון ולסימני השוויון בבתי ספר יסודיים

פעילות זו לקוחה מתוך מאמר של בראודי וגינזבורג (Baroody & Ginsburg, 1983) ומתוך מאמר של (Morris, 2003). במחקרים המתוארים במאמרים אלה נבדקת השפעת ההוראה המקובלת, המדגישה את משמעות השוויון כפקודה לביצוע פעולה, על ההתייחסות לשוויון ולסימניו אצל ילדים. הפעילות בודקת האם התלמידים מתייחסים לסימן השוויון רק כפעולה או כאל פעולה וסימן יחס.

א. רשמו את הפסוקים אותם יניחו תלמידים, המתייחסים לסימן השוויון רק כהוראה לפעולה, בערמת פסוקי האמת. הסבירו את תשובתכם.

התלמידים המתייחסים לסימן השוויון כאל הוראה לפעולה, יתייחסו רק אל הפסוק 13 = 7+6 כאל פסוק אמת. ייתכן שחלק מהם יטענו כי גם הפסוקים 7+6 = 13 ו- 5+2 = 7 הם פסוקי אמת "הכתובים הפוך".

הפסוקים: 6 = 7+6 ; 0 = 7+6 ; 2 = 2+2 ; ו- 42 = 4+2 מונחים בדרך כלל על ידי תלמידים המתייחסים לסימן השוויון כאל הוראה לפעולה בערמת פסוקי השקר: יש בהם טעויות חישוב . נדגיש כי פסוקים אלה כתובים בצורה המתאימה לתפיסת סימן השוויון כהוראה לבצע פעולה, והם יונחו בערמת פסוקי השקר מהסיבות המתמטיות הראויות (טעויות חישוב).

גם פסוק השקר 3+1=1+1+1 יונח במקום הנכון (בערמת פסוקי השקר) - אך לא בהכרח מהסיבות הראויות. חלק מהתלמידים הרואים בסימן השוויון הוראה לביצוע פעולה טוענים כי הטעות הינה בכך שהיה צריך להיות כתוב: 1+1+4 = 3+1. שאר הפסוקים שתלמידים המתייחסים לסימן השוויון רק כאל הוראה לפעולה מניחים בערמת פסוקי השקר הם פסוקים בהם בולטת משמעות סימן השוויון כסימן יחס: 9+4 = 7+6 ; 6+7 = 7+6 ; 6+6+1 = 7+6 ; 14-1 = 7+6 ; 3+4 = 4+3 ; 5+5 = 6+4 ; 4+4+1 = 6+3 ; 7-1 = 5+1 ; 8 = 8 ו- 9 = 9. פסוקים אלה, שהם פסוקי אמת, דורשים התייחסות לסימן השוויון כאל סימן המבטא שוויון בין שתי כמויות (זו הרשומה באגף ימין וזו הרשומה באגף שמאל).

ב. מיינו את 18 הפסוקים לקבוצות באופנים שונים. הסבירו בכל מיון את הקריטריון למיון ואת שיקולי הדעת על פיהם יצרתם את הקבוצות.

מיון אפשרי של הפסוקים הינו לשתי קבוצות: פסוקי אמת ופסוקי שקר.

סטודנטים להוראה מציעים, בדרך כלל, מיוון של פסוקי האמת לתתי קבוצות באופן הבא:

א. פסוקים בהם ישנה התייחסות לחוק החילוף לגבי פעולת החיבור: 6+7 = 7+6 ; 3+4 = 4+3.

ב. זהויות: 8 = 8 ; 9 = 9.

ג. פסוקים בהם אפשר לעשות שימוש בפרוקים שונים של אותו מספר: 9+4 = 7+6 ; 6+6+1 = 7+6 ; 14-1 = 7+6 ; 5+5 = 6+4 ; 4+4+1 = 6+3 ; 7-1 = 5+1 ;

בתוך קבוצה ג׳ אפשר לכלול גם את 13 = 6+7 ; 7+6 = 13 ; 2+5 = 7. אפשר גם להתייחס לפסוקים אלה כאל קבוצה בפני עצמה שהמאפיין אותה: באגף אחד של השוויון רשום תרגיל ובאגף השני רשומה התוצאה.

אנו רואים חשיבות רבה בהתייחסות למיון זה. דיון במיונים נוספים ייעשה לפי הצעות שינתנו על ידי הלומדים.

הערות והארות לפעילות 6 :

התייחסות לשוויון, לאי שוויון ולסימניהם בבתי ספר יסודיים (א)

א. שבצו כל אחת מ 28 הכרטיסיות במקום המתאים בטבלה (בהתאם לתכונות יחס השוויון ויחסי האי שוויון)

התכונה	**מספרים קטנים (בעשרת הראשונה)**		**מספרים גדולים (החל מהעשרת השנייה)**	
יחס השוויון				
חיבור אותו מספר לשני האגפים a a a+b a+c	8 8 8+2 8+3	6 6 6+4 6+2	27 27 27+56 27+14	54 54 54+39 54+27
חיסור אותו מספר משני האגפים a a a-b a-c	5 5 5-3 5-2	9 9 9-2 9-4	37 37 37-19 37-26	56 56 56-34 56-27
פיצוי בחיבור – והוספת אותו מספר לשני האגפים a+b (a-c)+(b+c) a+b+d (a-c)+(b+c)+d a+b (a-c)+(b+c) a+b+d (a-c)+(b+c)+d	4+5 3+6 4+5+2 3+6+2	3+5 6+2 3+5+2 6+2+2	50+22 33+39 50+22+60 33+39+60	63+49 56+56 63+49+17 56+56+17
פיצוי בחיבור –והחסרת אותו מספר משני האגפים a+b (a-c)+(b+c) a+b-d (a-c)+(b+c)-d	7+3 6+4 7+3-2 6+4-2	5+4 6+3 5+4-1 6+3-1	22+39 23+38 22+39-15 23+38-15	45+31 40+36 45+31-14 40+36-14
קיזוז (הוספת והפחתת אותו מספר לאחד האגפים) a a a-b+b a	4 4 4+2-2 4	9 9 9 9-3+3	25 25 25 25-17+17	1048 1048 1048+987-987 1048
יחסי אי שוויון				
אם $a<b$ אז $a+c<b+c$	2 3 2+5 3+5	5 8 5+3 8+3	----- (**)	-----
אם $a<b$ אז $a-c<b-c$	6 3 6-2 3-2	6 5 6-3 5-3	-----	-----
אם $a<b$ ו- $c<d$ אזי $a+c<b+d$	5 8 5+2 8+3	3 2 3+5 2+4	-----	-----
אם $a<b$ ו- $c>d$ אזי $a-c<b-d$	6 9 6-4 9-2	5 6 5-3 6-2	-----	-----

בחלק מהכרטיסיות במצב ההתחלתי (בשורה הראשונה) מוצגים שני מספרים שווים (למשל, 8   8) ובכרטיסיות אחרות מספרים שונים זה מזה (למשל, 2   3). בחלק מהכרטיסיות במצב ההתחלתי (שורה ראשונה) מוצגים מספרים ובאחרים שני ביטויים מהצורה a+b ו- c+d כאשר a+b = c+d (למשל, 3+6   4+5).

בשורה השנייה, בכל אחת מהכרטיסיות מוצגים שני ביטויים באחת מהצורות הבאות:

X+z   Y+z ;   X-z   Y-z ;   X+z-z   Y ;   X   Y+z-z ;   X+z   Y+w ;   X-z   Y-w

כאשר בכל המקרים z ו-w הם מספרים שונים זה מזה, ו- X ו- Y הם המספרים או הביטויים שהופיעו בשורה העליונה.

בשמונה עשרה מתוך 28 הכרטיסיות התרגילים הם "במספרים קטנים" (מספרים חד ספרתיים שסכומם אינו עולה על 11). בעשר הכרטיסיות הנותרות התרגילים הם במספרים גדולים יותר.

המטרה בהצגה זו היא לבדוק האם תלמידים משתמשים בתכונות של יחס השוויון ושל יחסי האי שוויון לגבי מספרים קטנים ולגבי מספרים גדולים. כלומר, האם יש קשר בין גודל המספרים בתרגיל לבין שימוש בתכונות היחסים.

המספרים הגדולים המופיעים בכרטיסיות אלה קטנים מ- 70, פרט לכרטיסיה בה נדרשת השוואה בין 1048 לבין 1048+987-987. כרטיסיה זו נכללה כדי לעודד תלמידים להשתמש בתכונות של יחס השוויון ולא בחישוב ישיר של התרגיל.

אפשר לבקש להוסיף כרטיסיות מתאימות, במקומות שנותרו ריקים בטבלה. למשל, בתא המסומן בשתי כוכביות (**) אפשר להוסיף את התרגיל:

25	26
25+13	26+13

אפשר להבנות את פעילות המיון גם באופן אחר: להתחיל מהצגת 28 הכרטיסיות (ללא הטבלה) ולבקש מהסטודנטים להוראה למיין את הכרטיסיות לפי קריטריונים אותם הם יקבעו. לאחר מכן לדון במיונים שיוצעו על ידם ובמידה ולא יוצע המיון בטבלה, להציע אותו.

ב. ציינו דרכים אפשרויות נכונות בהן הצדיקו תלמידים את תשובותיהם. ראשית בחרו תרגיל אחד מכל שורה בטבלה ורשמו הסבר (או הסברים) אשר ניתנו לדעתכם על ידי תלמידים. לאחר מכן כתבו אסטרטגיות כלליות בהן תלמידים משתמשים.

אפשר למיין את ההצדקות האופייניות הנכונות של התלמידים במספר אופנים. נציג כאן שלש קטגוריות מרכזיות:

1. חישוב והשוואה:

התלמיד מחשב את ערכי הביטויים ומשווה אותם. אם התוצאות שוות התלמיד אומר "שווה", ואם אחת התוצאה גדולה (או קטנה) יותר הוא מצביע עליה ואומר "זו גדולה יותר (או זו קטנה יותר)".

<u>דוגמאות:</u>

(i) 8+3 8+2 : *"8+2 זה 10 ו- 8+3 זה 11, ו- 11 גדול מ- 10. לכן, 8+3 גדול מ- 8+2".*

(ii) 3+6 4+5 : *"הסכום שווה. 4+5 זה 9 ו- 3+6 זה גם 9. הסכום שווה".*

באותו אופן לגבי השורה השנייה בכרטיסיה: 3+6+2 4+5+2. התלמיד מחשב את שני הביטויים ומשווה את הערכים המספריים שהתקבלו.

(iii) *7+3=6+4: "שניהם שווים ל- 10. שווים לאותו דבר (10) יש רק הבדל בתרגיל".*

2. "פיצוי":

התלמיד מתייחס לתרגיל הרשום באחד הביטויים – הוא מקטין את אחד המחוברים ומגדיל בהתאם את המחובר השני כך שיתקבל ביטוי זהה לביטוי השני הרשום באותה שורה.

<u>דוגמאות:</u>

(i) 3+6 4+5 : *"אם לוקחים 1 מה- 4 ומעבירים אותו ל- 5 נקבל בשני הצדדים 3+6 ולכן הם שווים".*

ובאותו אופן לגבי השורה השנייה של אותו תרגיל 3+6+2 4+5+2: *"אם לוקחים 1 מה- 4 ומעבירים אותו ל- 5 נקבל בשני הצדדים 3+6+2 ולכן הם שווים".*

(ii) 6+4 7+3 : *"7+3=6+4 , 7 גדול ב- 1 מ 6 , אבל אם 1 מה- 7 יעבור ל- 3 נקבל 6+4".*

או : *"ה- 1 מה- 7 קפץ ל- 3".*

(iii) 23+38 22+39 : *"ה 39 נותן אחד ל- 22 ואז הוא נהיה 38 וה- 22 נהיה 23, ואז שני הביטויים שווים".*

3. יישום נכון של תכונות יחס השוויון ושל תכונות יחסי האי-שוויון (a ו- b מספרים טבעיים):

התלמיד קובע את הקשר בין שתי הכמויות שבשורה התחתונה על ידי ניתוח ההשפעה של חיבור או של חיסור כמויות שוות / לא שוות מכמויות שוות / לא שוות (שבשורה העליונה). בקטגוריה זו נכללות הצדקות בהן נעשה שימוש בתכונות של יחס השוויון ושל יחסי אי השוויון (כאן נעשה שימוש בתכונות היחסים ולא מתלווה לכך חישוב או פירוק, בשונה מקטגוריות 1 ו- 2).

i. פיצוי בחיבור: אם $x=y$ אז $x+c = y+c$

"50+22+60=33+39+60 מכיוון ש- 50+22=33+39 [שני ביטויים אלו הופיעו בשורה העליונה של הכרטיסייה והתלמיד קבע כבר שם את השוויון ביניהם] *ומוסיפים להם אותה כמות, ולכן זה נשאר שווה".*

ii. פיצוי בחיסור: אם $x=y$ אז $x-c = y-c$

- 7+3-2=4+6-2: *"הביטויים שווים מכיוון ש- 7+3=4+6* [נקבע בשלב הקודם לגבי השורה העליונה] *ואם מחסרים אותו דבר, מקבלים אותו מספר".*
- 22+39-15=23+38-15: "אני יודע כי 22+39=23+38, ו- 15 שווה ל- 15, שני אלו שווים

(22+39 ו- 23+38) ומורידים מכל אחד מהם אותו דבר, זה נשאר שווה כי מורידים אותו דבר ממספרים שווים ״.

iii. חיבור: אם $x=y$ ו- $a > b$ אז $x+a > y+b$

״$8+2<8+3$ כי 8 ו- 8 זה אותו דבר, אבל 3 זה יותר מ- 2 ולכן יש תוספת גדולה יותר״.

iv. חיסור: אם $x=y$ ו- $a > b$ אז $x-a < y-b$

״$56-34<56-27$ כי 56 ו- 56 זה אותו דבר. אבל אם מורידים יותר אז מקבלים מספר קטן יותר״.

״אם מורידים פחות נשאר לך יותר. 56 פחות 27 זה יותר כי מחסרים פחות מאשר ב- 56-34״.

v. קיזוז: $x = x+b-b$

- $25=25-17+17$: *״25 פחות 17 זה מקטין, אבל אז מוסיפים בחזרה את ה- 17 ומקבלים בחזרה את 25, ו- 25 שווה ל- 25״.*
- $25=25-17+17$: *״מכיוון שמורידים 17 ומוסיפים 17. מחסרים 17 ומקבלים משהו יותר קטן אבל מוסיפים חזרה את ה- 17 וחוזרים לכמות שהתחלנו אתה״.*
- $1048+987-987=1048$: *״יש כאן הוספה והורדה של אותה כמות ולכן זה שווה למספר שממנו מתחילים״.*

vi. אם $a < b$ אז $a+c < b+c$

- $2+5<3+5$: *״ 3 זה יותר מ-2, ו- 5 שווה ל- 5״.*
- $5+3<8+3$: *״ 8 זה יותר מ- 5 ומוסיפים אותה כמות לשני המספרים״.*

vii. אם $a < b$ אז $a-c < b-c$

$6-3<5-3$: *״ 6 גדול מ- 5 ומחסרים אותו מספר, לכן 6-3 יותר גדול״.*

viii. אם $a<b$ ו- $c<d$ אז $a+c < b+d$

$5+2<8+3$: *״3 זה יותר מ- 2 ו- 8 זה יותר מ- 5. 8 זה גדול יותר ואתה מוסיף מספר גדול יותר (3), ו- 5 זה קטן יותר ומוסיפים מספר קטן יותר (2)״.*

ix. אם $a < b$ ו- $c > d$ אזי $a-c < b-d$

$5-3<6-2$: *״ ב 6-2 אתה מוריד מספר קטן יותר ממספר גדול יותר (6-2), וב-5-3 אתה מוריד מספר גדול יותר ממספר קטן יותר״.*

תלמידים שהשתמשו בפיצוי טעו לעתים בהערכה הכמויות שהופיעו בשורה העליונה (למשל, קבעו שאינן שוות כאשר הן היו שוות) אך השתמשו נכון בתכונות יחס השוויון או יחסי אי השוויון והקביעה שלהם לגבי הגדלים בשורה התחתונה נעשתה באופן עקבי עם שגיאתם בשורה העליונה.

למשל, לגבי התרגיל 6+4-2 7+3-2: *״7+3 גדול מ- 6+4* [הביטויים שהופיעו בשורה העליונה והילד שגה בהערכתו], *הורדנו משניהם אותו מספר, 2, ולכן 7+3-2 גדול מ- 6+4-2״.* במקרים אלה יש להגדיר מה נכון ומה שגוי.

ג. ציינו תשובות שגויות אפשריות והבהירו כיצד הצדיקו תלמידים שהשיבו כך את תשובותיהם

נציין כי שימוש באסטרטגיה שגויה (נימוק שאינו תקף) יכול לעיתים להוביל לתשובה נכונה. אפשר לבקש מהמורים לבנות כרטיסיות בהן השימוש באסטרטגיה שגויה מוביל לתשובה נכונה, וכרטיסיות בהן השימוש באותה אסטרטגיה (שגויה), מוביל לתשובה שגויה.

דרכים שגויות בהן הצדיקו תלמידים שהשיבו באופן שגוי על המטלות השונות את תשובותיהם:

1. "חוק המספר הראשון": התלמיד משווה את המספרים הראשונים בכל אחד מהביטויים, וקובע כי הביטוי עם המספר הראשון הגדול יותר- גדול יותר. דוגמא: *"$5+2<8+3$, כי 8 גדול מ- 5".* (תשובה נכונה- נימוק שגוי).

2. "חוק המספר האחרון": התלמיד משווה את המספרים האחרונים בכל אחד מהביטויים, וקובע כי הביטוי עם המספר האחרון הגדול יותר- גדול יותר.
דוגמא: *" $4+5<3+6$, כי אם מוסיפים 6, שזה מס' גדול יותר מ- 5 אז הסכום גדול יותר".* (תשובה שגוייה- נימוק שגוי).

3. "המספרים גדולים יותר": התלמיד קובע כי הביטוי עם המספר הגדול ביותר- גדול יותר.
דוגמא: *"$5+2<8+3$, 8 הוא המספר הכי גדול מכל המספרים בתרגיל".* (תשובה נכונה- נימוק שגוי).

4. שימוש חלקי ברעיון הפיצוי: בהשוואה בין $a+b$ לבין $c+d$ התלמיד מתייחס לכך ש-$a<c$ אבל $b>d$ ולכן הביטויים שווים ($a+b=c+d$). המספר הראשון בביטוי הראשון קטן מהמספר הראשון בביטוי השני, אבל המספר השני בביטוי הראשון גדול מהמספר השני בביטוי השני ולכן, על פי תפיסה זו, יש "קיזוז" (זאת ללא התייחסות לערכים של a, b, c, d) ומתקבל שוויון.
דוגמא: *"$7+3=6+4$ מכיוון ש- 7 גדול מ- 6 אבל 3 קטן מ- 4".* (תשובה נכונה- נימוק חלקי).

5. "כאשר מחסרים מספר קטן יותר מקבלים הפרש קטן יותר": בהשוואה בין $a-b$ לבין $a-c$ כאשר $b<c$ התלמיד קובע כי $a-b<a-c$ כי $b<c$.
דוגמא: *" $37-19<37-26$ מכיוון ש- $19<27$. 19 יותר קטן מ- 27, אז אם מורידים מספר קטן יותר מקבלים תוצאה קטנה יותר".*

כאשר תלמיד משתמש באסטרטגיה זו רצוי להדגיש כי הפעולה בתרגיל זה היא חיסור (כדי להיות בטוחים כי הוא הבחין בכך ולא השיב מתוך התייחסות לפעולת חיבור). רק אם התלמיד המשיך לנמק כך את תשובתו, התשובה נכללת באסטרטגיה זו.

6. אסטרטגיות אחרות- שאינן תקפות:

למשל, $25<25-17+17$, *"$25-17+17$ גדול יותר כי יש בתרגיל יותר מספרים".*

או (לגבי אותו תרגיל): *"בשניהם יש 25, אבל להוריד ואחר כך להוסיף מוביל לתוצאה גדולה יותר".*

הערות והארות לפעילות 7:

התייחסות לשוויון, לאי שוויון ולסימניהם בבתי ספר יסודיים (ב)

בפעילות זו נדרש, לעתים, חישוב ולכן המספרים הנכללים בכרטיסיות הם מספרים חד ספרתיים והסכום (או ההפרש) אינו עולה על 11.

במרבית הכרטיסיות (עשרה מתוך 14) במצב ההתחלתי (המתואר בשורה הראשונה) מוצגים שני מספרים שונים זה מזה (למשל, בכרטיסיה 1: 4 ו- 7), בשאר הכרטיסיות (ארבע) במצב ההתחלתי (שורה ראשונה) נתונים שני ביטויים מספריים מהצורה $a+b$ ו- $c+d$ כך ש- $a+b = c+d$ (למשל, בכרטיסיה 6:8 $3+6$ ו- $4+5$).

מיינו את הכרטיסיות על פי התכונות הנבדקות בכל אחת מהן.

נציג כאן מיון של 14הכרטיסיות לארבע קבוצות (אפשר למיין את הכרטיסיות גם באופנים אחרים).
בנוסף, נציג הצדקות של התלמידים אשר אינן באמצעות חישוב הביטויים והשוואה ביניהם.

