

קשיים בבעיות השוואה - המקרה של בעיות חיבור חיסור

ד"ר בת-שבע אילני, מכללת בית-ברל

תחום תוכן מתמטי: שאלות מילוליות.

הנושא: קשיים בפתרון שאלות השוואה.

זמן משוער ללימוד הנושא: 2 ש"ל.

חומרים ועזרים דרושים: 4 דפים למשתלם (נמצאים בנספחים שבסוף היחידה).

מהלך המפגש:

1. המשתלמים יעבדו על **דף למשתלם מס' 1**: "התרנגולות והאווזים".
2. ייערך דיון במליאה על השאלות שבדף למשתלם מס' 1.
3. המשתלמים יעבדו על **דף למשתלם מס' 2**: "ילדים פותרים בעיות השוואה".
4. ייערך איסוף תשובות המשתלמים לדף למשתלם מס' 2 על הלוח.
5. המשתלמים יעבדו על **דף למשתלם מס' 3**: "ילדים פותרים בעיות השוואה - המשך".
6. ייערך דיון בתשובות המשתלמים לנקודות שבדף למשתלם מס' 3.

מבוא

לילדים רבים קשיים בפתרון בעיות מילוליות. חלק מהקשיים נובעים מהמבנה הלוגי של השאלות, בו עסקנו ביחידה "מבנה לוגי של בעיות - המקרה של בעיות חיבור חיסור", וחלקם נובעים מהמבנה הלשוני של הבעיות (פירוט תיאורטי מופיע גם ביחידה "מודל תהליכי לפתרון בעיות מילוליות"). ביחידה זו נעסוק בקשיים שנוצרים כתוצאה מהמבנה הלוגי והלשוני של בעיות – נדגים זאת דרך המקרה של בעיות השוואה בחיבור וחסור. בחרתי להדגים קשיים שנוצרים כתוצאה מהמבנה הלוגי והלשוני של בעיות, דרך המקרה של בעיות השוואה, מאחר שבעיות אלה נחשבות לבעיות קשות יותר להבנה ולפתרון הן על-ידי הילדים והן על-ידי מבוגרים. בעיות ההשוואה עוסקות בהשוואה כמותית בין שתי קבוצות המתוארות בבעיה, ומאופיינות על-ידי ביטויים כמו: "יותר מ...", "פחות מ...", "ב... יותר", "ב... פחות", לדוגמה:

לנירה 3 ספרים יותר מאשר לרמי.

לרמי 5 ספרים.

כמה ספרים יש לנירה?

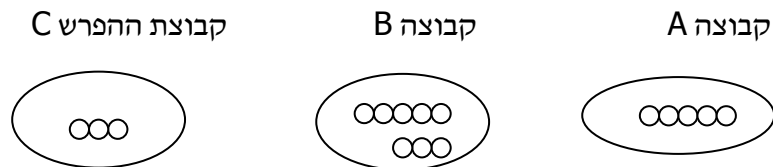
הקבוצות המופיעות בבעיה הן:

A קבוצת הספרים של רמי (קבוצה חלקית, קבוצה מושווית)

B קבוצת הספרים של נירה (קבוצת האיחוד, קבוצת ייחוס)

C קבוצת הפרש (קבוצה חלקית)

בקבוצה B יש שלושה ספרים יותר מאשר בקבוצה A.



המספר 3 מתייחס לקבוצה שהיא חלקית לקבוצה B (זוהי קבוצת הפרש).

הטעות הרווחת אצל התלמידים היא שהם אינם מבינים שהמספר 3 מתייחס לקבוצה שהיא

חלקית לקבוצה B, אלא מבינים שלנירה יש 3 ספרים, ומתעלמים מן הביטוי "יותר מ...".

הביטוי: "לנירה 3 ספרים יותר מאשר לרמי", כולל בו זמנית, שני סוגי אינפורמציה:

א. לנירה 3 ספרים יותר מאשר לרמי (שיקול סדר איכותי).

ב. שקבוצת הפרש מורכבת מ- 3 ספרים (שיקול כמותי).

