ממצאי מחקרים על תפיסות אופייניות של שברים ושל פעולות בשברים

ד"ר אביבה ברש, פרופ' דינה תירוש, פרופ' אפרים פישביין, נאוה אזהרי, ד"ר רונית קליין,
בועז שני, פרופ' עמוס ארליך - ביה"ס לחינוך, אוניברסיטת תל-אביב
עובד מתוך החוברת: שברים ופעולות בהם, יחידת הוראה 3, ביה"ס לחינוך, אוניברסיטת תל-אביב,
1994 (מהדורת ניסוי - לא פורסם)

מחקרים רבים התייחסו לתפיסות אופייניות של תלמידים לגבי שברים. במסגרת זו נציג בקצרה כמה מהם.

א. מחקרים הדנים בתפיסת מושג השבר

Piaget, Inhelder & Szminska (1960) בדקו את יכולתם של ילדים להתייחס אל שבר כאל חלק מתוך השלם . נתאר את המחקר:

השיטה: נבדקו ילדים מגיל 4 עד גיל 10. ניתנו להם מודלים של "עוגות" (גזרות נייר של עיגולים, ריבועים, מלבנים ומשולשים) ומספר בובות (2-6). נאמר להם כי הבובות עומדות לאכול את כל העוגה, וכל אחת מהן תאכל כמות שווה של עוגה. הילדים התבקשו לבצע חלוקה של העוגה. ניתנו להם עיפרון, מספריים, סרגל, ולעתים ניתנו להם גפרורים שאפשרו סימון גבול בין החלקים השונים והקלו על החלוקה (השימוש בגפרורים עודד את הילד לתכנן מראש את החלוקה) .

הילד נשאל, לאחר ביצוע החלוקה, אם סכום החלקים שווה לשלם: "אם נחבר את כל החלקים יחד, האם נוכל לקבל את העוגה השלמה?" הילדים הצעירים התבקשו להתחיל במשימת החלוקה לשני חלקים שווים (חצאים), ואחר כך המשיכו, לפי היכולת, בחלוקה לשלושה, וכן הלאה.

ממצאי המחקר הביאו את פיאז'ה ועמיתיו לניסוח שבעה קריטריונים הנדרשים לצורך הצלחה בביצוע משימת חילוק השלם לחלקים שווים:

1. הבנה שהשלם הוא אובייקט הניתן לחלוקה (ילדים מתייחסים אל עוגה כאל אובייקט שאינו ניתן לחלוקה ומתוך רצון לשמור על שלימות הצורה הם מסרבים לחתוך אותה).
2. הבנה שיצירת שבר דורשת חלוקת השלם למספר מסוים של חלקים הנקבע על-פי השבר (למשל, כדי ליצור שליש, יש לחלק את השלם כך שיתקבלו שלושה חלקים שווים. ילדים בני 3-4 ממשיכים לחתוך את העוגה שוב ושוב).
3. הבנה שצריך לחלק את השלם כולו ללא שארית (ילדים בגיל 4-6 הותירו שארית גדולה וסירבו לחלקה, כלומר, השארית נתפסה כישות נפרדת שאינה קשורה לחלקים שניתנו לבובות, ולא כחלק מהשלם).
4. הבנה שמספר החתכים לא תמיד שווה למספר החלקים (ילדים בגיל 4-6 נטו ליצור שלושה חתכים כדי לחלק את העוגה בין שלוש בובות).
5. הבנה שחלקים צריכים להיות שווים בגודלם (ילדים בגיל 4-6 אשר התבקשו לחלק עוגה שווה בשווה בין 3 בובות, חתכו את העוגה לשני חצאים ואת אחד החצאים חתכו שוב לשניים).

6. הבנה שניתן לראות כל חלק בו-זמנית כחלק משלם, וכשלם אשר ניתן לחלקו שוב (הבנה זו התפתחה מאוחר. גם בשכבת הגיל הגבוהה ביותר, ילדים התקשו בחלוקת מעגל ל- 6 חלקים שווים על-ידי חצייתו ואחר כך חלוקת כל חצי לשלושה חלקים שווים).
7. הבנה שהשלם "נשמר" גם לאחר החלוקה, כלומר, ניתן להרכיב את השלם מכל חלקיו (הבנה זו התפתחה בגיל 7 בערך).