1. במצב ההתחלתי רשומים שני **מספרים שונים** זה מזה: X ו- Y.

בשורה השנייה רשומים שני **תרגילי חיבור** מהצורה $X+a$ ו- $Y+b$ כך ש- $X+a= Y+b$ ($a \neq b$)
כלומר, הוספנו לכל אחד מהמספרים שהופיעו בשורה ראשונה מחובר נוסף כך שהתקבל שוויון בין שני הביטויים.

הכרטיסיות המתאימות לקטגוריה זו הן: 1, 3, 5, 6, 13.

למשל, כרטיסיה 1: $4 < 7$ אבל $4+5 = 7+2$

כרטיסיה 1:	
4	7
4+5	7+2

תשובות תלמידים:

"7 גדול מ- 4 ב- 3, ו-2 קטן מ- 5 ב 3, לכן $4+5 = 7+2$".

"נסתכל על התרגיל: 7+2, אם נעביר 3 מה- 7 ל- 2 נקבל 4+5, ולכן שני הביטויים שווים".

כאן יש הסתמכות על $a+b = (a-c)+(b+c)$.

כדאי לדון, עם המורים, בכתיבה פורמלית של ההנמקות שהוצגו כאן:

$7+2 = (4+3)+2 = 4+(3+2) = 4+5$, בכתיבה זו נעשה שימוש בחוק הקיבוץ (לגבי פעולת החיבור).

2. במצב ההתחלתי רשומים שני **מספרים שונים** זה מזה: X ו- Y , ($X>Y$)

בשורה השנייה רשומים שני **תרגילי חיבור** מהצורה: $X+a$ ו- $Y+b$ כך ש- $X+a<Y+b$
כלומר, הוספנו לכל אחד מהמספרים שהופיעו בשורה ראשונה מחובר נוסף ויחס הסדר בין שני הביטויים "התהפך".

הכרטיסיות המתאימות לקטגוריה זו הן: 2, 7, 9, 11.

למשל, בכרטיסיה 2: $5>2$ אבל $2+9>5+8$

<u>כרטיסיה 2:</u>

5	2
5+3	2+9

תשובות תלמידים:

"2 קטן מ- 5 ב 3, אבל 9 גדול מ- 3 ב- 6, כלומר ביותר מאשר 2 קטן מ 5, לכן 2+9 גדול מ- 5+3".

"נסתכל על הביטוי 2+9, אם נעביר 3 מה- 9 ל-2 נקבל 5+6 ו- 5+6 גדול מ- 5+3.

לכן 2+9 גדול מ- 5+3".

באופן פורמלי, נרשום את הביטוי באגף שמאל באופן הבא:

$$5+3+3 = 5+(3+3) = 5+6 = (2+3)+6 = 2+(3+6) = 2+9$$

כלומר, הביטוי באגף שמאל שווה לביטוי 5+3+3. הביטוי 5+3+3 גדול מהביטוי 5+3.

3. במצב ההתחלתי רשומים שני **מספרים שונים** זה מזה: X ו- Y, (X>Y)

בשורה השנייה רשומים שני **תרגילי חיבור** מהצורה: X+a ו- Y+b כך ש- X+a>Y+b

כלומר, הוספנו לכל אחד מהמספרים שהופיעו בשורה ראשונה מחובר נוסף כך שנשמר יחס הסדר בין שני הביטויים.

קטגוריה זו שונה מקטגוריה קודמת (ב') בכך שבמקרה זה יחס הסדר בין שני הביטויים נשמר. הכרטיסייה היחידה המתאימה לקטגוריה זו היא 4

<u>כרטיסיה 4:</u>

6	3
6+2	3+4

4. במצב ההתחלתי (שורה ראשונה) רשומים שני ביטויים מהצורה X+a ו- Y+b כאשר X+a = Y+b .

בשורה השניה רשומים שני ביטויים מהצורה: (X+a)+c ו- (Y+b)+c

או שני ביטויים מהצורה: (X+a)-c ו- (Y+b)-c

כלומר, מוסיפים או מפחיתים אותו מספר מכל אחד מהביטויים ולכן השוויון נשמר.

הכרטיסיות המתאימות לקטגוריה זו הן: 8, 10, 12, 14.

באופן אלגברי: אם $a = b$ אז $a \pm c = b \pm c$.

למשל, בכרטיסיה 12 : $7+3 = 4+6$ ו- $7+3-2 = 4+5-2$

<u>כרטיסיה 12 :</u>

$7+3$ $4+6$

$7+3-2$ $4+6-2$

תשובות תלמידים (לאחר שערכו השוואה בין שני הביטויים בשורה העליונה) :

" מכיוון ש- $7+3 = 4+6$ (נקבע בשלב הקודם לגבי השורה הראשונה) ומחסרים אותה כמות, מקבלים אותו מספר ".

"אם מורידים אותה כמות התרגילים נשארים שווים ".

$4+6 = 7+3$, ו- 2 שווה ל- 2, ולכן $4+6-2 = 7+3-2$. כי מורידים מכל אחד מהם אותו דבר ".

חזרה

חיבור וחיסור במספרים טבעיים: מחקרים ופעילויות

ההיבטים ההתפתחותיים של חיבור ושל חיסור במספרים טבעיים וההיבטים ההוראתיים הכרוכים בהם נחקרים בהרחבה בחינוך מתמטי. מספר רב של ספרים, מחקרים וסקירות ספרות לגבי התפתחות ההבנה של פעולות חיבור וחיסור הוצאו לאור.

אנו מסתמכים בפעילויות על מגוון רחב של מחקרים ושל ספרים, בעיקר על סקירות מקיפות של הספרות המחקרית הכוללות מחקר על אופני חשיבה של ילדים לגבי חיבור וחיסור והצעות להוראת פעולות החיבור והחיסור. נתייחס, בין היתר, לסקירות המופיעות בכתבים:

Grouws, D. (1992).(Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Kilpatrick, J., Martin, J., & Schifter, D. (2003). (Eds.) *A research companion to principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of teachers of mathematics.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). (Eds.) *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Morrow, L. J., & Kenney, M. J. (1998). *The teaching and learning of algorithms in school mathematics*. Reston, VA: National Council of teachers of mathematics.

חלק מהפעילויות מתבססות על ספרה של ליפינג מה, המתייחס להוראת מתמטיקה בבתי ספר יסודיים בסין ובארצות הברית.

Ma, L. ((1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah: New Jersey: Lawrence.

בפרק זה נכללות 9 פעילויות.

הפעילות הראשונה מתייחסת לסוגים שונים של בעיות מילוליות של חיבור וחיסור.

הפעילות השניה דנה באסטרטגיות ספונטאניות ובאסטרטגיות נרכשות בהן משתמשים ילדים כדי לפתור תרגילי חיבור וחיסור.

פעילויות 3-9 מתמקדות בסוגיות שונות הקשורות בהוראת האלגוריתמים הסטנדרטיים של חיבור וחיסור.

אנו ממליצים להשתמש בהקשר זה במאמרים נוספים אותם יקראו הלומדים. מומלץ מאד להתייחס לפעילויות נוספות בהקשר לחיבור ולחיסור המתוארות בכתבי עת המיועדים למורים המלמדים מתמטיקה בבתי ספר יסודיים ("מספר חזק" וכתבי עת כגון Teaching Children Mathematics). באתר של מרכז המורים הארצי למתמטיקה בחינוך היסודי והקדם-יסודי (http://mathcenter-k6.haifa.ac.il) מצוי אוסף מאמרים ופעילויות בהקשר זה.

פעילות 1: מיון בעיות מילוליות - חיבור וחיסור

נהוג לסווג בעיות מילוליות באופנים שונים. בחרנו להציג כאן מיון המתייחס, בו זמנית, למספר מרכיבים (מיון של Fuson, 2003).

א. מלאו את הטבלה תוך שימוש באותם תכנים ובאותם מספרים (היעזרו בדוגמאות):

	הסכום לא ידוע	**השינוי אינו ידוע**	**ההתחלה לא ידועה**
שינוי- "הוסף ל-" (בחיבור)	לדני 5 סוכריות. אמא נתנה לו עוד 3 סוכריות. כמה סוכריות יש לדני כעת?	לדני 5 סוכריות. הוא קבל מאמא עוד סוכריות. כעת יש לו 8 סוכריות. כמה סוכריות אמא נתנה לדני?	לדני יש סוכריות. אמא נתנה לו עוד 3 סוכריות, וכעת יש לו 8 סוכריות. כמה סוכריות היו לדני בהתחלה?
	ההפרש לא ידוע	**השינוי אינו ידוע**	**ההתחלה לא ידועה**
שינוי - "קח מ-"	לדני 8 סוכריות. הוא נתן לרמי 5 סוכריות. כמה סוכריות נשארו לדני?		
	לא ידועה קבוצת האיחוד	**לא ידועה הקבוצה השנייה**	**לא ידועה הקבוצה הראשונה**
איחוד והפרדת קבוצות- מצב סטטי	לדני 5 סוכריות ו- 3 מסטיקים. כמה ממתקים יש לדני?		
איחוד והפרדת קבוצות- מצב דינמי		לדני 8 ממתקים: סוכריות ומסטיקים. הוא הפריד ביניהם וראה שיש לו 5 סוכריות. כמה מסטיקים יש לו?	
	ההפרש לא ידוע	**לא ידוע החלק השני**	**לא ידוע החלק הראשון**
יצירת שוויון	לדני 8 סוכריות. לרמי 5 סוכריות. כמה סוכריות צריך רמי לקנות כדי שיהיה לו אותו מספר סוכריות כמו שיש לדני?		
	ההפרש לא ידוע	**לא ידוע החלק השני**	**לא ידוע החלק הראשון**
בכמה יותר או בכמה פחות	לדני 8 סוכריות. לרמי 5 סוכריות. כמה סוכריות יש לדני יותר מאשר לרמי?		

ב. בטבלה 18בעיות. דרגו אותן על פי דרגת קושי מ 1 עד 18. פרטו את שיקולי הדעת.

ג. הרכיבו שאלון לילדים בכתה ב' באמצעותו תבדקו את תקפות הסולם שבניתם.
העבירו את השאלון ל 4 ילדים. מה מצאתם?

ד. התייחסו לשש הבעיות בעמודה השנייה מימין (לדני 5 סוכריות, אימא נתנה לו עוד 3 סוכריות. כמה סוכריות יש לדני כעת? והבעיות הרשומות מתחתיה).

(i) הציעו, לגבי כל בעיה, בעיה קשה יותר. הסבירו, מדוע לדעתכם, הבעיות שהצעתם קשות יותר?

(ii) הציעו, לגבי כל בעיה, בעיה קלה יותר. הסבירו, מדוע לדעתכם, הבעיות שהצעתם קלות יותר?

פעילות 2: כיצד פותרים? אסטרטגיות לפתרון תרגילי חיבור וחיסור תלת ספרתיים לפני הוראה ואחריה

א. לפניכם 12 תרגילים. מיינו את התרגילים במספר דרכים והסבירו את שיקולי הדעת שלכם בכל אחד מהמיונים.

התרגילים: 572+399 ; 250+279+250 ; 345+634 ; 836-567 ; 758-515 ; 199+198 ;
119+120+121 ; 649-347 ; 845-399 ; 701-689 ; 286+437 ; 610-590

ב. לפניכם שני תרגילים (מתוך 12 התרגילים שבשאלה קודמת): 572+399 ; 701-698.

(i) הציגו מספר דרכים נכונות בהן תלמידים בבית ספר שעדיין לא לימדו בכיתתם את האלגוריתמים הסטנדרטיים של חיבור וחיסור יפתרו תרגילים אלו.

(ii) לגבי כל אחת מדרכי הפתרון שהצגתם בסעיף (i) חברו תרגיל נוסף והדגימו כיצד פותרים את התרגיל שחיברתם באמצעות אסטרטגיה זו.

פעילות 3: דילמות לגבי הוראת החיבור והחיסור: מיומנה של מורה מתחילה

מקרה 1: אתי הצטרפה לצוות המורים של בית ספר רימונים. אתי התייעצה עם המורות בצוות לגבי ראשית הוראת פעולות החיבור והחיסור.

המורה יעל הציעה: "לגבי כל פעולה, למדי קודם היטב את עובדות היסוד של אותה פעולה (למשל, חיבור של מספרים חד ספרתיים). רק לאחר שתהיי בטוחה שהתלמידים שולטים בעובדות היסוד, תני להם להתמודד עם בעיות מילוליות בהן נעשה שימוש בפעולה הזאת".

המורה מיכל הציעה: "הציגי להם מהתחלה בעיות מילוליות בהן נכללים מספרים חד ספרתיים שפתירתן דורשת שימוש בחיבור ובחיסור. הם ילמדו את עובדות החיבור והחיסור מתוך פתרון הבעיות.

א. רשמו נימוקים התומכים בגישתה של יעל.
ב. רשמו נימוקים התומכים בגישתה של מיכל.
ג. נניח שאת/ה מורה בצוות המורים של בית ספר רימונים. מה תייעצו לאתי?

מקרה 2: בהמשך אותה שיחה, אתי שאלה איך להתייחס לבעיה:

אביבה רוצה לקנות כדור שמחירו 14 שקלים. יש לה 8 שקלים.
כמה שקלים חסרים לה כדי לקנות את הכדור?

המורה יעל הציעה: "למדי אותם שכדי למצוא כמה שקלים חסרים צריך לעשות חיסור. תעזרי להם על ידי כך שתיצרי קשר מילולי בין פעולת החיסור לבין המלה חסרים שמופיעה בשאלה ותכתבי 14-8".

המורה מיכל הציעה: "בכתה שלי אנחנו כותבים 14=?+8 ובודקים כמה מספרים יש בין 8 לבין 14".

א. רשמו נימוקים התומכים בגישתה של יעל.
ב. רשמו נימוקים התומכים בגישתה של מיכל.
ג. נניח שאת/ה מורה בצוות המורים של בית ספר רימונים. מה תייעצו לאתי?

מקרה 3: שאלה נוספת של אתי עוררה מחלוקת וויכוחים סוערים. אתי שאלה:
"האם צריך ללמד את האלגוריתמים הסטנדרטיים של חיבור וחיסור? האם עדיף לתת לכל ילד להמציא דרך משלו?"

המורה יעל אמרה: "אני מלמדת את הילדים באופן מובנה ומסודר את האלגוריתמים הסטנדרטיים של חיבור וחיסור".

המורה מיכל אמרה: "אני נותנת לכל אחד להמציא דרך משלו. אנחנו מציגים את הדרכים בכתה ומדברים עליהן ואחר כך כל ילד פותר בדרך שנראית לו".

המורה רונית אמרה: "אני מאחדת את שתי הדרכים. אני נותנת לכל אחד להמציא דרך משלו, אנחנו מציגים ומשוחחים על הדרכים בכתה ואחר כך אני מלמדת את הילדים באופן מובנה ומסודר את האלגוריתמים הסטנדרטיים של חיבור וחיסור ומבקשת מהם להשתמש באלגוריתמים הסטנדרטיים."

א. רשמו נימוקים בעד ונגד כל אחת מהגישות (של יעל, של מיכל ושל רונית). מה תייעצו לאתי?

פעילות 4: כיצד מחברים? כיצד מחסרים?

תכנית הלימודים החדשה בחשבון לבית הספר היסודי (תשס"ה) מתייחסת לשליטה בחיבור ובחיסור. בתכנית הלימודים לכתה ב' מומלץ "להימנע מלימוד החיבור (והחיסור) בטור (במאונך) בדרך מכנית בלבד. צריך להביא את התלמידים בהדרגה לקיצורים המקובלים בביצוע החיבור (והחיסור) בטור... הלימוד יהיה מדורג – למשל, תחילה בלי העברה ואחר כך עם העברה – ומבוסס על הבנת המבנה העשרוני. בסוף הלימוד יש להגיע למיומנות חישובית".
הדגשה דומה על "הגעה למיומנות חישובית" תוך אזכור האלגוריתם הסטנדרטי מופיעה גם בתכנית הלימודים לכתה ג'.

חיבור וחיסור בטור (במאונך) נלמדים בכתה ב' ובכתה ג'.

פעילות זו מתייחסת לאלגוריתמים הסטנדרטיים של חיבור ושל חיסור.

משימה 1:

נתייחס לתרגילים:

21	64	91	56
+ 9	+ 46	+ 79	+ 27

א. נניח שאתה מורה בכתה ב'. כיצד תלמד זאת?

ב. מה, לדעתך, צריכים תלמידים לדעת כדי שאפשר יהיה ללמדם לפתור תרגילים אלה?

משימה 2:

נתייחס לתרגילים:

21	64	91	56
- 9	-46	-79	-27

א. נניח שאתה מורה בכתה ב'. כיצד תלמד זאת?

ב. מה, לדעתך, צריכים תלמידים לדעת כדי שאפשר יהיה ללמדם לפתור תרגילים אלה?

פעילות 5: חיסור עם פריטה

בפעילות הקודמת התבקשתם, בין היתר, להסביר כיצד תלמדו את אלגוריתם החיסור בכתה.
בהקשר זה התבקשתם להתייחס לתרגילים:

21	64	91	56
- 9	- 46	- 79	- 27

ולהבהיר כיצד תלמדו בכתה את אלגוריתם החיסור.
להלן מספר דרכים שהוצעו על ידי מורים אמריקאים ועל ידי מורים סיניים להוראת אלגוריתם החיסור.

הסבר 1: אלמד זאת כך: כאשר יש תרגיל כמו 21-9, התלמידים צריכים לדעת שהם אינם יכולים לחסר 9 מ 1. עליהם להלוות 10 אחדות מהעשרות. מוחקים את ה 2 שהיו בעשרות ורושמים 1 והופכים את ה 1 שלוקחים מהעשרות ל 10 אחדות. כעת יש 11-9, מחסרים ומקבלים 2. כעת מורידים את ה 1 שנשאר בעשרות למטה, ומקבלים 12.

הסבר 2: על התלמידים להבין מהי המשמעות של המספר 64 בתרגיל 64-46. אני אראה שמספר עם 5 עשרות ו 14 אחדות שווה ל 64. אני אנסה ליצור את ההשוואה הזו בגלל שמה שעושים זה חלוקה לקבוצות וזה לא קשור כל כך לידיעת עובדות החיסור. מה שחשוב הוא שהם יבינו היטב את העניין של החלוקה לקבוצות. יש לנו צורך לבצע את 4-6: אפשר לחסר 4 מ 4 ועדיין צריך לחסר 2.
מה נעשה? נלך לחלק אחר של המספר וניקח משם את מה שצריך לקחת כדי שנוכל לעשות את מה שצריך לעשות. ניקח משם את מה שצריך כדי לעזור ל 4 להיות 14.

הסבר 3: התלמידים צריכים לדעת כיצד פורטים. כלומר להכיר את בסיס עשר. כאשר מגיעים ל 10 בעמודה של האחדות, זה אותו דבר כמו 1 בעמודת העשרות. הם צריכים להבין את הרעיון שהפריטה קשורה בערך המקום ואין שינוי בערך של המספר. לא משתנה שום דבר מבחינת הערך של המספר, למרות שבוצעו המרות של מספרים.

הסבר 4: אסביר להם שאי אפשר לחסר מספר גדול ממספר קטן יותר. הם מוכרחים להלוות מהעמודה הבאה כיוון שבעמודה הבאה יש יותר ולהם אין מספיק אחדות. עליהם ללכת לחבר, לשכן ליד שיש לו הרבה וללוות ממנו.

א. הסבירו מהם היתרונות ומהם החסרונות של כל אחת מהדרכים שהוצעו.
ב. ציינו מה צריכים התלמידים לדעת לפני שהם לומדים לפתור תרגילי חיסור בכל אחת מהדרכים שהוצגו.
ג. כיצד תשפרו את ההסבר בכל אחת מהדרכים שהוצגו?

פעילות 6: המחשות

לפניכם שלשה הסברים בהם מורים מתארים כיצד להמחיש את האלגוריתם הסטנדרטי של חיסור בכתה ב' תוך שימוש בעזרים (קוביות קטנות, מטבעות כסף, קיסמים).

הסבר 1: אתחיל במספר תרגילי חיסור, למשל, 51-38. אשתמש ב 51 קוביות קטנות ואומר להם לשים בחבילה אחת, בצד, 38 קוביות קטנות. אחר כך אבקש אותם לספור כמה קוביות קטנות נשארו ואומר שזו התוצאה. הקוביות יעזרו להם לספור ולראות כמה היה בהתחלה, כמה צריך לחסר ומה נשאר.

הסבר 2: כדאי להשתמש במטבעות כסף כדי להמחיש את האלגוריתם הסטנדרטי של החיסור. שימוש במטבעות הוא טוב כי ילדים אוהבים להתייחס לכסף והם מכירים את המטבעות. למשל, לגבי התרגיל 51-38, כדאי לקחת מטבע של חצי שקל ומטבע של אגורה, לפרוט את חצי השקל לאגורות ולחסר 38 אגורות. כך הילד יבין שבתרגיל חיסור כזה צריך לפרוט.