בדרך כלל, לפי נשר, גרינו וריילי (1982) אי-ההבנה של C ככמות יחסית וכקבוצת הפרש, היא הגורמת למרבית הקשיים של הילדים. הילדים מפרשים בצורה לא נכונה את 3 ככמות אבסולוטית המציינת כמה יש לרמי.

סוג אחר של בעיות השוואה:

לנירה 8 ספרים.

ולרמי 5 ספרים.

למי יש יותר ספרים?

בנוסח הזה מדובר על שתי קבוצות בלבד וביניהן נעשית השוואת גודל.

הנוסח אינו עוסק "בכמה יותר" או "בכמה פחות".

תלמידים נוטים לבלבל בין שני הנוסחים.

הערות והארות לדפים למשתלם

דף למשתלם מס' 1: "התרנגולות והאווזים"

הטעות המקובלת בפתרון בעיית "התרנגולות והאווזים" היא הוספת ההפרש לקבוצה הגדולה יותר. טעות נוספת שהתקבלה במחקרה של בלודי-וינר (1998), שבדקה 270 סטודנטים בשאלון במכינה לאוניברסיטה, הייתה שחלק מהסטודנטים פתרו בעיה זו על-ידי כפל ב-12 במקום חיבור, או חילוק ב-12 במקום חיסור. הסטודנטים שהיא ריאיינה, טענו כי תרגמו בטעות את "גדול פי" במקום את "גדול ב".

דף למשתלם מס' 2: "ילדים פותרים בעיות השוואה"

הדף כולל שאלה ותשובות של תלמידים. המשתלמים מתבקשים לדרג את תשובות הילדים מ-0 עד 10.

בדירוג אופייני לפי מחקרה של פלד (2000), שביקשה מהמורים לדרג את תשובות הילדים מהחלש ביותר לטוב ביותר, יופיעו: הדר, יפתח, אביב, גילת, זאב וטובה, בערך בסדר זה, כטובים עד בינוניים. דובי ידורג כבינוני. ברוריה וורדה ידורגו כחלשות ביותר. נערוך דיון קצר בדירוג, במהלכו יועלו התלבטויות שונות לגבי חלק מהילדים. כך, למשל, יהיו מורים שיאמרו שדובי יודע את התשובה, אבל חסר מידע עליו, ואחרים שיאמרו כי הוא קרוב יותר לחלשים.

דף למשלמים מס' 3: "ילדים פותרים בעיות השוואה - המשך"

בדף מוצגים ההסברים הניתנים על-ידי הילדים לתשובותיהם, והמשתלמים מתבקשים לדרג מחדש את תשובות התלמידים.

בדירוג החדש, לפי מחקרה של פלד (2000), יפתח וגילת תופסים את המקומות הראשונים, אביב והדר 'מאכזבים' את מדרגיהם ויורדים אל המקומות שבין הבינוניים והחלשים. לגבי זאב וטובה יש חילוקי דעות: חלק מהמורים טוען שהם עובדים בדרך טכנית, וחלק אחר נותן להם עדיין הערכה בינונית (עם יותר מצדדים בזאב מאשר בטובה). ברוריה וורדה אינן 'משפרות' את מקומן. הדיון יתמקד בשאלה: איך, בעצם, הילדים האלו תופסים את המצב המתואר?

הקריטריון המוצע כדי לסייע באבחון: האם הילד תופס את הקבוצה המתוארת בפסוק "לרינה יש 5 בובות יותר מאשר לתמי" כקבוצת כל הבובות של רינה (לצורך דיון: 'הקבוצה המוחלטת') או מבין, כי מדובר כאן בהפרש (לצורך דיון: 'קבוצת ההפרש')? במקרה הראשון, הילד מבין מהתיאור

כי לרינה יש 5 בובות. תפיסה זו יוצרת אצלו תמיהה מסוימת, שכן אם לרינה יש 5 בובות, אז על מה שואלים? על-פי קריטריון זה ניתן לחלק את הילדים לקבוצות הבאות:

א. מבינים כי מדובר בקבוצת ההפרש: יפתח, גילת.