הוגדרו שלושה שלבים בהתפתחות היכולת לחלוקת שטח נתון למספר חלקים שווים:

שלב 1 (גיל $4\frac{1}{2}-4$): ילדים הצליחו ליצור שני חצאים כאשר הצורות היו מלבניות, או עיגולים קטנים.

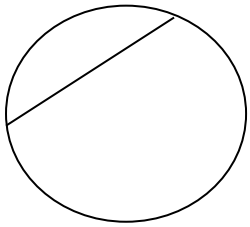
שלב 2א (גיל $6-4\frac{1}{2}$): בגיל זה הצליחו הילדים לבצע חלוקה של מלבנים ל- 3 חלקים שווים, אך לא של עיגולים.

שלב 2ב (גיל 7-6): הצלחה בחלוקה של עיגולים ל- 3 חלקים שווים.

שלב 3א (גיל 9-7): הילדים הצליחו לחלק עיגולים לחלקים שווים באמצעות ניסוי וטעייה (למשל, על-ידי סידור בובות מסביב לעוגה וחיתוך העוגה בהתאם למיקום הבובות).

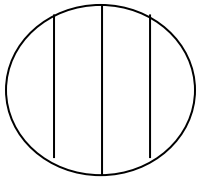
שלב 3ב (גיל 10): הילדים הצליחו לתכנן שלבים ולבצע על פיהם חלוקה של עיגולים ל- 6 ולמספר חלקים רב יותר (למשל, חלוקה ל- 3 ואחר כך חציית כל $\frac{1}{3}$).

מחקרים שנעשו על תפיסת מושג השבר כחלק מהשלם, בהקשר לשימוש במודל השטח, מראים כי חלק מהקשיים אשר נצפו אצל תלמידים בגיל 11-16 נובעים מחוסר עמידה בקריטריונים שציינו פיאז'ה ועמיתיו בהקשר ליכולת הילד ליצור חלק מהשלם. השכיח ביותר הוא קושי בהבנה שהחלקים צריכים להיות שווים בגודלם. מחקריה של Hart (1981) הראו כי גם תלמידים בגיל 12-13 טענו כי כל אחד מחלקי העיגול המתוארים בציור 1 מתאר חצי מהשלם.



ציור 1

בהקשר זה טוענים Pothier & Sawada (1983), כי ילדים נוטים לחלק עיגול לארבעה חלקים על-ידי העברת שני קווים מקבילים לקוטר ואינם מקפידים על שוויון החלקים. למשל:



ציור 2

בעיה נוספת לגבי תפיסת מושג השבר קשורה בהבנה כי **שבר הוא מספר**, למרות היותו בנוי משני מספרים (Kerslake, 1986). הצגת השבר כמנה של שני מספרים טבעיים מסייעת בתפיסת קו השבר כסימן חילוק, ותורמת להתייחסות לשבר כאל ביטוי של פעולת חילוק בין שני מספרים.

בשלבים מאוחרים יותר, נמצא כי תלמידים אינם יודעים כי סימן קו השבר הוא סימן חילוק (Hart, 1981) חוסר ידע זה מקשה על התלמיד במשימות, כגון: מעבר משבר פשוט לשבר עשרוני, ובהשוואת שברים.

ב. מחקרים הדנים בהשוואת שברים

אחד הקשיים העיקריים בלימוד נושא השבר הוא בהשוואת שברים. הקושי נובע, בין היתר, משימוש בידע לגבי יחסי סדר גודל במספרים טבעיים באופן לא מבוקר לצורך השוואת שברים, ומאי-הבנה כי השבר, הבנוי משני מספרים הינו מספר אחד. כתוצאה מכך התופעות המתגלות הן:

- השוואת המונים בלבד:

בהשוואת $\frac{4}{10}$ ו- $\frac{2}{3}$ יטענו התלמידים כי $\frac{4}{10} > \frac{2}{3}$ היות ו- $4 > 2$.