הסבר 3: אני אשתמש בחבילות של קיסמים הקשורים בגומיות. בכל חבילה עשרה קיסמים. כך אראה את הרעיון של עשרות והערך שלהן לעומת אחדות. למשל אם התרגיל הוא 51-38, אקח 5 חבילות ועוד קיסם אחד. אני אראה להם כיצד אני מפרק את חמש החבילות לחמישים קיסמים ומחסיר מהם 38 קיסמים. אחר כך אספור כמה קיסמים נשארו.

א. האם תשתמשו בהסבר 1? *כן/ לא*. מדוע?
ב. האם תשתמשו בהסבר 2? *כן/ לא*. מדוע?
ג. האם תשתמשו בהסבר 3? *כן/ לא*. מדוע?
ד. כיצד תשפרו את ההסברים?

פעילות 7: הצגת מספרים באמצעות מספרים אחרים

בפעילות זו נציג פתרונות שניתנו על ידי תלמידים בכתה ב' לתרגילי חיסור. בפתרונות אלה התלמידים הציגו את המספרים הנתונים בתרגיל (המחוסר או המחסר) באופנים שונים והשתמשו בכך בפתרון.

נתייחס לתרגיל: 53-26

דרך 1: "ארשום במקום 53 שני מספרים: 40 ו- 13. עכשיו אני יכול לחסר 6 מ- 13 ו- 20 מ- 40 ולקבל שני מספרים 7 ו- 20 שסכומם 27".

דרך 2: "ארשום במקום 53 שלשה מספרים: 40, 10 ו- 3. עכשיו אני יכול לחסר 6 מ- 10, לחסר 20 מ- 40 ובסוף לסכם את מה שנשאר: 3, 4, 20 שסכומם 27".

דרך 3: "ארשום במקום 53 שני מספרים: 43 ו- 10 עכשיו אני יכול לחסר 6 מ- 10, ולחסר 20 מ- 43 ובסוף לסכם את מה שנשאר: 4, 23 שסכומם 27".

דרך 4: ארשום במקום 26 שלשה מספרים: 3, 3 ו- 20. אחסר 3 מ 53 ואקבל 50, אחסר עוד 3 מ- 50 ואקבל 47 ועכשיו אחסר 20 מ- 47 ואקבל 27".

א. כתבו בכתיב מתמטי את כל אחת מהדרכים בה השתמשו התלמידים.
ב. התייחסו ליתרונות ולחסרונות של הדרכים שהוצעו.
ג. האם אחת מהדרכים מתאימה, לדעתכם, יותר לתלמידים מתקשים? אם כן, איזו? מדוע?
ד. אילו דרכים (אם בכלל) תציגו לתלמידכם? מדוע?

פעילות 8: חיסור מספרים הקטנים מ 100

תלמידים חישבו את התרגיל 34-6 בדרכים שונות:

תלמיד 1: "בתרגיל 34-6, 4 באחדות אינו מספיק לחיסור אבל אני יכול לחסר 4, אז נשאר לי להוריד עוד 2 כי 2+4=6. אז אני מוריד את ה- 2 מה 30 ומקבל 28.

תלמיד 2: תלמיד זה השתמש בחבילות של קיסמים, כאשר בכל חבילה היו 10 קיסמים, ואמר: "ראיתי שאין לי מספיק קיסמים בודדים כדי להוריד מהם 6 קיסמים, פרקתי קבוצה של קיסמים וקיבלתי עשרה קיסמים בודדים. הורדתי מהם 6. נשארו לי 4 שצרפתי אותם ל- 4 הקיסמים הבודדים שכבר היו לי, וקיבלתי 8. נשארו לי 20 קיסמים בשתי חבילות של עשר (שלא פרקתי). אז קבלתי 28".

תלמיד 3: "אני זוכר בעל פה ש- 14-6 זה 8, ש- 14-7 זה 7, ש- 14-8 זה 6 ו- 14-9 זה 5. בתרגיל הזה אני משתמש ב 14-6 שזה 8. במקום 34 אני רושם 20 ו- 14. 14-6 זה 8, 20 ועוד 8 זה 28".

א. כתבו בכתיב מתמטי את כל אחת מהדרכים בה השתמשו התלמידים.
ב. התייחסו ליתרונות ולחסרונות של הדרכים שהוצעו.
ג. האם אחת מהדרכים מתאימה, לדעתכם, יותר לתלמידים מתקשים? אם כן, איזו? מדוע?
ד. אילו דרכים (אם בכלל) תציגו לתלמידכם? מדוע?

פעילות 9: מדוע מתחילים מחיסור האחדות? סיפורה של מורה

לפניכם סיפורה של המורה ליאן מסין המתארת אירוע שהתרחש בכיתתה לגבי השוני בין חיסור בעזרת המחשות לבין חיסור במאונך, לפי אלגוריתם החיסור המקובל. רישום הסיפור נעשה תוך התאמה למטבעות הנהוגות בישראל.

"בסתיו האחרון עבדנו בכיתה בנושא חיסור ונעזרנו בהמחשות לצרכי ההוראה.
ההמחשות הם אמצעי מרכזי בהוראת חיסור. בשיעור התעוררה השאלה מדוע בחיסור בעזרת המחשות מתחילים את החיסור משמאל לימין כלומר מתחילים לחסר מהיחידות בעלות הערך הגבוה יותר במספר (למשל מהמאות במספר תלת ספרתי) ואילו בחיסור במאונך מבצעים את החיסור מימין לשמאל (מתחילים מספרת האחדות).
למשל: כאשר מחשבים את התרגיל 35-18 כתרגיל חיסור באמצעות המחשות, אנחנו מתחילים מהעמודה בעלת הערך הגבוה ביותר ומחסרים קודם 10 ואחר כך 8. בחיסור במאונך מתחילים את החיסור מעמודת האחדות, כלומר מחסרים קודם 8 ואחר כך מחסרים 10.
דוגמא נוספת מחיי היום יום היא בשימוש בכסף. כאשר אנחנו מחשבים מה יהיה העודף משני שקלים למוצר העולה שקל אחד ו 63 אגורות, אנחנו קודם מחסרים שקל אחד, אחר כך 60 אגורות ואחר כך 3 אגורות. אם היינו כותבים את הפעולה כחיסור במאונך, סדר החיסור היה קודם 3 אגורות, אחר כך 60 אגורות ולסוף שקל.

התלמידים טענו כי אופן העבודה בחיסור במאונך הוא פחות הגיוני מדרך החישוב בחיסור באמצעות המחשות. לאור טענה זו בדקנו בכתה מה יקרה לתרגיל 35-18 אם נתחיל את החיסור במאונך מעמודת העשרות.

בחיסור בעשרות נקבל בעמודת העשרות את התוצאה 2

$$\begin{array}{r} 35 \\ -18 \\ \hline 2 \end{array}$$

במעבר לעמודת האחדות התברר שיש לשנות את המנה שחישבנו קודם ולכתוב 1 במקום 2 בעמודת העשרות כלומר:

$$\begin{array}{r} 35 \\ -18 \\ \hline \cancel{2} \\ 17 \end{array}$$

נוצר מצב בו נאלצנו לתקן את התוצאה בעמודת העשרות, ולרשום אותה מחדש.

הסברתי לתלמידים שאם היינו מתחילים את החיסור מעמודת האחדות היינו מקבלים מיידית את התוצאה, והיה נמנע הצורך לשנות את ספרת העשרות תוך כדי חישוב.
מרבית התלמידים לא השתכנעו. אני מנסה למצוא הסבר שישכנע אותם".

א. נסו להציע הסבר שישכנע את תלמידי הכיתה שכדאי להתחיל את החיסור המאונך מימין לשמאל.
ב. מהו לדעתכם הסדר המועדף לביצוע "החיסור במאונך"?
ג. האם אפשר ללמד חיסור במאונך ולהשתמש בהמחשות מבלי להגיע לקונפליקט שהתרחש בכיתה של המורה ליאן? אם כן, כיצד?

הערות והארות לפעילות 1: מיון בעיות מילוליות - חיבור וחיסור

נהוג לסווג בעיות מילוליות באופנים שונים. בחרנו להציג כאן מיון המתייחס, בו זמנית, למספר מרכיבים (מיון של Fuson, 2003).

א. הטבלה המלאה:

	הסכום לא ידוע	**השינוי אינו ידוע**	**ההתחלה לא ידועה**
שינוי- "הוסף ל-" (בחיבור)	<u>בעיה א':</u> לדני 5 סוכריות. אמא נתנה לו עוד 3 סוכריות. כמה סוכריות יש לדני כעת?	<u>בעיה ז':</u> לדני 5 סוכריות. הוא קבל מאמא עוד סוכריות. כמה סוכריות אמא נתנה לדני אם כעת יש לו 8 סוכריות?	<u>בעיה י"ג:</u> לדני יש סוכריות. אמא נתנה לו עוד 3 סוכריות, וכעת יש לו 8 סוכריות. כמה סוכריות היו לדני בהתחלה?
	ההפרש לא ידוע	**השינוי אינו ידוע**	**ההתחלה לא ידועה**
שינוי- "קח מ-"	<u>בעיה ב':</u> לדני 8 סוכריות. הוא נתן לרמי 5 סוכריות. כמה סוכריות נשארו לדני?	<u>בעיה ח':</u> לדני היו 8 סוכריות. הוא נתן לרמי חלק מהסוכריות שלו. כעת יש לדני 3 סוכריות. כמה סוכריות נתן דני לרמי?	<u>בעיה י"ד:</u> לדני יש סוכריות. הוא נתן לרמי 5 מהסוכריות שלו. כעת יש לדני 3 סוכריות. כמה סוכריות היו לדני בהתחלה?
	לא ידועה קבוצת האיחוד	**לא ידועה הקבוצה השנייה**	**לא ידועה הקבוצה הראשונה**
איחוד והפרדת קבוצות- מצב סטטי	<u>בעיה ג':</u> לדני 5 סוכריות ו- 3 מסטיקים. כמה ממתקים יש לדני?	<u>בעיה ט':</u> לדני יש 5 סוכריות ויש לו גם מסטיקים. בסך הכל יש לו 8 דברי מתיקה. כמה מסטיקים יש לדני?	<u>בעיה ט"ו:</u> לדני יש סוכריות ו- 3 מסטיקים. בסך הכל יש לו 8 דברי מתיקה. כמה סוכריות יש לדני?
איחוד והפרדת קבוצות- מצב דינמי	<u>בעיה ד':</u> לדני יש ממתקים: סוכריות ומסטיקים. הוא הפריד ביניהם וראה שיש לו 5 סוכריות ו- 3 מסטיקים. כמה ממתקים יש לדני?	<u>בעיה י':</u> לדני 8 ממתקים: סוכריות ומסטיקים. הוא הפריד ביניהם וראה שיש לו 5 סוכריות. כמה מסטיקים יש לדני?	<u>בעיה ט"ז:</u> לדני 8 ממתקים: סוכריות ומסטיקים. הוא הפריד ביניהם וראה שיש לו 3 מסטיקים. כמה סוכריות יש לדני?
	ההפרש לא ידוע	**לא ידוע החלק השני**	**לא ידוע החלק הראשון**
יצירת שוויון	<u>בעיה ה':</u> לדני 8 סוכריות. לרמי 5 סוכריות. כמה סוכריות צריך רמי לקנות כדי שיהיה לו אותו מספר סוכריות כמו שיש לדני?	<u>בעיה י"א:</u> לדני 8 סוכריות. רמי צריך עוד 3 סוכריות כדי שיהיה לו אותו מספר סוכריות כמו שיש לדני. כמה סוכריות יש לרמי?	<u>בעיה י"ז:</u> לדני יש סוכריות. לרמי יש 5 סוכריות. לרמי חסרות 3 סוכריות כדי שיהיה לו אותו מספר סוכריות כמו שיש לדני. כמה סוכריות יש לדני?
	ההפרש לא ידוע	**לא ידוע החלק השני**	**לא ידוע החלק הראשון**
בכמה יותר או בכמה פחות	<u>בעיה ו':</u> לדני 8 סוכריות. לרמי 5 סוכריות. כמה סוכריות יש לדני יותר מאשר לרמי?	<u>בעיה י"ב:</u> לדני יש 8 סוכריות. יש לו 3 סוכריות יותר מאשר לרמי. כמה סוכריות יש לרמי?	<u>בעיה י"ח:</u> לדני יש סוכריות. יש לו 3 סוכריות יותר מאשר לרמי. לרמי יש 5 סוכריות. כמה סוכריות יש לדני?

סוגי בעיות מילוליות:

בטבלה מוצגים שני סוגים מרכזיים של בעיות מילוליות:

<u>בעיות של שינוי (הן בחיבור והן בחיסור):</u> המצב השכיח בסוג זה הוא מצב בו נתון מספר האיברים בקבוצה. משנים את גודלה של הקבוצה על ידי הוספה או הורדה של איברים. יש למצוא את מספר האיברים בקבוצה לאחר ההוספה או ההורדה. מצבים נוספים הם המצב בו השינוי אינו ידוע (נתון מספר האיברים בקבוצה לפני השינוי ואחריו) או המצב בו מספר האיברים בקבוצה אינו ידוע (נתון השינוי ומספר האיברים לאחר השינוי).

<u>בעיות איחוד קבוצות, יצירת שוויון, ובכמה יותר או פחות</u>: נתונות שתי קבוצות. יש לאחד אותן או ליצור מהן שתי קבוצות ולמצוא את מספר האיברים בקבוצת האיחוד או באחת מתתי הקבוצות.

בעיות של שינוי הן בעיות דינמיות, כלומר, בעיות בהן מתוארת התפתחות של אירוע או של תהליך. נתון מצב התחלתי, שינוי במצב זה ומצב סופי. התלמיד נשאל על אחד המצבים. גם בבעיות של יצירת שוויון יש היבט דינמי: יש להוסיף או להפחית את מספר האיברים באחת הקבוצות כדי ליצור שוויון בין מספר איברים זה לבין מספר האיברים בקבוצה אחרת. לעומת זאת, בעיות של "בכמה יותר? או בכמה פחות?" הן בעיות סטטיות. ההפרש נתון – והשאלה היא: מהו ההפרש? בבעיות של איחוד והפרדת קבוצות – אפשר להתייחס למצב סטטי ואפשר ליצור מצב שהוא במידה מסוימת דינמי.

ב. בטבלה 18 בעיות. דרגו אותן על פי דרגת קושי מ- 1 עד 18. פרטו את שיקולי הדעת

שוני בדרגות הקושי בהתייחסות ל"מה צריך למצוא":

בעיות בהן צריך למצוא את מספר האיברים בקבוצה לאחר הוספה או הורדה, את קבוצת האיחוד או את ההפרש בין מספר האיברים בשתי קבוצות הן הבעיות הקלות יותר (הבעיות בעמודה הראשונה בטבלה). ילדים יכולים לייצג את המצב המתואר בבעיות אלה באופן ישיר, באמצעות עצמים מוחשיים, ציור או באופן סימבולי (בסיפור הנתון).

בעיות בהן נשאלים הילדים על שינוי או על אחת מתתי הקבוצות (בעיות מהעמודה השנייה) קשות יותר מאשר בעיות בהן הילדים נשאלים על המצב הסופי. הבעיות בהן הילדים נשאלים על הכמות ההתחלתית (בעיות מהעמודה השלישית) הן הקשות ביותר, כיוון שקשה במיוחד לילדים להתייחס ולייצג תרחיש בו המצב ההתחלתי אינו ידוע.

שוני בדרגות הקושי בין בעיות דינמית של שינוי, בעיות סטטיות ובעיות השוואה:

מחקרים מראים כי בעיות דינמיות של שינוי קלות לילדים יותר מאשר שאר הבעיות, וכי בעיות השוואה הן הקשות ביותר (Riley & Greeno, 1988). סיבה אפשרית לכך שבעיות דינמיות של שינוי הן הבעיות הקלות ביותר לילדים היא שבבעיות דינמיות של שינוי הילדים יכולים ל"המחיז" את המצב ולפעול בו באופן המתואר בבעיה. ילדים צעירים, לפני כניסתם לבית ספר, מתנסים במצבים רבים המצריכים "שינוי" של מצב נתון. למשל, להוסיף דברים לכמות קיימת כדי להגדיל אותה או להפחית עצמים מכמות מסוימת כדי להקטין אותה.

שוני בדרגות הקושי בין חיבור לחיסור:

מחקרים מצביעים על כך שפעולת החיבור היא הפעולה המבוססת ביותר אצל רוב התלמידים, וכי בעיות שפתרונן דורש שימוש בפעולת חיבור קלות לילדים יותר מאשר בעיות שפתרונן דורש שימוש בפעולת חיסור. הרט (Hart, 1980) מדווחת במחקריה כי מספר תלמידים השתמשו בפעולת החיבור כ"פעולה כללית", כלומר הם נטו לחבר גם כאשר הפעולה הנדרשת לפתרון הבעייה היתה חיסור, כפל או חילוק. היא מדווחת כי סדר הקושי לגבי סוג הפעולה הוא: חיבור, חיסור, חילוק וכפל (מהקל לקשה).

מחקריה של הרט (Hart, 1980) נערכו באנגליה על מדגם רחב של תלמידים בגילאי 16-11 בניסיון לקבוע על הידע המתמטי הנורמטיבי של תלמידים בגילאים אלה. הטבלה המוצגת כאן מתארת את ההצלחה בפתרון בעיות מילוליות בארבע פעולות החשבון (Hart, 1980) .

<u>טבלה 1: ממוצעים וסטיות תקן של הצלחה בפתרון בעיות הדורשות שימוש בפעולה אחת</u>

	ממוצע (ב- %)	**סטיית תקן**
חיבור	87.6	9.5
חיסור	67.0	15.9
חילוק	62.6	12.7
כפל	53.4	19.4

ניתן לראות כי ממוצע ההצלחה בפתרון בעיות חיבור גבוה מממוצע ההצלחה בפתרון בעיות חיסור, ובנוסף, כי סטיית התקן בהקשר לבעיות חיבור קטנה מזו בהקשר לבעיות חיסור (כלומר, פיזור הציונים בהקשר לחיבור קטן יותר).

דרוג אפשרי של 18 הבעיות על פי דרגות קושי (מהקל לקשה):

1. <u>בעיה א'</u>: בעיה של שינוי בחיבור - "הוסף ל-" - הסכום לא ידוע.

לדני 5 סוכריות.
אמא נתנה לו עוד 3 סוכריות.
כמה סוכריות יש לדני כעת?

2. <u>בעיה ב'</u>: שינוי בחיסור – " קח מ- " – ההפרש לא ידוע.

לדני 8 סוכריות.
הוא נתן לרמי 5 סוכריות.
כמה סוכריות נשארו לדני?

3. <u>בעיה ד'</u>: איחוד קבוצות- מצב דינמי - קבוצת האיחוד לא ידועה.

לדני יש ממתקים: סוכריות ומסטיקים.
הוא הפריד ביניהם וראה שיש
לו 5 סוכריות ו- 3 מסטיקים.
כמה ממתקים יש לדני?

4. <u>בעיה ג'</u>: איחוד קבוצות - מצב סטטי – קבוצת האיחוד לא ידועה.

לדני 5 סוכריות ו- 3 מסטיקים.
כמה ממתקים יש לדני?

5. <u>בעיה ז'</u>: שינוי בחיבור – "הוסף ל-" – השינוי אינו ידוע.

לדני 5 סוכריות.
הוא קבל מאמא עוד סוכריות.
כמה סוכריות אמא נתנה לדני אם כעת יש לו 8 סוכריות?

6. בעיה ח': שינוי בחיסור – " קח מ-" – השינוי לא ידוע.

לדני היו 8 סוכריות.
הוא נתן לרמי חלק מהסוכריות שלו.
כעת יש לדני 3 סוכריות. כמה סוכריות נתן דני לרמי?

7. בעיה יג': שינוי בחיבור – "הוסף ל-" – ההתחלה לא ידועה.

לדני יש סוכריות.
אמא נתנה לו עוד 3 סוכריות, וכעת יש לו 8 סוכריות.
כמה סוכריות היו לדני בהתחלה?

8. בעיה יד: שינוי בחיסור – " קח מ-" – ההתחלה לא ידועה.

לדני יש סוכריות.
הוא נתן לרמי 5 מהסוכריות שלו.
כעת יש לדני 3 סוכריות.
כמה סוכריות היו לדני בהתחלה?

9. בעיה י': איחוד קבוצות- מצב דינמי - לא ידועה הקבוצה השנייה.

לדני 8 ממתקים: סוכריות ומסטיקים.
הוא הפריד ביניהם וראה שיש לו 5 סוכריות.
כמה מסטיקים יש לדני?

10. בעיה ט': איחוד קבוצות - מצב סטטי – לא ידועה הקבוצה השנייה.

לדני יש 5 סוכריות ויש לו גם מסטיקים.
בסך הכל יש לו 8 דברי מתיקה.
כמה מסטיקים יש לדני?

11. בעיה ט"ז: איחוד קבוצות- מצב דינמי - לא ידועה הקבוצה הראשונה.

לדני 8 ממתקים: סוכריות ומסטיקים.
הוא הפריד ביניהם וראה שיש לו 3 מסטיקים.
כמה סוכריות יש לדני?