ב. תופסים כ'קבוצה מוחלטת': אביב, ברוריה, דובי, הדר, ורדה.

ג. אין עדות תפיסתית: זאב, טובה.

הצגת מצב הדברים בדרך זו גורמת לבחינה מחודשת של ההתייחסות לתשובות הילדים. בולט במיוחד הדיון לגבי מעמדן של ברוריה וורדה. בשני הדירוגים הן 'זכו' להופיע במקומות הנמוכים ביותר. כעת, כשהמיקוד הוא על תפיסת המצב, ומתברר כי אין הן נחותות מאחרים שדורגו כבינוניים, מתעוררת השאלה: האם צריך להעריך אותן יותר, מכיוון שהן גילו לנו מה הן חושבות, ולא ניסו לצאת מהקונפליקט על-ידי המצאה (לא בהכרח מודעת) של שאלות אחרות (דוגמת אביב שענה על "כמה ביחד"), או המצאת אירועים (דוגמת הדר שדיברה על סיפור דינמי בו תמי נותנת לרינה).

דף עבודה מס' 4: "סוגיות לדיון בסוגים של בעיות השוואה"

נשר, גרינו וריילי (1982) מחלקים את בעיות השוואה לסוגים הבאים:

1. שימוש ב"יותר", השאלה היא לגבי קבוצת ההפרש;
2. שימוש ב"פחות", השאלה היא לגבי קבוצת ההפרש;
3. שימוש ב"יותר", השאלה היא לגבי הקבוצה המשווית (הקבוצה הגדולה);
4. שימוש ב"פחות", השאלה היא לגבי הקבוצה המשווית (הקבוצה הקטנה);
5. שימוש ב"יותר", השאלה היא לגבי קבוצת הייחוס (הקבוצה הקטנה);
6. שימוש ב"פחות", השאלה היא לגבי קבוצת הייחוס (הקבוצה הגדולה).

במחקרם של נשר, גרינו וריילי נמצא כי שאלות השוואה מסוג 5 ו-6 היו קשות יותר מאשר כל סוגי שאלות השוואה האחרים.

כמו כן, בכל אחת מהשאלות יש רמז מילולי, כלומר, מילה מסוימת המסייעת (רמז עוזר) או מטעה (רמז מטעה) בבחירת הפעולה החשבונית, הדרושה לפתרון הבעיה. ההבהרה תיעשה דרך הדגמה באמצעות השאלות מדף למשתלם מס' 4:

1. בסל יש 8 תפוזים, ובצלחת יש ב-3 תפוזים פחות. כמה תפוזים יש בצלחת?
בשאלה זו רמז עוזר, מופיעה המילה פחות וצריך לעשות פעולת חיסור. השאלה הנשאלת היא לגבי הקבוצה המשווית (הקבוצה הקטנה).
2. בסל יש 8 תפוזים, ובצלחת יש 5 תפוזים. כמה תפוזים יותר יש בסל מאשר בצלחת?
בשאלה זו רמז מטעה, מופיעה המילה יותר וצריך לעשות פעולת חיסור. השאלה הנשאלת היא לגבי ההפרש.
3. בסל יש 8 תפוזים, ובצלחת יש 5 תפוזים. כמה תפוזים פחות יש בצלחת מאשר בסל?
בשאלה זו רמז עוזר, מופיעה המילה פחות וצריך לעשות פעולת חיסור. השאלה הנשאלת היא לגבי ההפרש.