- השוואת המכנים בלבד:

אסטרטגיה זו היא השכיחה ביותר. כך למשל יטענו התלמידים כי: $\frac{1}{3}$ קטן מ- $\frac{1}{4}$ כי 3 קטן מ- 4.

Behr, Wachsmuth, Post & Lesh (1984) טוענים כי התלמידים המשווים שברים באופן זה אינם מסוגלים לקשר בין מספר החלקים להם חולק השלם לבין גודלו של כל חלק. התלמידים אינם מבינים את היחס ההפוך בין מספר החלקים לבין גודלו של כל חלק. כלומר, הם מתקשים להבין כי כאשר מחלקים עיגול ל- 3 חלקים, כל חלק יהיה גדול יותר מהחלק הנוצר מחלוקת עיגול ל- 4 חלקים.

- השוואת המונים והמכנים כמספרים נפרדים:

חוקרים רבים ציינו כי תלמידים נוהגים להשוות בנפרד את המונים ואת המכנים. כך למשל, במקרה בו גם המונה וגם המכנה של אחד השברים גדול מהמונה והמכנה של השבר השני, הם יטענו כי השבר הראשון, גדול מהשבר השני. למשל: $\frac{4}{6} > \frac{2}{3}$ כי $4 > 2$ ו- $6 > 3$ (ראה מחקרה של Kerslake, 1986).

הקשיים בהשוואת שברים קשורים באי-הבנת תכונות הפרופורציה (פרופורציה היא שוויון יחסים). השוואת שברים היא מקרה פרטי של פרופורציה. Hunting (1983) למשל, הראה כי תלמידים משתמשים בחיבור במקום בכפל בהרחבת שברים.

תלמידים אלה יטענו בתשובה לתרגיל $\frac{1}{3} = \frac{?}{6}$, כי התשובה היא 4 כי יש להוסיף 3 למכנה של השבר $\frac{1}{3}$, כדי לקבל מכנה של 6 ולכן יש להוסיף 3 למונה השבר $\frac{1}{3}$, כך שמתקבלת תוצאה 4.

ג. מחקרים בקשר לפעולות בשברים

בספרות מדווח בהרחבה על טעויות נפוצות הקשורות בחיבור ובחיסור שברים פשוטים.

טעות שכיחה היא חיבור (חיסור) המונים וחיבור (חיסור) המכנים. למשל, $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{5}$. לטענתם של חוקרים אחדים (Carpenter, Coburn, Reys & Wilson, 1976), טעות זו נובעת מכך שתלמידים אינם מתייחסים לשברים שיש לחבר כאל מספרים המייצגים כמויות מסוימות, אלא רואים בהם ארבעה מספרים שלמים שיש לצרפם בדרך מסוימת והם עושים זאת בדרך שמאפשרת חישוב מיידי בלי שלבי הכנה. הרשקוביץ, וינר וברוקהימר (1978) מציגים שני מקורות נוספים אפשריים לטעות. לדעתם ייתכן, כי מקור הטעות הוא זיהוי מוטעה, כלומר, התלמיד מיישם אלגוריתם המתאים למצב מסוים (אלגוריתם הכפל) למצב אחר שאיננו מתאים לו (חיבור שברים). קו מחשבה משוער של תלמיד כזה הוא: "בכפל שני שברים יש לכפול מונים ומכנים בהתאמה, ולכן בחיבור שברים יש לחבר מונים ומכנים בהתאמה". זוהי אנלוגיה מוטעית המתרחשת כמובן לאחר שהתלמידים למדו לכפול שברים. מקור אפשרי נוסף הוא ייחוס משמעות מוטעית לסמלים. התלמיד רואה את סימן החיבור ואת המספרים ומחליט, כי טבעי לחבר מונה למונה ומכנה למכנה, כיוון שבמקרים רבים מחברים דברים השייכים לאותה קטגוריה - תפוחים לתפוחים, כיסאות לכיסאות ועשרות לעשרות. Mochon (1993) מתייחס לסיבה אפשרית נוספת והיא – חיבור השברים על סמך מצבים במציאות בהם אכן מחברים את המונים ואת המכנים בהתאמה. כמו למשל בדוגמא הבאה:

שחקן כדורסל קלע במחצית הראשונה של משחק 5 מתוך 8 זריקות של הכדור לסל. במחצית השנייה קלע 7 מתוך 12 זריקות לסל. סה"כ קלע השחקן במשחק כולו 12 מתוך 20 זריקות לסל, כלומר: $\frac{5}{8}+\frac{7}{12}=\frac{12}{20}$ במקרה זה התשובה הנכונה מתקבלת על-ידי חיבור המונים והמכנים בהתאמה.

Ashlock (1994) מדווח על שתי שגיאות נפוצות נוספות <u>בחיבור שברים</u> ואלו הן:

1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1+1}{4}=\frac{2}{4}$

   מכנה משותף ללא הרחבת השבר בהתאם.

2. $6\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$

   "התעלמות" מהחלק השלם של המספר.

בקשר <u>לחיסור שברים</u>, מדווח Ashlock על השגיאות האופייניות הבאות:

1. $8\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=8\frac{1}{3}$

   $3\frac{1}{2}-2\frac{3}{4}=1\frac{1}{4}$.

   חיסור השלמים בנפרד וחיסור מהשבר הגדול.

2. $5\frac{3}{8}-2\frac{2}{3}=3\frac{1}{5}$

חיסור מונה ממונה ומכנה ממכנה.

<u>השגיאות האופייניות בכפל שברים</u>, על-פי Ashlock הן:

1. $\frac{3}{8}\times\frac{5}{6}=\frac{3}{8}\times\frac{6}{5}=\frac{8}{40}$

כפל בהופכי. "בלבול" בין כפל וחילוק.

2. $\frac{2}{3}\times 3=\frac{6}{9}$

כפל שבר בשלם - השלם כופל גם את המונה וגם את המכנה.

3. $\frac{17}{15}\times\frac{5}{12}=\frac{17\times 4}{15\times 4}\times\frac{5\times 5}{12\times 5}=\frac{68}{60}\times\frac{25}{60}=\frac{1700}{60}$

מכנה משותף. "בלבול" בין כפל וחיבור.

<u>השגיאות האופייניות בחילוק שברים</u>, על-פי Ashlock הן:

1. $\frac{9}{20}:\frac{3}{4}=\frac{9\times 3}{20\times 4}=\frac{27}{80}$ כפל במחלק (ולא בהופכי למחלק).
2. $\frac{9}{20}:\frac{3}{4}=\frac{20}{9}\times\frac{3}{4}=\frac{60}{36}$ כפל בהופכי למחולק (ולא בהופכי למחלק).
3. $\frac{9}{21}:3=\frac{9:3}{21:3}=\frac{3}{7}$ חילוק המונה והמכנה במחלק כאשר המחלק הוא מספר שלם.

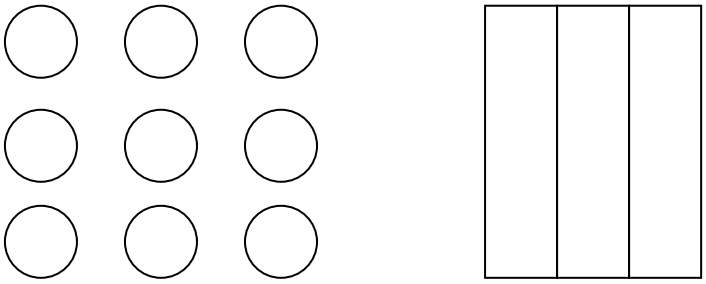
שגיאות אלה נובעות במקרים רבים מאי-הבנת האלגוריתם. תלמידים זוכרים את האלגוריתם כמערכת צעדים ללא הבנת הרצף ביניהם (Behr, Lesh, Post & Silver, 1983).