12. בעיה ט"ו: איחוד קבוצות - מצב סטטי – לא ידועה הקבוצה הראשונה.

לדני יש סוכריות ו- 3 מסטיקים.
בסך הכל יש לו 8 דברי מתיקה.
כמה סוכריות יש לדני?

13. בעיה ה': יצירת שוויון – ההפרש לא ידוע.

לדני 8 סוכריות.
לרמי 5 סוכריות.
כמה סוכריות צריך רמי לקנות כדי שיהיה לו אותו מספר סוכריות כמו שיש לדני?

14. בעיה ו': בכמה יותר / בכמה פחות – ההפרש לא ידוע.

לדני יש 8 סוכריות.
לרמי יש 5 סוכריות.
כמה סוכריות יש לדני יותר מאשר לרמי?

15. בעיה י"א: יצירת שוויון – לא ידוע החלק השני.

לדני יש 8 סוכריות.
רמי צריך עוד 3 סוכריות כדי שיהיה לו אותו מספר סוכריות כמו שיש לדני.
כמה סוכריות יש לרמי?

16. בעיה י"ב: בכמה יותר / בכמה פחות – לא ידוע החלק השני.

לדני יש 8 סוכריות.
יש לו 3 סוכריות יותר מאשר לרמי.
כמה סוכריות יש לרמי?

17. בעיה י"ז: יצירת שוויון – לא ידוע החלק הראשון.

לדני יש סוכריות.
לרמי יש 5 סוכריות. חסרות לרמי 3 סוכריות כדי שיהיה לו אותו מספר סוכריות כמו לדני.
כמה סוכריות יש לדני?

18. בעיה י"ח: בכמה יותר / בכמה פחות – לא ידוע החלק הראשון.

לדני יש סוכריות.
יש לו 3 סוכריות יותר מאשר לרמי.
לרמי יש 5 סוכריות.
כמה סוכריות יש לדני?

ד. התייחסו לשש הבעיות בעמודה השנייה מימין (לדני 5 סוכריות, אימא נתנה לו עוד 3 סוכריות. כמה סוכריות יש לדני כעת? והבעיות הרשומות מתחתיה).

(i) הציעו, לגבי כל בעיה, בעיה קשה יותר. הסבירו, מדוע לדעתכם, הבעיות שהצעתם קשות יותר?

ניתן להעלות את דרגת הקושי של הבעיות במספר דרכים:

שינוי המספרים המופיעים בבעיה (למספרים גדולים יותר):

1. שינוי בחיבור - "הוסף ל-" - הסכום לא ידוע -

לדני היו 87 מדבקות, אימא נתנה לו עוד 96 מדבקות. כמה מדבקות יש לדני כעת?

2. שינוי בחיסור – " קח מ-" – ההפרש לא ידוע -

לדני היו 183 מדבקות הוא נתן לרמי 87 מדבקות. כמה מדבקות נשארו לדני כעת?

3. איחוד קבוצות - מצב סטטי – קבוצת האיחוד לא ידועה:

לדני 87 מדבקות של חיות ו- 96 מדבקות של פרחים. כמה מדבקות יש לדני?

4. איחוד קבוצות – מצב דינמי – קבוצת האיחוד לא ידועה:

לדני מדבקות של חיות ושל פרחים. הוא הפריד ביניהם וראה שיש לו 87 מדבקות של חיות ו- 96 מדבקות של פרחים. כמה מדבקות יש לדני?

5. יצירת שוויון – ההפרש לא ידוע:

לדני 87 מדבקות. לרמי 96 מדבקות. כמה מדבקות על דני לקנות כך שמספר המדבקות שלו יהיה שווה למספר המדבקות של לרמי?

6. בכמה יותר / בכמה פחות – ההפרש לא ידוע:

לדני 87 מדבקות. לרמי 96 מדבקות. כמה מדבקות יש לדני יותר מאשר לרמי?

שינוי מכמות בדידה (כמו למשל, אנשים, גולות, סוכריות) לכמות רציפה (ק"מ, מטרים וכדומה):

1. בעיית שינוי בחיבור - "הוסף ל-" - הסכום לא ידוע -

לדני 3 מטרים של חבל. אימא נתנה לדני עוד 5 מטרים של חבל. כמה מטרים של חבל יש לדני כעת?

2. שינוי בחיסור – " קח מ- " – ההפרש לא ידוע -

לדני חבל באורך 8 מטרים. הוא גזר 5 מטרים מהחבל ונתן אותם. כמה מטרים של חבל נשארו לדני?

3. איחוד קבוצות - מצב סטטי – קבוצת האיחוד לא ידועה:

לדני 5 ק"ג סוכר חום ו- 3 ק"ג סוכר לבן. כמה קילוגרמים של סוכר יש לדני?

4. איחוד קבוצות – מצב דינמי – קבוצת האיחוד לא ידועה:

לדני יש פירות: אגסים ותפוחים. הוא הפריד ביניהם וראה שיש לו 5 ק"ג תפוחים ו- 3 ק"ג אגסים. כמה קילוגרמים של פירות לדני?

5. יצירת שוויון – ההפרש לא ידוע:

דני נסע 8 ק"מ באופניים. רמי נסע 5 ק"מ באופניים. כמה קילומטרים על רמי לנסוע כדי שיסע אותו מרחק שנסע דני?

6. בכמה יותר / בכמה פחות – ההפרש לא ידוע:

דני נסע 8 ק"מ באופניים. רמי נסע 5 ק"מ באופניים. כמה קילומטרים נסע דני יותר מאשר רמי?

שינוי ההוראה: מבקשה לפתרון הבעיה לבקשה לחיבור בעיה מתאימה לתרגיל נתון:

אפשר להציג לתלמידים תרגילי חשבון ולבקשם לחבר בעיות שאת פתרונן אפשר לבטא באמצעות תרגילים אלה . כך אפשר לבדוק מהם המודלים המתקשרים אצל התלמידים לתרגילים שונים. משימה קשה יותר היא לבקש לחבר בעיות שונות לאותו תרגיל. למשל לחבר בעיות שונות המתאימות לתרגיל 5+3 , או לתרגיל 8-5 (או במספרים גדולים: 28+84 , 84-28)

במחקריה של הרט (Hart, 1980) ובמחקרים אחרים מדווח כי כאשר תלמידים התבקשו להציג סיפור מתאים לתרגיל חיבור (למשל, לתרגיל 28+84) חלקם הציגו סיפור שהתאים למודל של איחוד קבוצות (למשל: לגיון 28 קלפים ולתום 84 קלפים. כמה קלפים לשניהם?), אחרים הציגו בעיה דינמית של שינוי (למשל, לגיון 28 שקלים. אמא שלו נתנה לו עוד 84 שקלים. כמה שקלים יש לו עכשיו?) ואחרים הציגו שאלה שמנוסחת בין הוספה לבין השוואה והתקשו בכתיבת השאלה, בסוף הסיפור.(למשל, לתרגיל 9+3: לקרן 9 ביצים. לסוזן יש ב- 3 יותר).

מרבית התלמידים שלא הצליחו לבצע משימה זו לא הבינו מה נדרש. למשל תלמיד בן 12 כתב, לגבי התרגיל 9+3 : "פעמיים 6". תלמידים אחרים כתבו: "9 ו- 3 הלכו יחד בכביש ו- 9 פגש את 3 ואז הם נעשו 12", "פעם ישבתי בכיתה וניסיתי לחבר 9 ועוד 3 וקבלתי 12".

כאשר התלמידים התבקשו לכתוב סיפור שיתאים לתרגיל חיסור הם כתבו בדרך כלל בעיה דינמית של שינוי. למשל, "לתום 84 סוכריות. הוא נתן 28 סוכריות לחבר שלו. כמה סוכריות נשארו לו?

מספר קטן של תלמידים חיברו בעיות של השלמה לחיבור (complementary addition). למשל:
אדם יצא לחופשה של 84 ימים. הוא נמצא בחופשה כבר 28 ימים. כמה ימי חופשה נותרו לו?

ד. התייחסו לשש הבעיות בעמודה השנייה מימין (לדני 5 סוכריות, אימא נתנה לו עוד 3 סוכריות. כמה סוכריות יש לדני כעת? והבעיות הרשומות מתחתיה). (ii) הציעו, לגבי כל בעיה, בעיה קלה יותר. הסבירו, מדוע לדעתכם, הבעיות שהצעתם קלות יותר?

אחת האפשרויות להציג בעיות שהן קלות יותר לחלק מהתלמידים היא לבקש מהם לזהות את הפתרון המתאים לבעיה נתונה מבין שניים (או יותר) פתרונות שמוצגים להם, כאשר רק פתרון אחד מביניהם הוא הפתרון המתאים לבעיה. כלומר, זיהוי פתרון מתאים לבעיה נתונה לעומת הפקת פתרון לבעיה.

למשל, לגבי הבעיה הראשונה:

לדני 5 סוכריות.
אמא נתנה לו עוד 3 סוכריות.
כמה סוכריות יש לדני כעת?

אפשר להציג לתלמיד שני תרגילים, כאשר רק אחד מהם מתאים לפתרון הבעיה, ולבקש ממנו לסמן את הפתרון המתאים.

למשל, לגבי הבעיה הראשונה, ההוראה יכולה להיות כזו:

סמן את התרגיל המתאים,לדעתך, לפתרון הבעיה

א) 5+3=8 ב) 5-3=2 (אפשר, כמובן, גם לרשום את התרגיל ללא הפתרון).

דרגת הקושי בסוג זה של משימות (זיהוי) תלויה בין השאר במסיחים.

למשל הצגת המסיח 5+6=11 יכולה לסייע כיוון שהמספר 6 אינו נתון בבעיה.

יש לציין כי לחלק מהתלמידים קשה יותר לזהות מהו הפתרון המתאים מבין פתרונות נתונים מאשר להפיק את הפתרון בעצמם וכי ישנן משימות בהן ההוראה "זהה את הפתרון המתאים" קשה יותר, למרבית התלמידים, מאשר ההוראה "פתור את הבעיה".

הערות והארות לפעילות 2: כיצד פותרים? אסטרטגיות לפתרון תרגילי חיבור וחיסור תלת ספרתיים לפני הוראה ואחריה

פעילות זו מתמקדת במגוון דרכי פתרון של תלמידים לתרגילי חיבור וחיסור, כאשר המספרים המופיעים בתרגילים הם מספרים תלת ספרתיים.

תרגילי החיבור והחיסור המופיעים בפעילות זו לקוחים מתוך מאמר של שלטר (Selter, 2001). המאמר בוחן דרכים בהן תלמידים בכיתה ג' (בני 9) פותרים תרגילי חיבור וחיסור, כאשר המספרים המופיעים בתרגילים הם מספרים תלת ספרתיים.

שניים-עשר תרגילים אלה ניתנו לתלמידים. שלוש פעמים באופן הבא:

- לפני הוראת האלגוריתמים הסטנדרטיים של חיבור ושל חיסור (פברואר, כיתה ג', גיל- 9).
- אחרי הוראת האלגוריתמים הסטנדרטיים של חיבור ושל חיסור (יוני, כיתה ג').
- בתחילת שנת הלימודים הבאה (אוקטובר, תחילת כיתה ד').

כל התרגילים נרשמו במאוזן.

א. לפניכם 12 תרגילים. מיינו את התרגילים במספר דרכים והסבירו את שיקולי הדעת שלכם בכל אחד מהמיונים.
התרגילים: 572+399; 250+279+250; 345+634; 836-567; 758-515; 199+198;
119+120+121; 649-347 ; 845-399 ; 701-689 ; 286+437 ; 610-590

נציג מספר מיונים של תרגילים אלה.

אפשר למיין את 12 התרגילים על פי הפעולות המופיעות בהן (סוג הפעולה, מספר הפעולות).

אפשר גם למיינם לפי הצורך בהמרה/פריטה,

מיון אפשרי נוסף: על פי נוחות המעבר לתרגיל שקול.

מיונים הקשורים בפעולות

<u>מיון התרגילים על פי סוג הפעולה המופיעה בתרגיל</u>:

1. שישה תרגילי חיבור: 572+399; 250+279+250; 345+634; 199+198; 119+120+121; 86+437.
2. שישה תרגילי חיסור: 836-567; 758-515; 649-347 ; 845-399 ; 701-689 ; 610-590 .

<u>מיון התרגילים על פי מספר הפעולות שיש לבצע בהם:</u>

1. עשרה תרגילים בהם יש לבצע פעולה אחת: 572+399; 345+634; 836-567; 758-515; 199+198; 649-347; 845-399 ; 701-689 ; 286+437 ; 610-590 .
2. שני תרגילים בהם יש לבצע שתי פעולות: 250+279+250; 119+120+121.

מיון התרגילים על פי הצורך בהמרה/פריטה:

<u>תרגילים שאינם דורשים המרה או פריטה</u>: 345+634 ; 758-515 ; 649-347.

<u>תרגילים הדורשים המרה אחת או פריטה אחת:</u>

המרה 250+279+250 ; 119+120+121.

פריטה 610-590.

<u>תרגילים הדורשים שתי המרות או שתי פריטות:</u>

המרות 286+437 ; 572+399 ; 199+198.

פריטות 836-567 ; 845-399 ; 701-698.

מיון התרגילים על פי נוחות המעבר לתרגיל שקול:

<u>תרגילים הכוללים מספרים "המזמינים" מעבר לתרגיל אחר</u>- תרגיל עזר או תרגיל שקול שהוא נוח לפתרון יחסית לתרגיל המקורי (ראו התייחסות לכך בהערות והארות לשאלה 2 בדף פעילות זה):

תרגילי חיבור: 572+399 ; 199+198.

תרגילי חיסור: 845-399 ; 649-347 ; 701-698 ; 610-590.

<u>תרגילים שהמספרים המופיעים בהם אינם "מזמינים" מעבר לתרגיל אחר:</u>

1. תרגילים שאינם דורשים המרה או פריטה: 345+634 ; 758-515
2. תרגילים ששימוש באלגוריתמים הסטנדרטיים לפתירתם מחייב שתי המרות או שתי פריטות ואין יתרון בולט במעבר לתרגיל אחר: 286+437; 836-567.
3. תרגילי חיבור המכילים שלשה מספרים, ויש יתרון לחיבור שנים מהם (לא לפי סדר הכתיבה בתרגיל): 119+120+121 ; 250+279+250.

ב. לפניכם שני תרגילים (מבין 12 התרגילים שבשאלה קודמת): 572+399 ; 701-698

i. הציגו מספר דרכים נכונות בהם תלמידים בבית ספר שעדיין לא לימדו בכיתתם את האלגוריתמים הסטנדרטיים של חיבור וחיסור יפתרו תרגילים אלו.

(ii) לגבי כל אחת מאסטרטגיות הפתרון שהצגתם בסעיף (i), חברו תרגיל נוסף והדגימו כיצד פותרים את התרגיל שחיברתם באמצעות אסטרטגיה זו.

דרכים נכונות בהם ילדים בבית ספר שעדיין לא לימדו בכיתתם את האלגוריתמים הסטנדרטיים של חיבור וחיסור יפתרו תרגילים אלו:

אסטרטגיות פרוק (מלא או חלקי) של המספרים בתרגיל, למאות- עשרות- ואחדות:

<u>חיבור למחובר הראשון</u>

ראשית את המאות של המחובר השני; אחר כך את העשרות של המחובר השני ; אחר כך את האחדות של המחובר השני.

תרגיל החיבור 572+399: $572+300 = 872 \Rightarrow 872+90 = 962 \Rightarrow 962+9 = 971$

בדומה, בתרגיל החיסור חיסור המאות, אחר כך העשרות ולבסוף האחדות:

701-698 : $701\text{-}600 = 101 \Rightarrow 101\text{-}90 = 11 \Rightarrow 11\text{-}8 = 3$

<u>חיבור המאות של המחובר השני למחובר (מחוסר) הראשון ולאחר מכן חיבור(חיסור) העשרות ואחדות יחד</u> (אסטרטגיה דומה לאסטרטגיה הקודמת, כאשר כאן השלב השני והשלישי נעשים יחד) :

תרגיל החיבור 572+399: $572+300 = 872 \Rightarrow 872+99 = 971$

ובדומה בתרגיל החיסור 701-698: : $701\text{-}600 = 101 \Rightarrow 101\text{-}98 = 3$

בדרך כלל תלמידים משתמשים באסטרטגיה זו כאשר אין צורך בהמרות או פריטות.

למשל בתרגיל החיבור 345+634 (שאינו דורש המרה) ובתרגיל החיסור 758-515 (שאינו דורש פריטה).

<u>חיבור מאות למאות, עשרות לעשרות ואחדות לאחדות</u>

באותו אופן לגבי חיסור (חיסור מאות ממאות, עשרות מעשרות ואחדות מאחדות):

תרגיל החיבור 572+399: $500+300 = 800;\quad 70+90 = 160;\quad 2+9 = 11$ ⇐ חיבור התוצאות שהתקבלו: $800+160+11 = 971$

באופן דומה בתרגיל החיסור 701-698 : $700\text{-}600 = 100;\quad 0\text{-}90 = (-90);\quad 1\text{-}8 = (-7)$ ⇐ חיסור התוצאות שהתקבלו: $100+(-90)+(-7) = 3$.

בדרך כלל תלמידים משתמשים באסטרטגיה זו, בהתייחס לתרגילי חיסור, כאשר אין צורך בפריטות (במצב זה לא מתקבלים מספרים שליליים). למשל בתרגיל החיסור 758-515.

<u>חיבור מאות למאות ואחר כך חיבור העשרות והאחדות יחד</u> (אסטרטגיה דומה לאסטרטגיה הקודמת, כאשר את העשרות והאחדות מחברים כמספרים דו ספרתיים):

תרגיל החיבור 572+399: $500+300 = 800;\quad 72+99 = 171$ ⇐ חיבור התוצאות שהתקבלו: $800+171 = 971$

באופן דומה בתרגיל החיסור 701-698 : $700\text{-}600 = 100;\quad 1\text{-}98 = (-97)$ ⇐ חיבור כל התוצאות שהתקבלו: $100+(-97) = 3$.

גם כאן, בדומה לאסטרטגיות הקודמות, השימוש באסטרטגיה זו נעשה בדרך כלל כאשר לא נדרשות המרות או פריטות.

דרכי הפתרון שהוצגו כאן לא כוללות, כמובן, את כל האסטרטגיות האופייניות של פירוק בהן משתמשים תלמידים בפתרון התרגילים. אפשר כמובן לפתור תרגילים אלה באמצעות פירוקים אחרים וביניהם כאלה המשלבים בין אלה המתוארים כאן.

למשל, בהתייחסות לתרגיל החיבור 572+399:

572+9; +90; +300 או: 572 +300; +8; +20; +70; +1 או תוך שימוש בחוק החילוף בחיבור והתייחסות לתרגיל 399+572: 399+500; +1; +70; +1

בהתייחסות לתרגיל החיסור 701-698: 701-1; -600; -90; -7

אסטרטגיות של מעבר לתרגיל אחר:

<u>מעבר לתרגיל עזר ולאחר מכן פיצוי בהתאם</u>:

תרגיל החיבור 572+399: פתרון התרגיל 972= 400 + 572 ולאחר מכן 971 = 1-972 (הגדלנו את אחד המחוברים ב- 1 ולכן הסכום, לעומת הסכום בתרגיל המקורי, גדל ב- 1 ולכן יש להקטין את הסכום ב 1).

תרגיל החיסור 701-698: פתרון התרגיל 1= 701-700 3=1+2

(החסרנו מספר הגדול ב 2 מהמספר אותו היה עלינו לחסר ולכן ההפרש קטן ב 2 מההפרש בין המספרים בתרגיל המקורי ולכן יש להוסיף להפרש שהתקבל 2).

דוגמא לתרגיל חיבור:

199+198: מעבר לתרגיל 200+198=398 ולאחר מכן חיסור 1 מהסכום: 398-1=397

מעבר לתרגיל 199+200=399 ולאחר מכן חיסור 2 מהסכום: 399-2=397

מעבר לתרגיל 400 =200+200 ולאחר מכן חיסור 3 מהסכום: 400-3=397

דוגמא לתרגילי חיסור:

845-399: מעבר לתרגיל 845-400=445 ולאחר מכן הוספת 1 להפרש: 446 =445+1

649-347: מעבר לתרגיל 649-349=300 ולאחר מכן הוספת 2 להפרש : 300+2=302

מעבר לתרגיל 650-347=303 ולאחר מכן חיסור 1 מההפרש 303-1=302

610-590: מעבר לתרגיל 610-600=10 ולאחר מכן הוספת 10 להפרש: 10+10=20

<u>מעבר לתרגיל שקול</u>

1. תרגילי חיבור - שימוש ב: $a+b= (a+c)+(b-c)$ (כלומר, סכום שני מחוברים אינו משתנה כאשר מגדילים את אחד המחוברים במספר מסוים ומקטינים את המחובר השני באותו מספר).

למשל, בתרגיל 572+399: $572 + 399 = (572-1) + (399+1) = 571 + 400 = 971$.

הסבר אופייני שניתן על ידי תלמידים שפתרו כך הוא: "מעבירים 1 מ- 572 ל 399 ומקבלים 571+400".

תרגילים נוספים שתלמידים פתרו בדרך זו:

199+198: $199+198 = 200+197 = 397$.