4. בסל יש 8 תפוזים, ויש בו ב- 3 תפוזים **יותר** מאשר בצלחת. כמה תפוזים יש בצלחת?
 בשאלה זו רמז מטעה, מופיעה המילה **יותר** וצריך לעשות פעולת חיבור. השאלה הנשאלת היא לגבי **קבוצת הייחוס** (הקבוצה הקטנה).
5. בצלחת יש 5 תפוזים, ובסל יש ב- 3 תפוזים **יותר** מאשר בצלחת. כמה תפוזים יש בסל?
 בשאלה זו רמז עוזר, מופיעה המילה **יותר** וצריך לעשות פעולת חיבור. השאלה הנשאלת היא לגבי **הקבוצה המשווית** (הקבוצה הגדולה).
6. בצלחת יש 5 תפוזים, ויש בה ב- 3 תפוזים **פחות** מאשר בסל. כמה תפוזים יש בסל?
 בשאלה זו רמז מטעה, מופיעה המילה **פחות** וצריך לעשות פעולת חיבור. השאלה הנשאלת היא לגבי **קבוצת הייחוס** (הקבוצה הגדולה).
7. בסל יש 8 תפוזים. בצלחת יש ב- 3 תפוזים יותר. כמה תפוזים בצלחת?
 בשאלה זו רמז עוזר, מופיעה המילה **יותר** וצריך לעשות פעולת חיבור. השאלה הנשאלת היא לגבי **הקבוצה המשווית** (הקבוצה הגדולה).
8. בסל יש 8 תפוזים. יש בו ב- 3 תפוזים **פחות** מאשר בצלחת. כמה תפוזים יש בצלחת?
 בשאלה זו רמז מטעה, מופיעה המילה **פחות** וצריך לעשות פעולת חיבור. השאלה הנשאלת היא לגבי **קבוצת הייחוס** (הקבוצה הגדולה).
9. **בכמה קטן** מספר התפוזים שבמקרר ממספר התפוזים שבסל, אם במקרר יש 5 תפוזים ובסל יש 12 תפוזים?
 בבעיה זו שואלים על ההפרש ויש רמז עוזר - **בכמה קטן**.

נספחים

דף למשתלם מס' 1

התרנגולות והאווזים

- א. פתרו את בעיית "התרנגולות והאווזים" והתייחסו לנקודות הבאות:
- אילו קשיים עלו בפתרון הבעיה?
 - חוו דעה על הבעיה.

התרנגולות והאווזים

מספר התרנגולות בחצר גדול ב-12 ממספר האווזים. מספר התרנגולות הוא T ומספר האווזים הוא B. רשמו ביטוי אלגברי המתאר את המצב.

דף למשתלם מס' 2

ילדים פותרים בעיות השוואה

א. לפניכם תשובות של תלמידים שונים לבעיה הבאה:

לתמי 3 בובות.

לרינה יש 5 בובות יותר מאשר לתמי.

כמה בובות יש לרינה?

העריכו כל אחת מהתשובות בציון בין 0 ל-10 ונמקו.

| נימוק לציון | הערכה | תשובות התלמידים |
|-------------|-------|------------------------------------|
| | | 1. אביב: $3+5=8$ כי יש 8 בובות. |
| | | 2. ברוריה: יש לרינה 5 בובות. |
| | | 3. גילת: $3+5=9$ לרינה 9 בובות. |
| | | 4. דובי: יותר ממה שלטעמי. |
| | | 5. הדר: $5+3=8$ לרינה יש 8. |
| | | 6. ורדה: לא יודעת. |
| | | 7. זאב: $3+5=8$ זה 8. |
| | | 8. טובה: $3+5=8$ יצא לי 8. |
| | | 9. יפתח: $3+5=8$ יש לה 8. |

דף למשתלם מס' 3

ילדים פותרים בעיות השוואה - המשך

א. קראו את נימוקי הילדים לתשובותיהם והעריכו מחדש.