באשר לכפל וחילוק בשברים, תלמידים מכלילים באופן לא מבוקר את הידע שלהם לגבי מספרים טבעיים, לפיו כפל מגדיל וחילוק מקטין. למשל לטענתם תוצאת התרגיל $6:\frac{1}{2}$ היא 3 ולא 12 כיוון ש"התשובה צריכה להיות קטנה מ- 6" (Hart, 1981).

ד. מחקרים הדנים בקשיים בשימוש במודלים

מספר מחקרים מראים כי תלמידים מצליחים במשימות בהם נעשה שימוש במודל השטח יותר מאשר במשימות בהם נעשה שימוש במודל הקבוצה. כך למשל, נמצא במחקר שנערך באנגליה

(Kerslake, 1986), כי אחוז ההצלחה של תלמידים בפריט בו התבקשו לצבוע $\frac{1}{3}$ משטחו של המלבן המתואר בציור 3 היה גבוה מאחוז ההצלחה של תלמידים בפריט בו התבקשו להקיף $\frac{1}{3}$ מהגולות המתוארות בציור 3 (92% לעומת 77%).



ציור 3

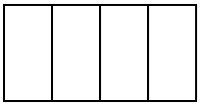
ייתכן כי שוני זה נובע כתוצאה מהיכרות ומהתנסות רבה יותר במודל השטח. הסבר אפשרי אחר לשוני בהצלחה הוא העובדה שבמודל הקבוצות, השלם מורכב מיותר מיחידה אחת – ייתכן כי עובדה זו מקשה על תפיסתו כשלם – תמיכה להסבר זה מוצגת במספר מחקרים (למשל אצל Behr & Post, 1992).

Novillis (1976) הראה כי ילדים מצליחים למצוא $\frac{1}{5}$ של קבוצה בה חמישה עיגולים, אך נכשלים בזיהוי $\frac{1}{5}$ של קבוצה אשר בה עשרה עיגולים.

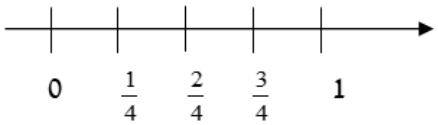
גם לטענתו של Hunting (1984) לתלמידים קל יותר לדון בשברים כאשר נתונות כמויות רציפות ולא כמויות בדידות. הוא ממליץ לעסוק קודם בכמויות רציפות ורק בשלב מאוחר יותר של הלמידה בכמויות בדידות.

מחקרים רבים מראים כי תלמידים בגיל 8-16 מתקשים בשימוש במודל ציר המספרים יותר מאשר במודל השטח ובמודל הקבוצה. כך למשל, כאשר ניתנו לתלמידים בגיל 10 המשימות הבאות:

צבע $\frac{3}{4}$ משטח הצורה



סמן $\frac{3}{4}$ על ציר המספרים



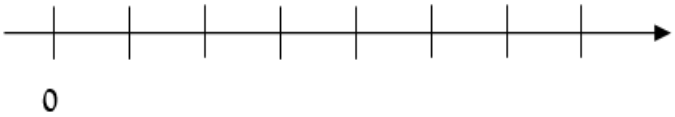
ענו 98% נכון על משימת השטח, ורק 31% השיבו נכון על משימת ציר המספרים. בדומה, כאשר התבקשו התלמידים לסמן את $\frac{3}{4}$ על ציר המספרים בשתי משימות:

משימה 1

משימה 2

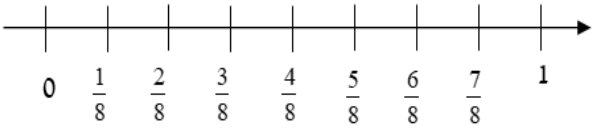
רבים מהם השיבו נכון על משימה 1 אך במשימה 2 סימנו את הנקודה 3. כאן התגלה קושי בזיהוי היחידה – הקטע [0 , 4] זוהה, בטעות, כיחידה. נציין כי זיהוי הקטע [0 , 1] כשלם (יחידה), אינו מיידי. בסדרת מחקרים אשר בדקה את הקשיים הכרוכים בסימון קטעים על-גבי ציר המספרים. נמצא כי:

א. כאשר נתון היה ציר המספרים, והתלמידים התבקשו לתאר את הנקודה $\frac{3}{4}$, רבים מהם התקשו ליצור חלוקה עצמאית מתאימה, וכתוצאה מכך סימנו בציור את הנקודה השלישית מימין לאפס, גם כאשר לא ניתנו נקודות ייחוס כמתואר בציור 4 .