119+120+121: $119+120+121 = 120+120+120 = 360$.

2. תרגילי חיסור - שימוש ב: $a - b = (a \pm c) - (b \pm c)$ (כלומר, הפרש שני מספרים אינו משתנה אם מגדילים או אם מקטינים את שניהם באותו מספר).

למשל, בתרגיל 701-698: $701- 698 = (701+2)- (698 +2) = 703 - 700 = 3$

$701-698 = (701-1)- (698-1) = 700- 697 =3$

הסבר אופייני שניתן על ידי תלמידים שפתרו כך הוא: "הוספנו ל- (או חיסרנו מ-) שני המספרים שבתרגיל אותו מספר, ואחר כך חיסרנו ולכן לא שינינו את התוצאה – המרחק ביניהם נשאר אותו דבר".

תרגילים נוספים שתלמידים פתרו בדרך זו:

845-399: 845-399 = 846-400 = 446

649-347: 649-347 = 652-350 = 302

610-590: 610-590 = 620-600 = 20

מומלץ לדון בדמיון ובשוני בין מעבר לתרגיל עזר ופיצוי בהתאם לבין מעבר לתרגיל שקול לתרגיל נתון.

<u>בתרגילי חיסור- מעבר לתרגילי חיבור עם נעלם</u>:

בדרך זו באה לידי ביטוי ההתייחסות לחיסור לא רק כאל הורדה או כאל מרחק בין שני מספרים אלא גם כהוספה למחסר.

כלומר, התייחסות לפעולת החיסור כאל פעולה הפוכה לחיבור: a- b = c אם c+b=a .

דוגמאות:

תרגיל החיסור 701-698: המעבר הוא לתרגיל החיבור 701= [?] + 698

תלמידים פותרים תרגיל חיבור זה במספר דרכים. יש הסופרים ספירה כפולה, כלומר "699 זה 1, 700 זה 2, 1701 זה 3 ולכן התשובה היא 3". אחרים משלימים ראשית ל- 700 (ואומרים 2), מוסיפים 1 כדי להגיע ל 701 (ואומרים 3=1+2) ורושמים 3.

דוגמא לתרגיל נוסף בהם תלמידים עושים שימוש במעבר זה:

610-590: המעבר הוא לרישום 610 = [?]+590

הצגנו כאן אסטרטגיה של מעבר לתרגיל חיבור עם נעלם לגבי תרגילים שכללו מספרים שהמעבר לאסטרטגיה זו מקל על הפתרון. ישנם תלמידים המשתמשים באסטרטגיה זו גם לגבי תרגילים שפתרונם באמצעות מעבר לתרגיל חיבור דורש מספר שלבים.

למשל, 836-567 : מעבר לתרגיל החיבור 836=[?]+567

אחת הדרכים בהן תלמידים פותרים היא: 567+**3**=570 ; 570+**30**=600 ; 600+**200**=800 ;

800+**36**=836 ; ותוצאת התרגיל היא: 3+30+200+36=269

כפי שציינו התרגילים בפעילות זו לקוחים מתוך מחקר של שלטר (Selter, 2001) שבדק את ההצלחה של תלמידים בכיתה ג' בפתרון תרגילי חיבור ותרגילי חיסור במספרים תלת ספרתיים, ותאר את אסטרטגיות הפתרון של התלמידים לפני הוראת האלגוריתמים הסטנדרטים, מיד לאחר ההוראה ומספר חדשים אחר כך (בראשית כתה ד'). שלטר (Selter, 2001) בדק:

1. האם ישנם הבדלים בין מידת ההצלחה של התלמידים בפתרון תרגילי חיבור לבין מידת הצלחתם בפתרון תרגילי חיסור?
2. האם למספרים המופיעים בתרגיל ישנה השפעה על מידת ההצלחה בפתרון התרגילים?

3. האם אותו תלמיד נוטה להשתמש באותה דרך לפתרון כלל התרגילים?
4. האם לאחר למידת האלגוריתם הסטנדרטי תלמידים נוטים להשתמש באלגוריתמים הסטנדרטיים יותר מאשר בשאר האסטרטגיות?

הממצאים העיקריים עליהם דיווח שלטר (Selter, 2001) הם:

1. אחוזי ההצלחה בפתרון תרגילי חיבור היו גבוהים יותר מאחוזי ההצלחה בפתרון תרגילי חיסור (הן לפני ההוראה והן אחריה). אחוז גבוה יחסית של תלמידים פתר בהצלחה את התרגילים לפני ההוראה בכיתה (כ- 62% בתרגילי החיבור וכ 41% בתרגילי החיסור). העלייה באחוז ההצלחה לאחר ההוראה לא הייתה מובהקת.
2. אחוזי ההצלחה בפתרון תרגילים שהמספרים בהם מזמינים מעבר לתרגיל עזר או לתרגיל שקול היו נמוכים יחסית לאחוזי ההצלחה בפתרון התרגילים האחרים הן לפני ההוראה והן אחריה.
3. מרבית התלמידים השתמשו באותה דרך לפתרון התרגילים.
4. השימוש באלגוריתמים הסטנדרטים (בחיבור וחיסור) בלט לאחר ההוראה. עם זאת, גם לאחר ההוראה תלמידים רבים שהשתמשו בחיבור (או של חיסור) מאות למאות ולאחר מכן חיבור (או חיסור) העשרות והאחדות כמספרים דו ספרתיים במגוון דרכים (למשל, 345+634 =(300+600) +(45+34) או 345+634 =(300+600) +45+34). אסטרטגיות אלה לא נלמדו בבתי הספר בהן נערך המחקר. כלומר, תלמידים פותרים תרגילי חיבור וחיסור בדרכים שאינן נלמדות בצורה פורמלית בכיתה לפני ההוראה ואחריה.

ממצאי מחקר זה מדווחים כי כאשר תלמידים פותרים תרגילי חיבור וחיסור הם נוטים לפרק מספרים תלת ספרתיים באופנים שונים. תלמידים מפרקים את המספרים בהתאם לעקרונות ההמרה והפריטה המתבססים על היחס 10:1 (כלומר, על כך שערך הספרה הנמצאת משמאל לספרה אחרת גדול ממנה פי עשר) אך הם מפרקים את המספרים גם באופנים אחרים. בפתרון תרגילי חשבון לעתים נוח יותר לפרק יחידה מסוימת ישירות ל 100, לאלף או אף ליותר יחידות. למשל, בתרגיל 302-17, כדאי לפרק מאה אחת ל 100 אחדות ובתרגיל 40005-206, כדאי לפרק יחידה אחת של עשרת אלפים ל 10000 אחדות. אנו ממליצים על התייחסות להרכבים ולפירוקים שונים של מספרים עשרוניים תוך הדגשת עקרון ערך המקום. התייחסות זו יכולה לסייע בהבנת עקרון מרכזי זה ולהקל בפתרון תרגילים כאשר נדרשות מספר פריטות או מספר המרות (למשל, תרגילים דומים לאלה שהוצגו בפסקה זו).

הערות והארות לפעילות 3:
דילמות לגבי הוראת החיבור והחיסור: מיומנה של מורה מתחילה

פעילות זו מתמקדת בנושאים שנויים במחלוקת לגבי הוראת חיבור וחיסור: גישות סביבתיות לעומת גישות מובנות (מקרה 1), הצגת הבעיה באמצעות פעולת חיבור או פעולת חיסור ושימוש ברמזים מילוליים לאיתור הפעולה הנדרשת לפתרון בעיה (מקרה 2), ודילמות המתייחסות להוראת האלגוריתמים הסטנדרטיים (מקרה 3).

לגבי מקרה 1 (גישות סביבתיות לעומת גישות מובנות)**:**

יעל מציעה כי תלמידים יתמודדו עם פתרון בעיות מילוליות רק לאחר שהם ישלטו בעובדות היסוד. יעל מייצגת את גישת ההוראה המובנת, גישה הדוגלת בכך שהתלמיד ילמד תחילה את המושגים המתמטיים וירכוש את הכלים הפורמליים (למשל, שליטה בעובדות היסוד בחיבור) ורק לאחר מכן יישם ידע זה בהתייחסות למצבים מחיי היום יום. נימוק אופייני הניתן על ידי התומכים בגישה זו הוא שילדים הלומדים את המושגים המתמטיים מתוך התמודדות עם מצבים מחיי היום יום (בעיות מילוליות) עלולים להעניק למושגים פירושים שאינם מתאימים לאופן בו מוגדרים מושגים אלה במתמטיקה. נימוק אופייני מקובל נוסף הניתן על ידי המצדדים בגישה המובנת הוא ששליטה בעובדות היסוד ברמה של שליפה אוטומטית מאפשרת הפניית משאבי קשב לעיסוק בתכנים בלבד (המצב המתואר בבעיה המילולית). בנוסף, חלק מהילדים מתקשים בקריאה וההתייחסות לעובדות היסוד במנותק מהקריאה יכולה לסייע להגברת ביטחונם ביכולת החשבונית שלהם.

מיכל מציגה עמדה אופיינית לגישה הסביבתית, הרואה בפתרון בעיות מחיי היום יום מרכיב מרכזי של ההתנסות החשבונית כבר בגיל צעיר. נימוקים אופייניים להצדקת השימוש בגישה זו הם: הוראת עובדות היסוד תוך התמודדות עם פתרון בעיות מילוליות (אותנטיות ורלוונטיות לחיי התלמידים), מזמנת לילדים מצבים בהם הם יוצרים קשר בין משמעות פעולת החשבון לבין ביצוע הפעולה. עיסוק בפתרון בעיות מילוליות לאחר למידת עובדות היסוד אינו מעודד יצירת קשרים אלה כיוון שכאשר ההתמודדות עם הבעיות המילוליות נעשית לצורך יישום לאחר הוראת כל אחת מהפעולות ללומדים ברור שכל שעליהם לעשות הוא למצוא את המספרים ולבצע את הפעולה אליה מתייחס פרק הלימוד ולכן הם אינם מתעמקים בתוכן הבעיה. טיעון נוסף הוא שניסיון להביא את הלומדים לשליטה אוטומאטית בעובדות היסוד עלול להוות מכשול לאלו אשר יתקשו בכך, וכתוצאה מכך עלולים להתפתח אצלם תסכולים וחרדות לגבי יכולותיהם החשבוניות.

לגבי מקרה 2 (הצגת הבעיה באמצעות פעולת חיבור או פעולת חיסור ושימוש ברמזים מילוליים):

הבעיה: *אביבה רוצה לקנות כדור שמחירו 14 שקלים. יש לה 8 שקלים.*
כמה שקלים חסרים לה כדי לקנות את הכדור?

זו בעיה של יצירת שוויון, כאשר הקבוצה השנייה אינה ידועה (ראו פעילות 1 בפרק זה).

האסטרטגיות המוצגת על ידי המורה יעל ועל ידי המורה מיכל מייצגות התייחסויות שונות לבעיה. יעל מתייחסת אל הבעיה כאל "בעיית חיסור" ואילו מיכל מציגה בעיה זו "כבעיית חיבור עם נעלם".

__הדרך של יעל:__ בדרך זו מכוונים את התלמיד להיעזר ברמזים מילוליים בבעיה ("חסרים") כדי לבחור את הפעולה המתאימה לפתרון הבעיה (התייחסות לכך נמצאת אצל נשר: Nesher, 1980). נציין כי ישנם תלמידים שמשתמשים בפעולת החיבור כ"פעולה כללית" לפתרון בעיות (Hart, 1980), ולכן חשוב לחזק אצלם את השימוש בפעולת החיסור בפתרון בעיות המאפשרות זאת. עם זאת, השימוש בקישור הלשוני בין "חסרים" לבין "חיסור" עלול להיות בעייתי. נתייחס למשל לבעיה: "לדן 8 שקלים. חסרים לו 5 שקלים כדי לקנות כדור. כמה עולה הכדור?". קישור אוטומטי בין "חסרים" לבין "חסר" עלול לגרום לכך שהתלמיד יכתוב את התרגיל 8-5, תרגיל שאינו מתאים, כמובן, לפתרון הבעיה.

__הדרך של מיכל:__ מתוך האמירה של מיכל לא ברור מהו ההליך המתרחש בכתה המוליך לכתיבת תרגיל חיבור עם נעלם. כפי שציינו מחקרים מצביעים על כך שפעולת החיבור היא הפעולה המבוססת ביותר אצל רוב התלמידים, וכי לילדים רבים קל להתמודד עם חיבור יותר מאשר עם חיסור (ראה הערות והארות לפעילות 1 בפרק זה וכן אצל: Carpenter & Moser, 1984). עם זאת, לא ברור האם נערך בכתה דיון לצורך הבהרת המצב המתואר בבעיה והאם כתיבת התרגיל נעשתה מתוך הבנה זו.

חשוב לדון בדילמות הוראתיות העולות מתוך ההתייחסויות של יעל ושל מיכל. כל אחת מהן מציגה דרך אחת לייצוג הבעיה באמצעות ביטוי חשבוני. האם להציג דרך פתרון אחת? האם להציג מספר דרכי פתרון? האם רצוי לאפשר לילדים להציג דרכי פתרון שלהם? האם להציג דרכי פתרון שגויות של תלמידים, ולדון בהן?

לגבי מקרה 3 (הוראת האלגוריתמים הסטנדרטיים של חיבור וחיסור):

אחת המחלוקות המרכזיות בהוראת החשבון בבית הספר היסודי נוגעת להוראת האלגוריתמים הסטנדרטיים של פעולות החשבון בכלל ושל פעולות החיבור והחיסור בפרט. נזכיר כי אלגוריתם הוא שטה מדויקת, מפורטת לפתרון קבוצת תרגילים (או קבוצת בעיות) וכי אותם אלגוריתמים סטנדרטיים לפתרון תרגילי חיבור ותרגילי חיסור (בשינויים קלים) מקובלים במדינות רבות. השאלות: האם יש להורות את האלגוריתמים הסטנדרטיים בבתי ספר? אם כן, מתי? איך? נידונות בכתבים רבים.

בספר המוקדש כולו להוראת אלגוריתמים בבתי ספר (Morrow and Kenney, 1998) מוצגות דעות שונות לגבי הוראת אלגוריתמיים סטנדרטיים. בפרק המתייחס להוראת האלגוריתמים הסטנדרטיים של פעולות החשבון נעשה ניסיון לרכז את הנימוקים המרכזיים "בעד" ואת הנימוקים המרכזיים "נגד".

נימוקים מרכזיים בעד הוראת האלגוריתמיים הסטנדרטיים:

1. אלגוריתמים אלה פותחו במשך שנים וקבלו את מעמדם מסיבות ראויות.
2. אלגוריתמים אלה הם יעילים, כלומר, אלו הן הכללות המאפשרות מתן פתרון לקבוצה גדולה של תרגילים.
3. הפעולות הדרושות בעת ביצוע האלגוריתם הן שגרתיות ומדויקות וקל לזכור אותן.

4. התרגול מסייע בכך שהצעדים הנכללים באלגוריתמים יעשו באופן אוטומטי וכך מתאפשר ביצוע מהיר.
5. כאשר הביצוע האלגוריתמי הוא אוטומטי לא נדרשת השקעת מאמץ שכלי בהפעלתו ומשאבי הקשב יכולים להיות מושקעים בפעילות אחרת, למשל התמקדות בתוכן הבעיה.
6. מתמטיקה היא שפה ולתקשורת באמצעותה יש חשיבות. אלגוריתמים אחידים וכתיבה דומה מקלים על התקשורת.
7. ביצוע מוקפד של האלגוריתמים מוליך לתשובה נכונה. קל, יחסית, לאתר אי דיוקים ולתקנם.
8. באמצעות האלגוריתמים מודגמים עקרונות כלליים (למשל עקרון ערך המקום).

נימוקים מרכזיים נגד הוראת האלגוריתמיים הסטנדרטיים:

1. הוראת האלגוריתמים מעודדת את הנטייה להתייחס למתמטיקה כאל מקצוע בו יש לשנן ולקבל, קבלה עיוורת, כללים שנקבעו מראש.
2. הוראה זו גורמת לשימוש יתר באלגוריתמים, גם בפתרון תרגילים שראוי לפתור אותם באופן מיידי (למשל 145+20).
3. למידה טכנית של הצעדים הכלולים באלגוריתמים (ללא הבנתם) עלולה להוליך ליישום לא ראוי שלהם במצבים חדשים.
4. באלגוריתמים הסטנדרטיים של חיבור ושל חיסור הצעד הראשון מתייחס לספרת האחדות והמהלך הוא מימין לשמאל בעוד שכאשר ילדים מחברים או מחסרים מספרים הם נוטים להתחיל את הפעולה מהערכים הגדולים יותר, ומשמאל לימין.
5. ממצאי מחקרים מעידים על דעיכה בנטייה הטבעית של ילדים לחשוב ולנסות להתמודד בעצמם עם בעיות מתמטיות כאשר הם מתבקשים להשתמש באלגוריתמים הסטנדרטיים וזאת גם כאשר הבקשה לשימוש באלגוריתמים הסטנדרטיים באה לאחר הליך בו הם הציעו דרכי פתרון שלהם. התחושה של הילדים היא כי ממילא בסופו של דבר יאמרו לנו מה ואיך לעשות ולכן אין סיבה להתאמץ.
6. חלק מהגישות המוצעות על ידי ילדים לפתרון תרגילים יעילות יותר מהאלגוריתמים הסטנדרטיים (לעתים גישות אלה יעילות יותר באופן כללי, או עבור קבוצת תרגילים, או עבור ילד מסוים).

כיום מקובלות מספר דרכים להתייחסות לסוגיה:

1. הוראת האלגוריתמיים הסטנדרטיים בלבד, וזאת תוך ניסיון להבהרת הצעדים הכלולים בהם.
2. הוראת האלגוריתמיים הסטנדרטיים לאחר שהילדים ממציאים דרכים משלהם. ההוראה נעשית תוך התייחסות ליתרונות האלגוריתמיים הסטנדרטיים.
3. הוראה המתבססת רק על דרכים אותם ממציאים הילדים לפתרון תרגילים (ללא הוראת האלגוריתמיים הסטנדרטיים). בהמשך כל ילד משתמש בדרכים משלו לפתרון תרגילים (בחלק מהמקרים הוא בוחר בדרך אחת אותה הוא מעדיף ובמקרים אחרים הוא פותר בדרכים שונות תרגילים שונים).

הערות והארות לפעילות 4: כיצד מחברים? כיצד מחסרים?

הפעילות מתייחסת להוראת האלגוריתמים הסטנדרטיים של חיבור ושל חיסור. הוראה זו מתרחשת בדרך כלל בכתה ב׳.

משימה 1:

נתייחס לתרגילים:

$$\begin{array}{r} 21 \\ +\ 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 64 \\ +\ 46 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 91 \\ +\ 79 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 56 \\ +\ 27 \end{array}$$

א. נניח שאתה מורה בכתה ב׳. כיצד תלמד זאת?

ב. מה, לדעתך, צריכים תלמידים לדעת כדי שאפשר יהיה ללמדם לפתור תרגילים אלה?

פתרון כל אחד מתרגילי החיבור המוצגים כאן באמצעות האלגוריתם הסטנדרטי מצריך המרה.

נתייחס לדרכים שונות לפתרון התרגילים:

את התרגיל 21+9 אפשר לפתור, למשל, על ידי פתרון התרגיל 21+10 (או 20+9) ולאחר מכן פיצוי בהתאם: 1-(21+10) (או 1+ (20+9)).

באופן דומה אפשר לפתור תרגיל זה באמצעות מעבר לתרגיל שקול לו באופן הבא:

21+9= (21-1)+(9+1)=20+10.

המספרים שבתרגיל החיבור 91+79 מזמנים מעבר לתרגיל עזר: 171= 91+80 והחסרת 1 מהסכום 171-1=170.

או לתרגיל שקול: 91+79=(91-1)+(79+1)=90+80=170.

אפשר להשתמש באסטרטגיות של פרוק (חלקי או מלא) של המספרים המופיעים בתרגיל. למשל, חיבור עשרות לעשרות, אחדות לאחדות ולאחר מכן חיבור התוצאות. אפשר לפתור את התרגיל 56+27 על ידי חיבור 50+20=70 ; 6+7=13 וחיבור התוצאות שהתקבלו 70+13=83. אפשר גם להוסיף את העשרות של המחובר השני למחובר הראשון ולאחר מכן להוסיף את האחדות של המספר השני לתוצאה שהתקבלה: 64+46=(64+40)+6=104+6=110. וכמובן אפשר לחבר את המספרים בדרכים נוספות המשלבות דרכים אלה, כמו למשל: 56+27=(56+20)+4+3.

אנו מציעים לדון, בהתייחסות לאסטרטגיות המוצגות כאן, בשאלה: האם אסטרטגיות אלה יכולות לסייע בהוראת האלגוריתם הסטנדרטי של חיבור? אם כן – כיצד?.

כמו כן, מומלץ להתייחס לכתיבה במאונך של דרכי פתרון אלה:

$$\begin{array}{r} 56 \\ +\ \underline{27} \\ 76 \\ \mathbf{83} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 56 \\ +\ \underline{27} \\ 13 \\ \underline{70} \\ \mathbf{83} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 56 \\ +\ \underline{27} \\ 70 \\ \underline{13} \\ \mathbf{83} \end{array}$$

משימה 2:

נתייחס לתרגילים:

56	91	64	21
-27	-79	-46	- 9

א. נניח שאתה מורה בכתה ב'. כיצד תלמד זאת?