| תשובות התלמידים | נימוק התלמידים לתשובה | הערכה מחודשת לאחר קריאת הנימוק |
|------------------------------------|--|--------------------------------|
| 1. אביב: $3+5=8$ כי יש 8 בובות. | יש להם ביחד 8 בובות. | |
| 2. ברוריה: יש לרינה 5 בובות. | כתוב שלרינה יש 5 בובות. | |
| 3. גילת: $3+5=9$ לרינה 9 בובות. | לרינה יש יותר בובות מאשר לתמי אז אני מוסיפה את מה שיש לה יותר, ויוצא לי שלרינה יש 9. | |
| 4. דובי: יותר ממה שלטעמי. | 5 זה יותר מ-3, אז אני יודע שמי שיש לה יותר זה רינה. | |
| 5. הדר: $5+3=8$ לרינה יש 8. | לרינה בהתחלה יש 5 בובות. אם שואלים אותי כמה יש לה, אז סימן שתמי נתנה לה את שלה. | |
| 6. ורדה: לא יודעת. | אומרים לי כמה יש לרינה, אז למה שואלים? רוצים לבלבל? | |
| 7. זאב: $3+5=8$ זה 8. | יש כאן 3 בובות ויש 5 בובות, וכתוב 'יותר' אז אני מחבר. | |
| 8. טובה: $3+5=8$ יצא לי 8. | עשיתי 'ועוד' כי כל השאלות שאנחנו עושים עכשיו זה 'ועוד'. | |
| 9. יפתח: $3+5=8$ יש לה 8. | אפילו שלתמי יש 3, לרינה יש הרבה יותר. יש לה עוד 5 בנוסף ל-3. זה ממש לא צודק. | |

ב. דונו בקבוצות בנקודות הבאות:

- הגיעו להחלטה משותפת על הציון החדש.
- מהם הקשיים הלשוניים העולים מפעילות זו?
- מה החשיבות של התייחסות אל נימוקים?

דף למשתלם מס' 4

סוגיות לדיון בסוגים של בעיות השוואה

1. פתרו את הבעיות הבאות.
2. ציינו באילו מהבעיות אתם צופים קשיים ומדוע.
3. דרגו את הבעיות לפי רמת הקושי ותנו הסבר לדירוג.

בעיות השוואה

1. בסל יש 8 תפוזים, ובצלחת יש ב- 3 תפוזים **פחות**. כמה תפוזים יש בצלחת?
2. בסל יש 8 תפוזים, ובצלחת יש 5 תפוזים. כמה תפוזים **יותר** יש בסל מאשר בצלחת?
3. בסל יש 8 תפוזים, ובצלחת יש 5 תפוזים. כמה תפוזים **פחות** יש בצלחת מאשר בסל?
4. בסל יש 8 תפוזים, ויש בו ב- 3 תפוזים **יותר** מאשר בצלחת. כמה תפוזים יש בצלחת?
5. בצלחת יש 5 תפוזים, ובסל יש ב- 3 תפוזים **יותר** מאשר בצלחת. כמה תפוזים יש בסל?
6. בצלחת יש 5 תפוזים, ויש בה ב- 3 תפוזים **פחות** מאשר בסל. כמה תפוזים יש בסל?
7. בסל יש 8 תפוזים. בצלחת יש ב- 3 תפוזים **יותר**. כמה תפוזים בצלחת?
8. בסל יש 8 תפוזים. יש בו ב- 3 תפוזים **פחות** מאשר בצלחת. כמה תפוזים יש בצלחת?
9. **בכמה קטן** מספר התפוזים שבמקרר ממספר התפוזים שבסל, אם במקרר יש 5 תפוזים ובסל יש 12 תפוזים?

מקורות

- בלודי-וינר, ח' (1998). **בעיות בהבנת השפה האלגברית אצל תלמידי מכינה אוניברסיטאית**. חיבור לשם קבלת "דוקטור לפילוסופיה". האוניברסיטה העברית ירושלים.
- הרשקוביץ ש' וצוות המתמטיקה מט"ח. דפי השתלמות למורים בשנים שונות.
- פלג, א' (2000). פיתוח מודעות, מוטיבציה, ויכולת של המורה לאבחן מודלים סמויים של תלמידים. **עלון למורה המתמטיקה (על"ה)**, 26, 33-41.
- נשר, פ' (1976). שלושה מרכיבי קושי של שאלה מילוליות במתמטיקה. **עיונים בחינוך: כתב עת לעיון ולמחקר בחינוך**, 10. בית ספר לחינוך, אוניברסיטת חיפה.
- נשר, פ', גרינו, ג' וריילי, מ' (1982). **התפתחותן של קטגוריות עבור חיבור חיסור**. (תרגום פנימי של מטח למאמר שהתפרסם ב: Educational Studies in Mathematics, 13, 373-394).