ציור 4

ב. תלמידים מתקשים להתעלם מחלוקה עדינה מדי. למשל כשהתבקשו התלמידים לתאר את הקטע [0 , $\frac{3}{4}$], הם תיארו במקומו את הקטע [0 , $\frac{3}{8}$]. הם סימנו תמיד את הנקודה השלישית מימין לאפס - כמתואר בציור 5.



ציור 5

בנספח לפרק זה נמצא מאמר של Bright, Behr, Post, & Wachsmuth (1988), המתאר מחקר שבדק קשיי תלמידים בשימוש בציר המספרים לצורכי המחשת שברים. מומלץ לקרוא! מאמר מומלץ נוסף בנושא זה הוא של Novillis-Larson, (1980).

במספר רב של מחקרים מדווח על ניסיונות להוראת שברים בגישות שונות, ועל בדיקת השפעת ההוראה על תפיסות תלמידים לגבי שברים.

מרבית החוקרים, (ביניהם Lesh, Landau & Hamilton, 1981; Behr, Lesh & Post, 1981), ממליצים להשתמש במודלים שונים להמחשת השבר כמו: עיגולים, מלבנים, ציר מספרים, קיפולי נייר, וקבוצות, וזאת בנוסף לשימוש בשברים בבעיות מילוליות, בתמונות וסמלים. לטענתם, שימוש בעזרים מרובים גורם לתלמיד לפתח גמישות מחשבתית והבנה טובה של הנושא.

ה. מחקרים בקשר לפתרון בעיות

מחקרים רבים נעשו בהקשר לקשיים אופייניים של תלמידים בפתרון בעיות המערבות שברים. מחקרים אלה עוסקים בעיקר באופן ההתמודדות עם בעיות מילוליות, בהן הפתרון ניתן על-ידי תרגיל כפל או תרגיל חילוק. מחקרה של Hart (1981) ומחקרים רבים אחרים מצביעים על קושי של התלמידים בהתמודדות עם בעיה, כגון: "חמישה חברים חילקו ביניהם, שווה בשווה, שלוש פיצות. כמה פיצות יקבל כל אחד?"

נמצא כי קיים פער בין היכולת להעריך נכון את התוצאה (למשל, פחות מפיצה אחת, בין $\frac{1}{2}$ פיצה לפיצה שלמה) לבין היכולת לתת תשובה כמותית מדויקת לבעיה $\left(\frac{3}{5}\right)$. הערכה נכונה ניתנת על-ידי מרבית התלמידים החל מגיל 10 בערך, בעוד שרק כ- $\frac{1}{3}$ מן התלמידים בגיל 12-13 נותנים תשובה כמותית נכונה. הטעות האופיינית היא $\frac{5}{3}$ ומקורה בהתייחסות למספרים הטבעיים, בהם המחולק תמיד גדול מהמחלק (Hart, 1981; Karslake, 1986). סיבה נוספת המוזכרת בספרות המחקרית להחלפת התפקידים בין המחולק והמחלק היא המחשבה ש"גם בחילוק מותר להחליף את סדר רישום האיברים", כלומר, חוסר ידע לגבי אי-קיום חוק החילוף עבור פעולת החילוק. במקרים מסוימים יודעים התלמידים כי הפעולה שצריכה להתבצע היא חלוקה של מספר במספר גדול ממנו, אך נראה להם שחלוקה כזאת אינה אפשרית, או שהתוצאה היא 0. כך, למשל, כאשר ניתנה השאלה:

"צורף הכין 5 שרשרות זהות של כסף מנתך כסף שמשקלו $\frac{4}{5}$ ק"ג. מה משקל כל שרשרת?"

טענו מספר פרחי הוראה (כ- 20%) כי התשובה לשאלה היא 0 (Tirosh & Graeber, 1994).