ב. מה, לדעתך, צריכים תלמידים לדעת כדי שאפשר יהיה ללמדם לפתור תרגילים אלה?

בדומה לתרגילי החיבור, פתרון כל אחד מתרגילי החיסור המוצגים כאן באמצעות האלגוריתם הסטנדרטי מצריך פריטה. גם לגבי חיסור אפשר להציג דרכי פתרון (דומות לאלה שהוצגו לגבי פעולת החיבור).

למשל, אפשר לפתור את התרגיל 21-9 על ידי מעבר לתרגיל עזר: 21-10 (או 20-9) ולאחר מכן להוסיף את המספר 1 בהתאם: 1+(21-10) (או 1+(20-9)).

אפשר לפתור תרגיל שקול לתרגיל זה תוך שימוש באינוריאנטיות של פעולת החיסור לגבי חיבור:

21-9= (21+1)-(9+1)=22-10=12;

ובדומה לגבי חיסור: 21-9= (21-1)-(9-1)=20-8=12.

באותו אופן המספרים שבתרגיל החיבור 91-79 מזמנים מעבר לתרגילים:

91-79=(91-80)+1=11+1=12; 91-79=(91+1)-(79+1)=92-80=12;

91-79=(91-1)-(79-1)=90-78=12.

בדומה לחיבור, גם בחיסור, אפשר לפרק, פירוק מלא או חלקי, את המספרים באופנים שונים. למשל, אפשר לחסר את העשרות של המחסר מהמחוסר, ולאחר מכן לחסר את האחדות של המחסר מהתוצאה: 64-46=(64-40)-6=24-6=18.

אפשר גם לשלב דרכים אלה, למשל: 56-27=(56-20)-6-1=36-6-1=30-1=29.

או: 56-27=(50-20)-7+6=30-7+6=23+6=29 (לעיתים לתלמידים לא ברור מדוע הוספנו את ה- 6 ולא חסרנו אותו, שהרי "זהו תרגיל חיסור").

האסטרטגיה של חיסור עשרות מעשרות, אחדות מאחדות ולאחר מכן חיבור התוצאות שמתקבלות, מתאימה לפתרון, כאשר אין צורך בפריטה, למשל: בתרגיל 56-24:

50-20=30; 6-4=2, ותוצאת התרגיל היא: 30+2=32. תלמידים המשתמשים באסטרטגיה זו לעתים שוגים ומחסרים את התוצאות כיוון שהתרגיל הוא תרגיל חיסור (*"בחיבור מחברים ובחיסור מחסרים"*). שימוש באסטרטגיה זו בתרגילים שפתרונם באמצעות האלגוריתם הסטנדרטי מחייב פריטה מביא, בשלבי הביניים, לקבלת מספרים שליליים. למשל, בתרגיל 56-27, מחסרים:

50-20=30; ו- 6-7=(-1), ולאחר מכן יש לחבר את התוצאות שהתקבלו 30+(-1)=29.

האסטרטגיה המפרקת את המחוסר, למשל בתרגיל 56-27, ל- 40+16 תואמת את הפירוק באלגוריתם הסטנדרטי של חיסור במאונך: $56-27=(40+16)-27=(40-20)+(16-7)=20+9=29$ דיון באסטרטגיות אלו, של פרוק המספרים שבתרגיל, יכול להוביל לדיון על דרכים בהן אפשר להורות את האלגוריתם הסטנדרטי של חיסור במאונך.

התייחסות נוספות הקשורות לפעילות זו אפשר למצוא בפעילות 2 בפרק זה.

לא הצגנו כאן את מכלול השיקולים השונים, המתמטיים והדידקטיים, המתייחסים להיבטים פרוצדורליים ולהיבטים מושגיים לגבי הוראת האלגוריתמים הסטנדרטיים של חיבור וחיסור בטור (במאונך). התייחסויות להיבטים אלה מצויות בפעילויות 5-9 בפרק זה.

הערות והארות לפעילות 5: חיסור עם פריטה

פעילות זו מבוססת על ספרה של ליפינג מה (Ma, 1999) בו מתוארים הסברים הניתנים על ידי מורים סיניים והסברים הניתנים על ידי מורים אמריקאיים לבעיות שונות.

בארבעה ההסברים המוצגים בפעילות זו יש ביטוי לשתי התייחסויות להוראת האלגוריתם הסטנדרטי של חיסור במאונך. הסבר 1 והסבר 4 מדגישים את התהליכים הפרוצדוראליים אותם מבצעים באלגוריתם זה. ההתמקדות היא ב"איך" ולא ב"מדוע". הסברים אלה מתייחסים לכך שיש "להלוות" 1 מהעשרות ולהעבירו ל- 10 אחדות, ומנמקים זאת בכך שלא ניתן לחסר מספר גדול ממספר קטן. בהסברים אלה אין התייחסות לכך שבתהליך זה מוצג אותו מספר בהצגה שונה וזאת תוך התבססות על עקרונות המבנה העשרוני.

לעומת זאת, בהסברים 2 ו- 3 רואים חשיבות להבהיר לתלמידים את העקרונות המתמטיים העומדים בבסיס הדרך בה פותרים את התרגילים. כלומר, מדגישים את ה"מדוע" ולא רק את ה"איך". כהרחבה לפעילות זו אפשר להציע לקרוא את מאמרו של ריצ'רד סקמפ (Skemp, 1976) העוסק בהבנה רלציונית (Relational) מול הבנה אינסטרומנטלית (Instrumental). הבנה רלציונית היא הידיעה מה לעשות <u>ומדוע</u> , והבנה אינסטרומנטלית – היא ידיעת ה"מה" ללא הסיבות (כלומר, ידיעת הכללים ויישומן ללא ידיעה מדוע נקבעו כללים אלו).

הסבר 1 מתאר את השלבים בהליך החיסור באופן טכני: אי אפשר לחסר 9 מ- 1 ולכן לווים 10 אחדות מהעשרות. בהסבר זה יש שימוש במושג "לווה". מושג ההלוואה אינו מתאים כאן כי בתהליך הפריטה לא נעשית הלוואה (הלוואה יש להחזיר). יותר מתאים לומר שיש כאן פריטה (או המרה) של עשרת אחת לעשר אחדות. כלומר, חשוב להדגיש שערך המספר לא השתנה.

הסבר 2 מתייחס לאפשרות להצגה אחרת של מספרים הכתובים בשיטה העשרונית. התשובה אינה מתייחסת לפריטה באופן מפורש, אלא מנסה לתת דרך פעולה כללית יותר תוך התייחסות לכך שניתן להציג מספרים באופנים שונים על בסיס המבנה העשרוני. כאן ישנה בעיקר התייחסות לעקרון ערך המקום.

הסבר 3 בדומה להסבר 2, גם הסבר זה מתייחס לחשיבות שיש לכך שהתלמיד ישלוט בפריטה ובהמרה בעת פתרון תרגילי חיסור וכי כאשר פורטים או ממירים ערך המספר לא משתנה. בהסבר זה מודגשת חשיבות הבנת המבנה העשרוני.

הסבר 4 בדומה להסבר 1, נעשה כאן שימוש במושג "לווה" תוך מתן דוגמא של פנייה לחבר או לשכן. יש החולקים על הגישה המסבירה ששתי ספרות המוצגות במספר הן בקשר של "שכנות", משום שהמיקום של הספרות קובע את הערך הכמותי אותו הם מייצגים לפיכך יש להקפיד שבהסבר זה יובהר מפורשות מה מקבלים מה"שכן". כמו כן, השימוש במושג שכנים או חברים בהתייחסות לספרות המרכיבות את המספר, מציג את הספרות שבמספר כשני מספרים בלתי תלויים במקום כשני חלקים של אותו מספר. בנוסף, האמירה: "אי אפשר לחסר מספר גדול מקטן" בעייתית - בהמשך לימודיהם התלמידים יחסרו מספר קטן ממספר גדול (כאשר יכירו את קבוצת המספרים השליליים). בהסבר זה אין התייחסות למבנה העשרוני ולכך שאפשר לפרוט עשרת אחת לעשר אחדות.

הערות והארות לפעילות 6: המחשות

פעילות זו מציגה הסברים של מורים לאלגוריתם הסטנדרטי של פעולת החיסור. המורים עושים בהסברים אלה שימוש באמצעי המחשה. השימוש באמצעי ההמחשה בהסברים השונים נעשה למטרות שונות. השימוש בקוביות נעשה כדי לסייע לתלמידים בחישוב התוצאה (הקוביות הן אמצעי המסייע בחישוב). לעומת זאת, בהסבר השני ובהסבר השלישי השימוש באמצעי המחשה נעשה בעיקר כדי להמחיש רעיון, עיקרון, או תהליך (בהסבר השני – את הרעיון ש"צריך לפרוט" ובהסבר השלישי את העיקרון שבעשרת אחת יש עשר אחדות).

יש חשיבות רבה להגדרת מטרות השימוש באמצעי ההמחשה, להקפדה על התאמת ההמחשה לעקרונות המתמטיים ולתהליכים אותם ממחישים.

בניתוח ההסברים הניתנים על ידי המורים לאלגוריתם הסטנדרטי של פעולת החיסור יש להתייחס להתאמת ההסבר ואמצעי ההמחשה לעקרונות המבנה העשרוני, כיוון שהאלגוריתם מושתת על עקרונות אלה, כלומר על ההתייחסות בהמחשה לרעיון ההקבצה ל-10 , לעקרון ערך המקום, לאפס כ"שומר מקום", ולהמרה ולפריטה.

הסבר 1: אתחיל במספר תרגילי חיסור, למשל, 38-51. אשתמש ב 51 קוביות קטנות ואומר להם לשים בחבילה אחת, בצד, 38 קוביות קטנות. אחר כך אבקש אותם לספור כמה קוביות קטנות נשארו ואומר שזו התוצאה. הקוביות יעזרו להם לספור ולראות כמה היה בהתחלה, כמה צריך לחסר ומה נשאר.

בהסבר זה נעשה שימוש באמצעי המחשה כאמצעי למניה. אין בהסבר זה התייחסות אל האלגוריתם הסטנדרטי של פעולת החיסור.

אפשר, כמובן, להשתמש בקוביות לצורך המחשת רעיון ההקבצה ל- 10 ולהמחשת ההמרה והפריטה. אפשר לארוז כל 10 קוביות במארז כלשהו (שקית או קופסא – עדיף בקופסא המכילה בדיוק 10 קוביות). כך מקבצים את הקוביות בקבוצות של 10 כשכל קבוצה (קופסא) מכילה 10 קוביות בודדות. בשלב זה אפשר לייצג את המספר 51 באמצעות 5 קופסאות ועוד קוביה אחת בודדת. כעת יש להפחית מ 51 הקוביות 38 קוביות, ולבדוק כמה קוביות נשארות. כלומר, יש לחסר 8 קוביות בודדות ו 3 קופסאות. מכיוון שיש לנו, בייצוג המספר 51 רק קובייה בודדת אחת ועלינו לחסר 8 קוביות בודדות, נפתח את אחת הקופסאות של 10 הקוביות ויהיו לנו 11 קוביות בודדות ו-4 קופסאות. כלומר ייצגנו את המספר 51 על ידי 11 קוביות בודדות ו- 4 קופסאות. מ- 11 הקוביות הבודדות נוריד 8 קוביות. נשארות 3 קוביות בודדות. מ- 4 הקופסאות נוריד 3 קופסאות ותישאר קופסא אחת. נשארה קופסא אחת (המכילה 10 קוביות) ו 3 קוביות בודדות, כלומר התוצאה היא 13.

אפשר להמשיך את ההקבצה המתוארת כאן שוב ושוב. אפשר לארוז כל עשר קופסאות (המכילות 10 קוביות קטנות) בקופסא גדולה יותר (או במארז אחר) וכך הלאה, ובכך להמחיש את אלגוריתם החיסור (והחיבור) במספרים תלת ספרתיים, ארבע ספרתיים וכו'.

הסבר 2: כדאי להשתמש במטבעות כסף כדי להמחיש את האלגוריתם הסטנדרטי של החיסור. שימוש במטבעות הוא טוב כי ילדים אוהבים להתייחס לכסף והם מכירים את המטבעות. למשל, לגבי התרגיל 51-38, כדאי לקחת מטבע של חצי שקל ומטבע של אגורה, לפרוט את חצי השקל לאגורות ולחסר 38 אגורות. כך הילד יבין שבתרגיל חיסור כזה צריך לפרוט.

בהסבר זה, בשונה מההסבר הקודם, יש התייחסות לרעיון ההקבצה: נעשה כאן שימוש בשני סוגים של מטבעות: מטבע שערכה אגורה אחת ומטבע אחרת שערכה גדול יותר (מטבע של חצי שקל, כלומר של 50 אגורות). עם זאת, המחשה זו היא בעייתית כיוון שההתייחסות למטבע של חמישים אגורות אינה תואמת את המבנה העשרוני ואת האלגוריתם הסטנדרטי של החיסור בו הפריטה וההמרה היא של יחידות בערך 10. במודל זה אין התאמה בין גודל המטבע לבין הערך שהוא מייצג (מטבע של 50 אגורות אינה גדולה במימדיה פי 50 ממטבע של אגורה, והמטבע של שקל אחד קטנה במימדיה ממטבע של חמישים אגורות).

יש, אמנם, יתרון בשימוש במטבעות מכיוון שילדים רבים אוהבים את ההתייחסות לכספים, אך המטבעות בהן משתמשים אינן תואמות באופן מלא את המבנה העשרוני. יתכן שאפשר להתייחס לצורך זה לשקלים בודדים, עשרה שקלים, מאה שקלים וכך הלאה ולהתעלם ממטבעות קימות שאינן תואמות את המבנה העשרוני.

הסבר 3: אני אשתמש בחבילות של קיסמים הקשורים בגומיות. בכל חבילה עשרה קיסמים. כך אראה את הרעיון של עשרות והערך שלהן לעומת אחדות. למשל אם התרגיל הוא 51-38, אקח 5 חבילות ועוד קיסם אחד. אני אראה להם כיצד אני מפרק את חמש החבילות לחמישים קיסמים ומחסיר מהם 38 קיסמים. אחר כך אספור כמה קיסמים נשארו.

בהסבר זה מוצג רעיון ההקבצה באמצעות קיסמים וחבילות קיסמים הקשורות על ידי גומיות (10 קיסמים בכל קבוצה). התלמיד רואה את ההקבצה (חבילות של 10 קיסמים) וגם את הבודדים המרכיבים את ההקבצה (קיסמים). החיסרון בהסבר זה הוא באופן הצגת תהליך הפריטה (פרוק כל חמשת החבילות של הקיסמים ל- 50 קיסמים בודדים). הפירוק המוצג אינו תואם את תהליך הפריטה באלגוריתם הסטנדרטי של החיסור. אפשר לשפר הסבר זה על ידי פרוק חבילה אחת של קיסמים ל- 10 קיסמים בודדים, להציג את המספר 51 על ידי 4 חבילות כשבכל חבילה 10 קיסמים ו- 11 קיסמים בודדים ולהמשיך בתהליך (באופן דומה לזה המתואר בהסבר 1).

בהסברים המוצגים כאן לא נעשה ניסיון להמחשת עקרון ערך המקום, כלומר אין בהמחשות אלה התייחסות לרעיון שמיקום הספרה במספר קובע את ערכה. כדאי לדון באמצעי המחשה מקובלים שונים תוך התייחסות לעקרונות אותם ניתן להמחיש (או לא ניתן להמחיש) באמצעותם. חשוב להתייחס לתהליכי התפתחות הבנת המושגים השונים הקשורים באלגוריתם ולהתאמת אמצעי המחשה שונים לשלבים אלה.

הערות והארות לפעילות 7: הצגת מספרים באמצעות מספרים אחרים

בפעילות זו מוצגות ארבע דרכים בהם תלמידים הציגו את המספרים הנתונים בתרגיל 53-26 באופנים שונים אשר סייעו להם בפתרונו.

התרגיל המוצג בפעילות זו הוא תרגיל חיסור, בו המחוסר והמחסר קטנים מ- 100. פתרון תרגיל זה באמצעות האלגוריתם הסטנדרטי של חיסור מחייב פריטה. הדגש בפעילות הוא על הצגת המספר באופנים שונים המתאימים לתהליך החיסור. התייחסויות נוספות המתקשרות לפעילות זו ניתן למצוא בפעילות 4 בפרק זה.

דרך 1: "ארשום במקום 53 שני מספרים: 40 ו- 13. עכשיו אני יכול לחסר 6 מ- 13 ו- 20 מ- 40 ולקבל שני מספרים 7 ו- 20 שסכומם 27".

דרך 1 היא הדומה ביותר לזו בה משתמשים באלגוריתם הסטנדרטי של חיסור. המחוסר פורק לשני מספרים ובהתאם לכך מבצעים שתי פעולות חיסור ומחברים את התוצאות. זהו ניסוח לא פורמלי של האלגוריתם המקובל.

ברישום מתמטי: 53=40+13 ; 26=20+6 (פירוק המחסר והמחוסר) ⇐ 13-6=7 ; 40-20=20 (פתרון תרגילי החיסור המתאימים) ⇐ תוצאת התרגיל הנתון היא: 20+7=27 (חיבור ההפרשים שהתקבלו).

אפשר לדון בצורת הכתיבה של דרך פתרון זו כאשר מציגים את התרגיל בטור (במאונך):

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 4\ \ 10} \\ 5\ 3 \\ -\ \underline{2\ 6} \end{array} \qquad \text{או} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 4\ \ 13} \\ 5\ \ 3 \\ -\ \underline{2\ \ 6} \end{array}$$

דרך 2: "ארשום במקום 53 שלשה מספרים: 40, 10 ו- 3. עכשיו אני יכול לחסר 6 מ- 10, לחסר 20 מ- 40 ובסוף לסכם את מה שנשאר: 3 , 4, 20 שסכומם 27".

בדרך 2 הפרוק של המחוסר מפורט יותר מאשר בדרך 1, גם כאן מתבצעים שני חיסורים אך בסיום ההליך מחברים שלשה מספרים. דרך זו דומה לדרך 1 בה ממירים עשרת אחת (של המחוסר) ל- 10 אחדות, אך בשונה מדרך 1, בדרך זו לא מצרפים את עשר האחדות האלה לשלוש האחדות שבמספר 53. ההקלה היא בכך שלתלמידים קל יותר לחסר 6 מ- 10 מאשר 6 מ- 13 (ההרכבים של המספר 10 מוכרים היטב לתלמידים בעיקר בשיטות הוראה בהן מושם דגש על "תחנה 10").

ברישום מתמטי: 53=40+10+3 ; 26=20+6 (פירוק המחסר והמחוסר) ⇐ 10-6=4 ; 40-20=20 ; 3 פתרון תרגילי החיסור המתאימים) ⇐ תוצאת התרגיל הנתון היא: 20+4+3=27 (חיבור ההפרשים שהתקבלו).

דרך 3: "ארשום במקום 53 שני מספרים: 43 ו- 10. עכשיו אני יכול לחסר 6 מ- 10, ולחסר 20 מ- 43 ובסוף לסכם את מה שנשאר: 4, 23 שסכומם 27".

בדרך 3 הפרוק של המחוסר הוא לשני מספרים, בדומה לדרך 1, אך בשונה מדרך 1 (בדומה לדרך 2) בפרוק זה עשרת אחת מיוצגת באמצעות 10 אחדות והתלמידים מחסרים 6 מ- 10.

ברישום מתמטי: 53=43+10 ; 26=20+6 (פירוק המחסר והמחוסר) ⇐ 10-6=4 ; 43-20=23 ; פתרון תרגילי החיסור המתאימים) ⇐ תוצאת התרגיל הנתון היא: 23+4=27 (חיבור ההפרשים שהתקבלו).

דרך 4: ארשום במקום 26 שלשה מספרים: 3, 3 ו- 20. אחסר 3 מ 53 ואקבל 50, אחסר עוד 3 מ- 50 ואקבל 47 ועכשיו אחסר 20 מ- 47 ואקבל 27".

בדרך 4 המחסר פורק למספר נוח יותר לחיסור וזאת כדי להימנע מהצורך בפריטה של המחוסר. בדרך זו התלמיד בונה את המחסר ממספרים קטנים יותר הרלוונטיים לתרגיל שסכומם שווה למחסר עצמו, ומחסר מספרים אלו מהמחוסר:

ברישום מתמטי: 26=20+3+3 (פירוק המחסר) ⇐ 53-3-3-20=27 ; (פתרון תרגילי החיסור המתאים)

בשלוש הדרכים הראשונות התלמידים החלו בפירוק המחוסר (באופן שהקל על החישוב), ביצעו תרגילי חיסור מתאימים ולאחר מכן חיברו את ההפרשים שהתקבלו כדי לקבל את תוצאת התרגיל אותו התבקשו לפתור.

לעומת זאת, בדרך 4, בפתרון נעשה שימוש רק בתרגילי חיסור.

לתלמידים קשה, לעתים, לזכור או לבנות את עובדות היסוד בחיבור ובחיסור לגבי המספרים 1-9. אפשר להקל עליהם באמצעות שימוש בדרכים 2 ו 3 (בדרכים אלה אפשר להסתפק בהכרת הרכבי המספרים עד ל 10). כלומר, בדרכים אלה הם אינם נדרשים לחיסור בו המחוסר הוא מספר מהעשרת השנייה (חיסור העשרות השלמות 40-20 מתבצע בדומה לחיסור 4-2). תלמידים אחרים מעדיפים את דרך 4 כיוון שבדרך זו הם מתייחסים למחוסר בלבד ומחסרים בלבד.

הצעות לדרכי חיסור אחרות אפשר למצוא אצל תירוש (תשנ"ז). הפעילויות שם מתייחסות לאלגוריתמים לא סטנדרטיים לביצוע פעולות חשבון, ולשגיאות אופייניות של תלמידים בפתרון תרגילי חיבור ותרגילי חיסור.

הערות והארות לפעילות 8: חיסור מספרים הקטנים מ 100

זוהי פעילות המשך לפעילות 7. השוני הוא בכך שבפעילות זו המחסר הוא מספר חד ספרתי ואילו בפעילות הקודמת המחסר היה מספר דו ספרתי. מכך נגזרות דרכי פתרון שונות ודומות לאלה שהוצעו בפעילות הקודמת.

תלמיד 1: "בתרגיל 34-6, 4 באחדות אינו מספיק לחיסור אבל אני יכול לחסר 4, אז נשאר לי להוריד עוד 2 כי 2+4=6. אז אני מוריד את ה- 2 מה 30 ומקבל 28.

דרך הפתרון של תלמיד זה דומה לדרך ד' בפעילות הקודמת. תלמיד זה פירק את המחסר 6 (לארבע בהתאם למספר האחדות הבודדות במחוסר ולשתים). פירוק זה מאפשר פתרון באמצעות חיסור בלבד, כלומר: 28 = 30-2 = 34-4-2 = 34-6

תלמיד 2: תלמיד זה השתמש בחבילות של קיסמים, כאשר בכל חבילה היו 10 קיסמים, ואמר: "ראיתי שאין לי מספיק קיסמים בודדים כדי להחסיר מהם 6 קיסמים, פרקתי קבוצה של קיסמים וקיבלתי עשרה קיסמים בודדים. הורדתי מהם 6. נשארו לי 4 שצרפתי אותם ל- 4 הקיסמים הבודדים שכבר היו לי, וקיבלתי 8. נשארו לי 20 קיסמים בשתי חבילות של עשר (שלא פרקתי). אז קבלתי 28".

תלמיד זה משתמש במודל הקיסמים. דרך זו דומה לדרך הפתרון 2 בפעילות הקודמת, אלא שבפעילות הקודמת לא נעשה שימוש באמצעי המחשה (קיסמים). בפעילות הנוכחית התלמיד נעזר באמצעי המחשה. הוא פרק את המחוסר, 34, לשלושה מחוברים 4, 10, 20 (היו לו 3 חבילות של 10 קיסמים. הוא השאיר 2 חבילות כפי שהן ופרק חבילה אחת). בשלב זה הוא חיסר 6 קיסמים מ- 10 הקיסמים בחבילה אותה פרק, והוסיף את 4 הקיסמים שנותרו ל- 4 הקיסמים שהיו לו. נותרו לו גם שתי חבילות (שבכל אחת מהן 10 קיסמים). כלומר, נותרו לו 28 קיסמים. ברישום מתמטי:

28 = 20+4+4 = 20+ (10-6)+4 =20+10-6+4= 20+10+4-6= (20+10+4)-6 = 34-6

ישנם תלמידים שיפתרו תרגיל זה באופן דומה לדרך הפתרון של תלמיד ב', אך כאשר הם יפרקו חבילה של קיסמים ל- 10 קיסמים בודדים הם יצרפו אותם ל- 4 הקיסמים הבודדים. יתקבלו 14 קיסמים ומהם הם יחסרו 6 ויישארו להם 8. בנוסף יש להם עוד 2 חבילות כשבכל אחת 10 קיסמים, ולכן התוצאה היא 28. תלמידים אלה פותרים באופן המקובל באלגוריתם הסטנדרטי של חיסור, כלומר: 28=(14-6)+20 = 20+14)-6) =34-6.

תלמידים אחרים יחסרו תחילה את 4 הקיסמים הבודדים, יציינו שעליהם לחסר עוד 2 ולכן יפרקו חבילה אחת ויקבלו 10 קיסמים, מהם הם יורידו 2 ויישארו להם 8 בודדים ו- 2 חבילות. כלומר, 28 קיסמים. הרישום המתמטי המתאים הוא:

28=20+8=20+(10-2)= 2-(20+10)=30-2=34-4-2=34-6.

תלמידים יכולים להיעזר בקיסמים בדרכים שונות שחלקן תואמות במדויק את הצעדים באלגוריתם הסטנדרטי וחלקן לא. גם כאן יש להבחין בין שימוש באמצעי המחשה לצורך חישוב (בו אין הקפדה על התייחסות למבנה העשרוני) לבין שימוש באמצעי המחשה כדרך להדגמת רעיונות מתמטיים (במקרה זה, המבנה העשרוני). התייחסות לכך נמצאת בפעילות 6 בפרק זה.

תלמיד 3: אני זוכר בעל פה ש- 6-14 זה 8, ש- 7-14 זה 7, ש- 8-14 זה 6 ו- 9-14 זה 5. בתרגיל הזה אני משתמש ב 6-14 שזה 8. במקום 34 אני רושם 20 ו- 14. 6-14 זה 8, 20 ועוד 8 זה 28".

תלמיד זה נעזר בשליפה אוטומטית של עובדות יסוד בחיסור. הוא פירק את 34 ל- 20 ול 14 ושלף את המידע לפיו 14-6=8. השליטה האוטומטית הקלה בחישוב. אפשר להתייחס בהקשר זה ליתרונות שיש לשליפה אוטומטית של עובדות היסוד.

כפי שציינו, פעילויות 7 ו 8 דומות זו לזו. מורי המורים יקבעו אם להשתמש באחת מהן ואם כך באיזו, או בשתיהן (אפשר להשתמש בפעילויות באופן צמוד או בנפרד).

הערות והארות לפעילות 9: מדוע מתחילים מחיסור האחדות? סיפורה של מורה

תהליך החישוב ב"חיסור במאונך" (מימין לשמאל) מאפשר לרשום את ההפרש באופן שיטתי החל מספרת האחדות, המשך בעשרות, מאות וכך הלאה ללא צורך בשינוי ברישום הספרות בהפרש במהלך החישוב.

ראינו בתיאור האירוע שהתרחש בכיתה שאם מתחילים את החישוב משמאל עלול להיווצר מצב בו יש לעדכן את הרישום בשל הצורך בפריטה. במקרים בהם מחסרים מספרים תלת ספרתיים ומספרים גדולים יותר, עלולים העדכונים הרבים לגרום לשגיאות חישוב ולשגיאות רישום וכתוצאה מכך לתוצאה שגויה.

הטכניקה של חישוב מימין לשמאל חיונית בחיסור מספרים גדולים ולכן עדיף לנסות ולשכנע בחיוניותה תוך התייחסות למספרים גדולים ולא בדוגמאות בהן ההתייחסות היא למספרים דו ספרתיים.

אם ברצון המורה להשתדל למנוע יצירת קונפליקט בכיתה בין דרך החישוב מימין לשמאל לבין תהליך החישוב באמצעות המחשות משמאל לימין אפשר להציג את ההמחשות באופן שצורת החישוב באמצעותן תהיה מימין לשמאל, בשונה מהדרך שהציגה המורה ליאן.

אפשר, למשל, להמחיש את המספרים השונים באמצעות קיסמים (קיסמים בודדים, חבילות של 10 קיסמים, 10 חבילות של 10 קיסמים וכולי), להציג את המחוסר ואת המחסר באמצעות הקיסמים ולבצע פעולות מקדימות של פריטה עוד לפני שמתחילים בתהליך החיסור. אם הפעולות המקדימות לפני החיסור תצלחנה, אפשר יהיה לבצע את תהליך החיסור באמצעות המחשה כאשר החישוב נעשה מימין לשמאל (בדומה להליך החישוב באלגוריתם הסטנדרטי של החיסור).

[חזרה]

בעיות "מצביות" ותרגילים "מולבשים": האם לאלה וגם לאלה מקום בהוראת מתמטיקה?

הפעילויות בפרק זה מתבססות על חוברת העוסקת ביצירת מודלים מתמטיים של המציאות בכיתות מתמטיות, שפורסמה בכתב העת "Learning and Instruction" (Greer, 1997).

בתחילת החוברת מסופר על בעיה שהוצגה לתלמידים במחקרים בצרפת (Reusser,1988):

לרועה צאן יש עדר ובו 125 כבשים ו- 5 כלבים. מה גילו של הרועה?

במאמרים אלה מדווח כי מרבית התלמידים שהשתתפו במחקר השיבו כי הרועה בן 25 והסבירו: 125+5=130 מספר גדול מידי, זה לא הגיוני; 125-5=120 גם לא הגיוני; 125:5=25 אהה, זה בסדר. אני חושב שהרועה הוא בן 25.

תופעה זו, של ניסיון למצוא את הפעולה המתאימה ביותר מתוך ארבע פעולות חשבון ולקבוע, בהתאם לכך, את התשובה לבעיה תוך התעלמות מהתוכן אינה ייחודית לתלמידים בצרפת.
דוגמא ידועה אחרת, מתוך מחקר רחב היקף שנערך בארה"ב ובחן ידע תלמידים בני 13, היא:

בצבא משתמשים באוטובוסים המכילים 36 חיילים. צריך להעביר 1128 חיילים מהבסיס לאתר האימונים. לכמה אוטובוסים נזקקים?

70% מהתלמידים חישבו נכון את תרגיל החילוק, וקבלו 31 ושארית 12. אך רק 23% מהתלמידים קבעו שיש להשתמש ב 32 אוטובוסים. 19% טענו שיש צורך ב 31 אוטובוסים, ו- 29% ענו: יזדקקו ל 31 ושארית 12 אוטובוסים.

באופן דומה, אחוז התלמידים באירלנד הצפונית (בגילאי 10-14), בבלגיה (גילאי 10-11), ובשוויץ (גילאי 10-12) שהתייחסו באופן כלשהו למגבלות מציאותיות המשתמעות מתוך המצב המתואר בבעיות היה קטן ביותר. במחקרים דומים שנערכו במדינות נוספות, ובכללן יפן, התקבלו ממצאים דומים.
הטענה היא שהתלמידים מחפשים את הפעולה שנראית מתאימה ביותר לפתרון בעיה מסוימת לפי "מלים מרמזות". למשל, המילים: "יותר", "ועוד" מרמזות על חיבור המספרים המופיעים בבעיה (Nesher, 1980). בעיות המוצגות בדרך כלל לתלמידים, הן בעיות שהן "תרגילים מולבשים", והנורמות המקובלות קובעות כי יש להתעלם מהתכנים. למשל, ילדים המתבקשים לחבר בעיה שתתאים לתרגיל 2000+3000 ירגישו בנוח להציע בעיה בנוסח הבא: "אבא בן 2000 ואימא בת 3000. מה סכום הגילאים שלהם?", וזאת למרות שידוע להם שגילו של אדם לא יכול להיות 2000.

סיבה אפשרית נוספת לנתינת תשובות שאינן מתייחסות לתכני הבעיות היא ההשפעה שיש למודלים האינטואיטיביים של הפעולות. בהקשר זה, מומלץ לקרוא את מאמרם של פישביין, דרי, נלו ומרינו (Fischbein, Deri, Nello & Marino, 1985) המתייחס למודלים אינטואיטיביים של הפעולות הבסיסיות ולהשפעתם על פתרון בעיות.

נתייחס למשל לבעיה הלקוחה מספרם של דיוויס והרש (Davis & Hersh, 1981):

מזגנו לקערה כוס חלב והוספנו כוס פופקורן. כמה כוסות תערובת (חלב ופופקורן) קבלנו?

תשובה שגויה שכיחה לבעיה זו היא: "2, כוס ועוד כוס זה 1+1". הסבר אפשרי לתשובה זו, הניתן מתוך התייחסות למודל האינטואיטיבי של חיבור כצירוף קבוצות זרות, הוא כי בבעיה זו מצרפים שתי קבוצות זרות: כוס אחת של חלב וכוס אחת של פופקורן. התחושה היא שהתוצאה היא שתיים.

באופן דומה, בבעיה:

אם תזמורת אחת מנגנת סימפוניה מסוימת בשעה, בכמה זמן תנגנה שתי תזמורות את אותה סימפוניה?

תשובה אופיינית שגויה של תלמידים היא: חצי שעה וזאת כיוון שמבנה השאלה יוצר אשליה של פרופורציה.

ההתייחסות ל"מידול המציאות" בהקשר לבעיות מילוליות מורכבת מאד. דוגמה למורכבות זו ניתנת על ידי פרוידנטל (Freudenthal, 199l) .

למר סמית הקצב יש בחנות 26 ק"ג בשר, הוא מזמין 10 ק"ג נוספים של בשר. כמה ק"ג בשר יש לו כעת?

פרוידנטל טוען "התשובה 36 אינה הגיונית. הקצב הזמין בשר, אך ההזמנה לא מגיעה מיד לחנות. כאשר ההזמנה תגיע הוא כבר ימכור חלק מ- 26 הק"ג שיש לו בחנות... בעצם בגלל זה הקצב הזמין עוד בשר..."

בהקשר זה יש להתייחס גם לדיווח של דיוויס (Davis, 1989) לפיו, כאשר לזוגות תלמידים בכתה נתנו בלונים, והם התבקשו לחלקם שווה בשווה ביניהם, זוג שקבל חמישה בלונים החליט לחתוך את הבלון החמישי לשנים.

מומלץ להתייחס בהקשר זה למושג "החוזה הדידקטי" המקובל בכתה. כלומר, לנורמות ולהנחות הסמויות והגלויות לגבי "כללי המשחק" ולגבי הציפיות ההדדיות של המורים ושל התלמידים.

למשל, תלמידים בני 13-14 בצפון אירלנד נשאלו:

בחנות נמכרו בחודש ינואר 32 מטריות. כמה מטריות נמכרו בחנות זו בחדשים יוני, יולי ואוגוסט באותה שנה?

התלמידים השיבו : 32 בכל חודש. כאשר התבקשו להתייחס לתשובתם, הסבר שכיח היה: "אני יודע שבחדשים אלה לא קונים מטריות, אבל זאת בעיה בחשבון, וחשבון אינו על דברים כאלה. בחשבון מחשבים ולא חושבים על דברים חיצוניים כאלה".

בחוברת העוסקת ביצירת מודלים מתמטיים של המציאות בכיתות מתמטיות אותה הזכרנו בראשית פרק זה מודגשת החשיבות של התייחסות ממשית לבעיות מילוליות בהוראת מתמטיקה בבתי ספר. יש התייחסות בחוברת זו לחשיבות שיש לניסיון לפתח אצל תלמידים כבר מגיל צעיר את המודעות לכך שהמתמטיקה היא כלי יעיל לייצוג המציאות.

המאמרים בחוברת קוראים לפיתוח גישה, אותה הם מכנים "מידול המציאות" (Modelling Reality), בבתי הספר ומתארים את היתרונות בגישה זו:

1. גישה זו מאתגרת את הדפוס המקובל לפיו אפשר להצליח בפתרון בעיות מילוליות באמצעיים מלאכותיים (כמו שימוש במלים המרמזות על הפעולה). בגישת מידול המציאות מוצגים לתלמידים, מתחילת ההוראה, מצבים שייצוגם המתמטי הוא באמצעות פעולה אחת בסיסית, מצבים בהם פעולה זו נותנת אומדן סביר לפתרון, ומצבים בהם שימוש בפעולת חשבון עליה מרומז, כביכול, בבעיה אינו מתאים לחלוטין לייצוג הבעיה.

2. השיחה שתיסוב סביב בעיות אלה יכולה לסייע בפיתוח היכולות הנדרשות לצורך פתרון בעיות (בעיקר בקרה).

3. גישה זו מחזקת את הקשר בין המתמטיקה הבית ספרית לבין המתמטיקה היום יומית, קשר שהוא, במרבית המקרים, רופף מדי.

4. תרומה משמעותית ביותר של הכלים המתמטיים לחברה היא בהצגת מצבים מציאותיים באמצעים כמותיים. חשוב לפתח יכולות וגישה זו מגיל צעיר.

5. לאזרח בימינו חשוב להכיר ולהעריך את העוצמה של המודלים המתמטיים ככלים לייצוג המציאות (דוגמאות בולטות הן השימוש בסטטיסטיקה ובהסתברות). התייחסות למידול המציאות מגיל צעיר תבנה ותטפח את ההכרה בחשיבותם של כלים אלה.

בחוברת עליה מתבססות הפעילויות בפרק זה, מוצגות הצעות לשינוי דעות רווחות אצל תלמידים לגבי בעיות מתמטיות, הרואות בבעיות תרגילים מולבשים מנותקים מהמציאות שמטרת העיסוק בהן היא תרגול החומר הנלמד. בחוברת מוצע להציג בעיות שהנתונים בהן אינם מספיקים לפתרונן, להציג בעיות המכילות נתונים עודפים, להרבות במתן בעיות רב שלביות, לבקש מתלמידים לקבוע אמדן ולא תשובה מדויקת, ולבקש מתלמידים לתאר מצב התואם תרגיל (לחבר בעיה לתרגיל). בנוסף, יש בחוברת דיווח על תשובות של סטודנטים להוראה, במחקר שנערך בבלגיה, לבעיות מקובלות ולבעיות בהן יש מקום להתייחסות להיבטים מציאותיים, ודיווחים על עמדות הסטודנטים להוראה לגבי שני סוגי הבעיות. כמו כן, מוצגות בחוברת התערבויות שונות שמטרתן לעורר את מודעות התלמידים לחשיבות שיש להתייחסות להיבטים מציאותיים של בעיות מילוליות, ומתוארת מידת ההצלחה של התערבויות אלה.

הפעילויות שהצגנו בפרק זה פותחו תוך התייחסות למאמרים בחוברת ולספרם של ורשפל, גרייר ודה-קורט (Verschaffel, Greer, De Corte, 2000).

פעילות 1: כיצד פותרים? (1)

פתרו את הבעיות (רשמו בעמודה הימנית של הטבלה את הפתרון של כל אחת מהבעיות ובעמודה השמאלית, הערות והצעות במידה ויש כאלה).

מ1. לקרול 5 חברים ולג׳ורג 6 חברים. קרול וג׳ורג החליטו לערוך ביחד את מסיבת יום הולדתם. הם הזמינו למסיבה את כל חבריהם וכולם הגיעו למסיבה. כמה חברים השתתפו במסיבה שלהם?

מ2. סטיב קנה 4 קורות עץ באורך 2.5 מטר כל אחד. כמה קורות עץ באורך 1 מטר הוא יוכל לנסר מהקורות שקנה?

מ3. מה תהיה טמפרטורת המים במיכל ששופכים לתוכו 1 ליטר מים בטמפרטורה של 80 מעלות ו- 1 ליטר מים בטמפרטורה של 40 מעלות?

מ4. 450 אוהדי קבוצת כדורסל נוסעים למשחק. לשם כך יש להזמין אוטובוסים. כל אוטובוס יכול להכיל 36 אוהדים. כמה אוטובוסים יש להזמין?

מ5. השיא של ג׳ון בריצת 100 מטר הוא 17 שניות. בכמה זמן ג׳ון ירוץ 1 ק״מ?

מ6. ברוך ועליזה לומדים באותו בית ספר. ברוך גר במרחק 17 ק״מ מבית הספר, ועליזה גרה במרחק 8 ק״מ מבית ספר. מהו המרחק בין ביתו של ברוך לבין ביתה של עליזה?

מ7. סבא נתן לארבעת נכדיו קופסה ובה 18 בלונים. הם רצו לחלק את הבלונים שווה בשווה בין ארבעתם. כמה בלונים יקבל כל אחד מהם?

מ8. ראובן נולד ב- 1987. כעת השנה היא 2004. בן כמה ראובן?

מ9. אדם רוצה למתוח חבל בין שני עמודים שהמרחק ביניהם הוא 12 מטר. יש לו רק רצועות חבלים שאורך כל רצועה 1.5 מטרים. כמה רצועות כאלו יצטרך לחבר כדי למתוח חבל בין שני העמודים?

מ10. ברז ממלא בקבוק בקצב קבוע. אם ידוע כי כעבור 10 שניות גובה המים היה 4 ס״מ, מה יהיה גובה המים כעבור 30 שניות?

בעיה	פתרון	הערות
מ1		
מ2		
מ3		
מ4		
מ5		
מ6		
מ7		
מ8		
מ9		
מ10		

פעילות 2: כיצד פותרים? (2)

פתרו את הבעיות (רשמו בעמודה הימנית של הטבלה את הפתרון של כל אחת מהבעיות ובעמודה השמאלית – הערות והצעות במידה ויש כאלה).