על-פי התיאוריה שפותחה על-ידי Fischbein, Deri, Nello & Marino (1985), פעולות החשבון קשורות למודלים שהיו בתחילה גלויים והופכים, עם הזמן, להיות סמויים. לכל אחד מהמודלים יש אילוצים משלו. רבים מהקשיים בפתרון בעיות מילוליות נובעים מכך שמודלים אינטואיטיביים של פעולות החשבון מטילים מגבלות משלהם על פעולות אלה. מגבלות אלה רלוונטיות למודל ולא לפעולה,

ומקשות על פתרון בעיות שהנתונים המספריים בהם אינם עונים למגבלות המוטלות על-ידי המודלים. כך, למשל, עבור ילדים ומבוגרים רבים, החיבור החוזר משמש כמודל אינטואיטיבי לכפל. התייחסות זו מבחינה בין גורם כופל (מספר קבוצות) לבין גורם נכפל (גודל הקבוצה). מודל זה של כפל מחייב, שהגורם הכופל יהיה מספר טבעי ושהמכפלה תהיה גדולה או שווה לגורם הנכפל. אלו הן מגבלות שמטיל המודל, והן רלוונטיות למודל אך לא לפעולת הכפל עצמה. אותם חוקרים טוענים,לגבי חילוק כי קיימים שני מודלים אובייקטיבים: חילוק לחלקים וחילוק להכלה. על-פי המודל של חילוק לחלקים אובייקט מסוים או אוסף של אובייקטים מתחלקים למספר קבוצות. מודל זה מטיל שלוש מגבלות: המנה קטנה מהמחולק: המחולק גדול מהמחלק: המחלק הוא מספר טבעי. המודל האינטואיטיבי של חילוק להכלה בוחן כמה פעמים כמות מסוימת (המחלק) נכללת בכמות אחרת (המחולק). המגבלה היחידה המוטלת על-ידי מודל זה היא שהמחלק קטן מהמחולק.

כתוצאה מהשפעת המודלים האינטואיטיביים של כפל וחילוק על האופן בו פותרים ילדים ומבוגרים בעיות מילוליות של כפל וחילוק הקשורות בשברים, עונים ילדים ומבוגרים רבים באופן שגוי על הבעיות הבאות ועל בעיות דומות להן:

א. 1 ק"ג עגבניות עולה $3\frac{1}{2}$ שקלים. מהו המחיר של $\frac{3}{4}$ ק"ג עגבניות?

התשובה הנכונה לבעיה זו היא $3\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}$.

התשובה השגויה האופיינית היא $3\frac{1}{2}:\frac{3}{4}$.

ידוע כי מחיר $\frac{3}{4}$ ק"ג עגבניות חייב להיות קטן ממחיר 1 ק"ג עגבניות, ורבים סבורים (בטעות) כי כדי לקבל תשובה קטנה יותר עליהם לחלק.

ב. 5 ק"ג סוכריות חולקו שווה בשווה, בין 15 ילדים. כמה ק"ג סוכריות קיבל כל ילד?

התשובה הנכונה לבעיה היא $15:5$.

התשובה השגויה האופיינית היא $5:15$. כי "בחילוק מחלקים את הכמות הגדולה בכמות הקטנה".

מחקרים רבים מראים כי תלמידים (ומבוגרים) בגילאים שונים ובארצות שונות מושפעים מהמודלים האינטואיטיביים בפתרון בעיות מילוליות של כפל וחילוק בשברים, וכתוצאה מכך משיבים באופן שגוי על הבעיות המתוארות כאן. כיום עוסק המחקר בהוראת המתמטיקה בניסיון לאתר דרכים שונות להעלאת מודעות הלומדים להשפעת המודלים האינטואיטיביים על תפקודם בפתרון בעיות.

סיכום

נסכם ונאמר כי נושא השברים נחשב קשה ללמידה, בעיקר בשל הסיבות הבאות:

1. בחיי היומיום השימוש נפוץ בעיקר בשברים כמו $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$ וכפולותיהם, בעוד שבשברים אחרים השימוש אינו כה רווח.