ר1. פיטר מארגן מסיבה לכבוד יום הולדתו העשירי. הוא הזמין 8 בנים ו 4 בנות. כמה חברים (בנים ובנות) הזמין פיטר למסיבה?

ר2. סטיב קנה 5 קורות מעץ באורך 2 מטר כל אחד. כמה קורות עץ באורך 1 מטר הוא יוכל לנסר מהקורות שקנה?

ר3. למוכר 2 ארגזי תפוחים. בארגז אחד 60 תפוחים ובארגז השני 90 תפוחים. המוכר העביר את התפוחים משני הארגזים לארגז אחד גדול. כמה תפוחים יש כעת בארגז הגדול?

ר4. פיטר חסך 690 שקלים. הוא קנה בכל חסכונותיו 20 מכוניות צעצוע זהות. מהו המחיר של מכונית אחת?

ר5. סירה שטה במהירות קבועה של 45 קמ"ש. בכמה זמן תעבור הסירה מרחק של 180 ק"מ?

ר6. ביום ראשון כריס צעד פעמיים: בבוקר 8 ק"מ ואחר הצהרים 15 ק"מ. כמה ק"מ צעד כריס ביום ראשון?

ר7. תום, קטי, חנה ומיכאל קבלו מסבא שלהם 14 חפיסות שוקולד. כמה חבילות שוקולד יקבל כל אחד מהם אם הם מחלקים את השוקולד שווה בשווה ביניהם?

ר8. בבוקר סטיב הוסיף לקופת החיסכון שלו 480 שקלים. לאחר ההוספה, יש בקופה 1650 שקלים. כמה כסף היה בקופה לפני ההוספה?

ר9. אדם גזר חבל באורך 12 מטר לחתיכות באורך 1.5 מטר. כמה חתיכות קיבל?

ר10. ברז ממלא בקבוק ריק בצורת תיבה בקצב קבוע. אם ידוע כי כעבור 10 שניות גובה המים היה 4 ס"מ, מה יהיה גובה המים כעבור 30 שניות?

בעיה	פתרון	הערות
ר1		
ר2		
ר3		
ר4		
ר5		
ר6		
ר7		
ר8		
ר9		
ר10		

פעילות 3: כיצד תלמידים פותרים?

רשמו בעמודה הימנית של הטבלה פתרונות נכונים של תלמידים (בכתה ה׳) לכל בעיה, ובעמודה השמאלית פתרונות שגויים של תלמידים (בכתה ה׳) לכל בעיה.

מ1. לקרול 5 חברים ולג׳ורג 6 חברים. קרול וג׳ורג החליטו לערוך ביחד את מסיבת יום הולדתם. הם הזמינו למסיבה את כל חבריהם וכולם הגיעו למסיבה. כמה חברים השתתפו במסיבה שלהם?

מ2. סטיב קנה 4 קורות עץ באורך 2.5 מטר כל אחד. כמה קורות עץ באורך 1 מטר הוא יוכל לנסר מהקורות שקנה?

מ3. מה תהיה טמפרטורת המים במיכל ששופכים לתוכו 1 ליטר מים בטמפרטורה של 80 מעלות ו- 1 ליטר מים בטמפרטורה של 40 מעלות?

מ4. 450 אוהדי קבוצת כדורסל נוסעים למשחק. לשם כך יש להזמין אוטובוסים. כל אוטובוס יכול להכיל 36 אוהדים. כמה אוטובוסים יש להזמין?

מ5. השיא של ג׳ון בריצת 100 מטר הוא 17 שניות. בכמה זמן ג׳ון ירוץ 1 ק״מ?

מ6. ברוך ועליזה לומדים באותו בית ספר. ברוך גר במרחק 17 ק״מ מבית הספר, ועליזה גרה במרחק 8 ק״מ מבית ספר. מהו המרחק בין ביתו של ברוך לבין ביתה של עליזה?

מ7. סבא נתן לארבעת נכדיו קופסה ובה 18 בלונים. הם רצו לחלק את הבלונים שווה בשווה בין ארבעתם. כמה בלונים יקבל כל אחד מהם?

מ8. ראובן נולד ב- 1987. כעת השנה היא 2004. בן כמה ראובן?

מ9. אדם רוצה למתוח חבל בין שני עמודים שהמרחק ביניהם הוא 12 מטר. יש לו רק רצועות חבלים שאורך כל רצועה 1.5 מטרים. כמה רצועות כאלו יצטרך לחבר כדי למתוח חבל בין שני העמודים?

מ10. ברז ממלא בקבוק בקצב קבוע. אם ידוע כי כעבור 10 שניות גובה המים היה 4 ס״מ, מה יהיה גובה המים כעבור 30 שניות?

בעיה	פתרונות נכונים	פתרונות שגויים
מ1		
מ2		
מ3		
מ4		
מ5		
מ6		
מ7		
מ8		
מ9		
מ10		

הערות והארות לפעילויות 1, פעילות 2 ופעילות 3:

כיצד פותרים? וכיצד ילדים פותרים

מומלץ להעביר את שלוש הפעילויות הכלולות בפרק זה באופן הבא:

לבקש מכל לומד להשיב באופן יחידני על עשר הבעיות המילוליות המופיעות בפעילות 1 ולאסוף את דפי הפעילות עליהם השיבו הלומדים כאשר סיימו לעבוד עליהם ולפני מתן הדף הבא. עשר הבעיות המילוליות הכלולות בפעילות 1 הן **בעיות "מצביות": בעיות מילוליות לא סטנדרטיות (מ1 עד מ10).** כלומר, בעיות שבפתרונן יש להתייחס להקשר של המצב במציאות ובחיי היום יום (realistic mathematical problems).

לאחר שהלומד סיים את עבודתו על פעילות 1, והגיש את הדף הפתור למנחה, יש להגיש לו את פעילות 2 ולבקשו לעבוד באופן יחידני על דף הפעילות, ולהגיש את דף התשובות לאחר המענה עליו. עשר הבעיות הכלולות בפעילות 2 הן **בעיות "רגילות" (ר1 עד ר10):** בעיות הנפתרות בצורה ישירה תוך יישום לא מסובך של הפעולה החשבונית המתאימה ושימוש ישיר בנתונים המספריים המופיעים בבעיה. במהלך העבודה על פעילות 2 מרבית הלומדים מבחינים בדמיון ובשוני בין הבעיות הכלולות בשתי הפעילויות ומסיקים מסקנות לגבי האופן בו היו צריכים להשיב על הבעיות בדף פעילות 1.

מיד לאחר שהלומד סיים את עבודתו על פעילות 2 והגיש את הדף הפתור למנחה, יש לבקשו לעבוד באופן יחידני על פעילות 3. בפעילות זו עליו להתייחס שוב לבעיות המילוליות הלא סטנדרטיות שנכללו בפעילות 1, אלא שהפעם עליו לרשום פתרונות נכונים ופתרונות שגויים של תלמידים בכתה ה' לכל אחת מהבעיות. פעילות זו מעוררת את מודעות הלומדים להבדלים נוספים בין הבעיות שהופיעו בשתי הפעילות הקודמות.

כאשר שני לומדים מסיימים את שלוש הפעילויות כדאי לבקש מהם לדון ביחד בדף פעילות 3.

גישת עבודה זו מבליטה את החשיבות הרבה שיש לרצף בו מוצגות הפעילויות ומדגימה כיצד אפשר באמצעות רצף מסוים, להביא ל"תיקון עצמי".

פתרון הבעיות המופיעות בפעילות 2 :

הבעיות המופיעות בפעילות 2 **(ר1-ר10)** הן בעיות סטנדרטיות המוצגות בית ספר, והפתרון ניתן בהתאם :

ר1. פיטר מארגן מסיבה לכבוד יום הולדתו העשירי. הוא הזמין 8 בנים ו 4 בנות. כמה חברים (בנים ובנות) הזמין פיטר למסיבה? (פתרון : 8+4=12 , 12 חברים).

ר2. סטיב קנה 5 קורות מעץ באורך 2 מטר כל אחד. כמה קורות עץ באורך 1 מטר הוא יוכל לנסר מהקורות שקנה? (פתרון : 5 x 2 :1=10 , 10 קורות).

ר3. למוכר 2 ארגזי תפוחים. בארגז אחד 60 תפוחים ובארגז השני 90 תפוחים. המוכר העביר את התפוחים משני הארגזים לארגז אחד גדול. כמה תפוחים יש כעת בארגז הגדול?
(פתרון : 60+90=150, 150 תפוחים).

ר4. פיטר חסך 690 שקלים. הוא קנה בכל חסכונותיו 20 מכוניות צעצוע זהות. מהו המחיר של מכונית אחת? (הפתרון : 690 : 20 = 34.5, 34.5 שקלים).

ר5. סירה שטה במהירות קבועה של 45 קמ״ש. בכמה זמן תעבור הסירה מרחק של 180 ק״מ?
(הפתרון : 180 : 45 = 4, 4 שעות).

ר6. ביום ראשון כריס צעד פעמיים : בבוקר 8 ק״מ ואחר הצהרים 15 ק״מ. כמה ק״מ צעד כריס ביום ראשון? (הפתרון : 8+15=23, 23 ק״מ).

ר7. תום, קטי, חנה ומיכאל קבלו מסבא שלהם 14 חפיסות שוקולד. כמה חבילות שוקולד יקבל כל אחד מהם אם הם מחלקים את השוקולד שווה בשווה ביניהם? (הפתרון : 14 :4 = 3.5, 3.5 חבילות).

ר8. בבוקר סטיב הוסיף לקופת החיסכון שלו 480 שקלים. לאחר ההוספה, יש בקופה 1650 שקלים. כמה כסף היה בקופה לפני ההוספה? (הפתרון : 1650- 480 = 1170, 1170 שקלים).

ר9. אדם גזר חבל באורך 12 מטר לחתיכות באורך 1.5 מטר. כמה חתיכות קיבל?
(הפתרון : 12 : 1.5 = 8, 8 חתיכות).

ר10. ברז ממלא בקבוק ריק בצורת תיבה בקצב קבוע. אם ידוע כי כעבור 10 שניות גובה המים היה 4 ס״מ, מה יהיה גובה המים כעבור 30 שניות? (הפתרון : 30 : 10 x 4=12, 12 ס״מ).

פתרון הבעיות המופיעות בפעילות 1 ובפעילות 3:

הבעיות המופיעות בפעילות 1 **(מ1-מ10)** הן בעיות אשר בפתרונותיהן יש להתייחס להקשרים המציאותיים המופיעים בבעיה. כלומר, בבעיות אלה יש להתייחס למצב המתואר בבעיה.

בטבלה מוצגות תשובות אופייניות לבעיות אלו. התשובות המופיעות בעמודה הראשונה מתייחסות למצב המתואר בבעיה. התשובות המופיעות בעמודה השנייה שבטבלה מציגות תשובות אופייניות אשר אינן מתייחסות להקשר המציאותי המתואר בבעיה.

טבלה זו, מתייחסת למטלות המופיעות בפעילות 1 ובפעילות 2:

	תשובות אפשריות המתייחסת להקשר הריאלסטי של הבעיה: **Realistic answer or response**	**תשובות צפויות שאינן מתייחסות להקשר המציאותי של הבעיה:** **Expected non- realistic answer**
מ1	אי אפשר לדעת כי ייתכן ולקרול וג׳ורג יש חברים משותפים. כמו כן לא ברור האם צריך לספור גם את קרול וג׳ורג.	5+6=11
מ2	סטיב יכול לנסר 8 קורות באורך 1 מטר ויישארו לו 4 קורות באורך של חצי מטר כל אחת.	4 x 2.5=10 סה״כ יש 10 מטרים. 10:1=10 ; כלומר, אפשר לקבל 10 קורות באורך 1 מטר כל אחת.
מ3	- 80+40=120 ⇐ 120:2=60 ; 60 מעלות. - אני לא יודע. זה משהו בין 80 ל- 40 מעלות.	80+40=120 ; 120 מעלות.
מ4	450:36= 12(18) ; צריך 13 אוטובוסים, אם אף אוטובוס לא נוסע פעמיים.	450 : 36 =12.5 ; 12.5 אוטובוסים.
מ5	- אי אפשר לדעת כיוון שהרץ מתעייף במהלך הריצה. - בערך 3 וחצי דקות. בטוח שיותר מ- 170 שניות (17x10) כי הרץ מתעייף.	10 x 17= 170 ; 170 שניות שזה 2 דקות ו- 50 שניות.
מ6	- אי אפשר לדעת. זה תלוי במיקום של בית הספר ביחס לבית של כל אחד מהם.	(i) 17+8=25 ; 25 ק״מ. (ii) 17-8=9 ; 9 ק״מ
מ7	4 בלונים לכל אחד, ויישארו 2 בלונים.	18 : 4 = 4.5 ; 4.5 בלונים לכל ילד.
מ8	אי אפשר לדעת במדויק, בן 16 או 17.	+17=1993 ; הוא בן 17.
מ9	בטוח שיותר מ- 8 רצועות (12:1.5), כי צריך חבל גם לקשירות שבין הרצועות עצמן.	12:1.5=8 ; צריך 8 רצועות.
מ10	חסר מידע לגבי צורת הבקבוק ולכן לא ניתן להשיב	3 x 4 = 12 ; 12 ס״מ.

בעיות אלה הוצגו במספר מחקרים במדינות שונות. בחלק מהמחקרים הוצגו כל הבעיות, ובמחקרים אחרים הוצגו מרביתן. תלמידים רבים, בכל קבוצות הגיל ובכל המדינות, ענו נכון על הבעיות הסטנדרטיות (**ר1-ר10**). הטעויות המרכזיות בבעיות אלה היו טעויות חישוב. במקרים בהן התשובות כללו שברים, התגלו קשיים אצל תלמידים שעדיין לא עסקו בנושאים אלה. לעומת זאת, בהקשר לבעיות הלא סטנדרטיות, כלומר, הבעיות "המצביות" (הבעיות שבפתרונן יש להתייחס להקשר של המצב המתואר בחיי היום יום) מרבית התלמידים, בכל קבוצות הגיל ובכל המדינות שהשתתפו במחקרים אלה, לא התייחסו להיבטים המציאותיים של הבעיות. הם השיבו על הבעיות ללא כל התייחסות, אף לא בהערה, לאופי הבעיה.

בטבלה רשומים אחוזי המשתתפים, במחקרים השונים, אשר התייחסו להיבטים המצביים של הבעיות.

בכל המחקרים: חצי מהתלמידים בכל קבוצת מחקר השיבו קודם על שאלון I שכלל 10 שאלות ובהן 5 שאלות רגילות ו 5 שאלות "מצביות" ולאחר יום השיבו על שאלון II שהכיל את 10 השאלות עליהם לא השיבו ביום הקודם. החצי השני של קבוצת המחקר קבל, באופן דומה, את שני השאלונים אך בסדר הפוך (ראשית אל שאלון II ולאחר יום את שאלון I).

טבלה: תשובות נכונות לשאלות שיש בהן התייחסות למרכיבים מצביים (באחוזים)

	בלגיה	שוויץ	שוויץ	יפן	בלגיה
	כתה ה' גילאי 10-12	כתה ה' גילאי 10-12	כתה ז' גילאי 13-15	כתה ה' גילאי 10-12	סטודנטים להוראה-יסודי
מ1 מסיבה	20	10.5	34.8	13	29
מ2 קורות עץ	13.3	13.5	27.0	0	64
מ3 טמפרטורה	17.3	20.9	62.6	11	(*)
מ4 אוטובוסים	49.3	49.3	76.4	62	90
מ5 ריצה	2.7	4.5	38.3	7	31
מ6 מרחק מגורים	2.7	4.5	31.3	2	48
מ7 בלונים	58.7	74.6	74.8	52	(*)
מ8 חישוב גיל	2.7	1.5	21.7	0	(*)
מ9 חבלים	0.0	6.0	3.9	2	37
מ10 מילוי בקבוק	4.0	0.0	24.3	4	39
סה"כ תשובות "מצביות"	**17.1**	**18.5**	**42.5**	**15**	**48**

(*) בעיה זו לא הוצגה לסטודנטים להוראה – יסודי.

הצגת הטבלה מפתיעה מאד את הלומדים. האחוזים הנמוכים של תשובות "מצביות" בכלל וביפן בפרט מושכים תשומת לב. כדאי לעורר דיון על ממצא זה. נציין כי ממצא זה תואם ממצאים של מחקרים קודמים לפיהם, למרות שבמבחני הישגים בינלאומיים ההישגים של ארצות מזרח אסיה גבוהים ביותר (במבחנים אלה הפריטים ברובם הגדול סטנדרטיים), הרי שבמבחנים בהם נכללות מטלות לא סטנדרטיות הישגיהם אינם גבוהים (ולעתים אף נמוכים) מאלה של תלמידים במדינות מערב אירופה וארצות הברית.

ממצא נוסף שמעורר את תשומת ליבם של סטודנטים להוראה ושל מורים הוא האחוזים הנמוכים, יחסית, של תשובות נכונות של סטודנטים להוראה. מומלץ להוסיף לטבלה עמודה ולרשום בה את אחוזי התשובות הנכונות בכתה בה נערכת הפעילות (על פי תשובות הלומדים לפעילות הראשונה) ולערוך השוואה בין התוצאות בכתה לבין שאר התוצאות.

היבט מעניין נוסף: לאור ההבדלים בין תשובות התלמידים בקבוצות הגיל השונות בשוויץ מתעוררת שאלה: האם זו תמונת המצב גם בישראל? כדאי להציע לערוך "מחקרון" בהקשר זה.

חזרה

רשימת מקורות

Baroody, A. J., & Ginsburg H. P. (1983). The effects of instruction on children's understanding of the "equals" sing. *The Elementary School Journal,* 84 (2), 199-212.

Behr, M., Erlwanger, S., & Nichos, E. (1976). How children view equality sentences. *ERIC Document Reproduction Service No. ED 122 802.*

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education, 15,* 179-202.

Davis, R.B. (1989). The culture of mathematics and the culture of schools. *Journal of Mathematics Behavior,* 6, 143-160.

Davis P. J., & Hersh, R, (1981). *The mathematical experience*. Boston, MA: Birkhauser.

Falkner, K. P.; Levi, L.; & Carpenter, T. R. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics, 6,* 232-236.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving problems in multiplication and division. *Journal of Research in Mathematics Education, 16,* 3-17.

Freudenthal, H. (199l). Revisiting mathematics education. Dordrech: *The Netherlands: Kluwer.*

Fuson, K. C. (2003). Developing mathematical power in whole number. In J. Kilpatrick, J. Martin, & D. Schifter (Eds.)., *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 68-94). Reston, VA: National Council of teachers of mathematics.

Gray, E. M., & Tall, D.O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 115-141.

Greer, B. (1997). (Ed.). Modeling reality in mathematics classrooms. *Learning and Instruction* (special issue).

Grouws, D. (1992).(Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Hart, K. (1980).(Ed.). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London: Murray.

Inhelder, B., Sinclair, H., & Bovet, M. (1974). *Learning and the development of cognition*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Kieren, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 317-326.

Kilpatrick, J., Martin, J., & Schifter, D. (2003). (Eds.). *A research companion to principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of teachers of mathematics.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). (Eds.). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah: New Jersey: Lawrence.

McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2005a). Why won't you change your mind? Knowledge of operational patterns hinders learning and performance on equations. *Child Development, 76* (4), 883-899.

McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2005b). Knowledge change as a function of mathematics experience: All contexts are not created equal. *Journal of Cognition and Development*, *6*(2), 285-306.

Mebarch, Z. & Yitschak. D. (1983). Students' misconceptions of the equivalence relationship. In R. Hershkowitz (Ed.)., *Proceedings of the Seventh International conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 313-318). Rehovoth, Israel: Weizmann Institute.

Morris, A. K. (2003). The development of children's understanding of equality and inequality relationships in numerical symbolic contexts. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *25*(2), 18-51.

Morrow, L. J., & Kenney, M. J. (1998). The teaching and learning of algorithms in school mathematics. Reston, VA: National Council of teachers of mathematics.

Nesher, P. (1980). The stereotyped nature of school word problem. *For the Learning of Mathematics, 1*(1), 41-48.

Piaget, J., & Szeminska, A. (1952). *The child's conception of number*. London: Routledge & Kegan .

Riley, K. S., & Greeno, J. S. (1988). Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction, 5*, 49-101.

Reusser, K. (1988). Problem solving beyond the logic of things: Contextual effects on understanding and solving word problems. *Instructional Science*, *17*, 309-338.

Seo, K. H., & Ginsburg, H. P. (2003). ‘‘You’ve got to carefully read the math sentence. . .’’: Classroom context and children’s interpretations of the equals sign. In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), The development of arithmetic concepts and skills (pp. 161 – 187). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Selter, C. (2001). Addition and subtraction of three-digit-number: German elementary school children's success, methods and strategies. *Educational Studies in Mathematics, 47*, 145-173.

Skemp, R.R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teacher, 77*, 1-7.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). (Eds.). *Making sense of word problems*. Heereweg, Netherlands: Swets & Zeitlinger.

תירוש, ד. (תשנ"ז) *מתמטיקה: מחקר והוראה*. תל-אביב: מופ"ת.

חזרה