2. צורת הכתיבה של שברים הנה מסובכת יחסית.

3. השוואת שברים לצורך קביעת הגודל ביניהם קשה בעיקר במשימות הדורשות השוואת יותר משני שברים.

4. פעולות הכפל בשברים היא פשוטה יחסית, אך החיבור, החיסור והחילוק הינן פעולות המוגדרות באופן מסובך למדי.

5. הכללת יתר ממספרים טבעיים למספרים רציונאליים משפיעה על תפקוד התלמידים במטלות שונות המערבות שברים, כגון: השוואת שברים, הבנת צפיפות המספרים הרציונאליים וביצוע פעולות חשבון.

6. השפעת המודלים האינטואיטיביים של פעולות החשבון על התפקוד בפתרון בעיות בשברים.

מקורות

Ashlock, R.B. (1944). Error patterns in computation. New York: Macmillan Publishing Company (Sixth edition).

Behr, M.J., Lesh, R., & Post, T.R. (1981). Construct analysis, manipulative aids, representational systems, and learning rational number concepts. In C. Comiti & G. Vergnaud (Eds.), Proceedings of the Fifth International Conference for the Psychology of Mathematics Education (pp.203-209).Grenoble, France: Laboratorie I.M.A.G.

Behr, M., Wachsmuth, I., Post, T., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(5), 323-341.

Behr, M., & Post, T. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. In T. Post (Ed.), *Teaching math in grades K-8: Research-based methods* (pp. 190-231). Boston: Allyn & Bacon.

Behr, M.J., Lesh, R., Post, T.R., & Silver, E.A. (1983). Rational-number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91-128). New York: Academie.

Boyer, C.B. (1968). *A history of mathematics*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Bright, G., Behr, M., Post, T. & Wachsmuth, I. (1988). Identifying fractions on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(3), 215-232.

Cajori, F. (1928). *A history of mathematical notations*. Chicago: Open Court Publishing Company.

Carpenter, T.P., Coburn, T.G., Reyes, R.E., & Wilson, J.W. (1976). Notes from national assessment: Addition and multiplication with fractions. *Arithmetic Teacher, 23*(2), 137-141.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. & Marino, M., (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*, 3-17.

Hart, K.M,. (Ed.), (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London: John Murray.

Hunting, R. (1983). Alan: A case study of knowledge of units and performance with fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(3), 182-197.

Hunting, R.P. (1984). Learning fractions in discrete and continuous quantity contexts. In B. Southwell, R. Eyland, M. Cooper, J. Conroy & K. Collis (Eds.), *Proceedings of the Eighth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Sydney, Australia: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's strategies on error*. (A report of the strategies and errors in Concepts in Secondary Mathematics and Science Project). Windsor, England: NFER-Nelson.

Lesh, R., Landau, M., & Hamilton, E. (1981). Applied mathematical problem solving. In T. Post & M. Roberts (Eds.), *Proceedings of the Third Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 118-121). Minneapolis University of Minnesota.

Mochon, S. (1993). When can you meaningfully add rates, ratios and fractions? *For the Learning of Mathematics, 13*(3), 16-21.

Novillis, C.F. (1976). An analysis of the fraction concept into a hierarchy of selected subconcepts and the testing of the hierarchical dependencies. *Journal for Research in Mathematics Education. 7*(3), 131-144.

Novillis-Larson, C. (1980). Locating proper fractions. *School Science and Mathematics, 53*(5), 423-428.

Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminnska, A. (1960). *The child's conception of Geometry*. London: Routledge and Kegan Paul.

Pothier, Y.M., & Sawads, D. (1983). Partitioning: the emergence of rational number ideas in young children. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(5), 307-317.

Skemp, R. (1989). *Structural activities for primary mathematics. Volume 2: For the later years*. London: Routledge.

Tirosh, D., Graeber, O.A. (1994). Implicit and explicit knowledge: The case of multiplication and division. In D. Tirosh (Ed.), *Implicit and explicit knowledge: An educational approach. Human Development*, vol. 6, (111-130). New Jersey: Ablex Publishing Corporation.