

התחלקות בקבוצת המספרים הטבעיים מפגש מס' 2

ד"ר איליה סיניצקי, מכללת גורדון לחינוך
השתתפו בהכנת החומר ליחידה: אילנה לבנברג, שולי אופיר

תחום תוכן מתמטי (בהתאמה לסילבוס) - תכונות המספרים:

מספרים ראשוניים, מספרים פריקים, סימני התחלקות, הקשר שבין המבנה העשורי לסימני ההתחלקות, חזקות, גורמים ומחלקים של מספר.

רשימת מושגים מתמטיים - פירוק לגורמים ראשוניים, משפט היסוד של האריתמטיקה, חזקה של מספר, סימני התחלקות.

קישור לנושאים נוספים - תכונות החילוק בקבוצת המספרים הטבעיים, הוכחה דרך סינון אפשרויות, הוכחה דרך שלילה, חוקי פעולות החשבון, תנאי הכרחי ותנאי מספיק, מבנה עשירי של מספר טבעי.

חומרים ועזרים דרושים: דף למשתלמים, דפים למשתלם 1-5, 2 שקפים. הדפים למשתלם והשקפים נמצאים בנספחים שבסוף היחידה.

תוכן מפגש 2

א. הרכבת מספרים כמכפלת מספרים ראשוניים, פירוק מספר טבעי לגורמים, סופיות של תהליך הפירוק, קשר בין התהליכים;

ב. חד-משמעיות של פירוק המספר הטבעי לגורמים ראשוניים: משפט היסוד של האריתמטיקה.

ג. כתיבה קנונית של מספר טבעי, למה 1 אינו מספר ראשוני?

ד. מחלקים וכפולות, התחלקות המכפלה, במה מתחלקת המכפלה של N מספרים עוקבים?

ה. התחלקות של סכום והפרש, הוכחת משפטים פשוטים;

ו. הצגה של בעיית ההתחלקות, סימני התחלקות ומשמעותם;

ז. סימני התחלקות ב-2, ב-5, כפולות של 2 ושל 5 בלוח ה-100;

ח. התחלקות ב-4;

ט. סימני התחלקות ב-3 וב-9.

דפי הנחיות למרצה

מהלך מפגש 2:

הערה כללית: במהלך מפגש זה, עוברים ממשפט היסוד של האריתמטיקה אל בעיות ההתחלקות בקבוצת המספרים הטבעיים ומגיעים לסימני התחלקות.

1. הרכבת מספרים כמכפלת מספרים ראשוניים ופירוק מספר טבעי לגורמים

א. שאלה לפתיחה: מהם המספרים שניתן להרכיב באמצעות פעולת כפל ממספר טבעי נתון? **דף למשתלם מס' 1 (חלק א)** חוזר על מושג החזקה (הטבעית) של המספר הראשוני. דף זה מדגיש את השקילות של המושגים "גורם של המספר" ו"מחלק של המספר" דרך רישום המחלקים של המספר המורכב מגורמים ראשוניים.

פעילות זו משמשת כהכנה לפירוק מספר טבעי לגורמים ראשוניים, ואז מטפלת במחלקים של המספר 2^n (חזקות של 2, החל מ- $2^0 = 1$ עד 2^n) ו- 3^n . יש להכליל את השאלה למספר טבעי כלשהו.

בחלק ב של הדף מרכיבים מספרים משני גורמים ראשוניים (כדי להגיע ל- $2^m \times 3^n$). יש למנוע את הטעות האופיינית של כתיבת מספר טבעי כמכפלת שני גורמים ראשוניים עם אותה מעלה.

ב. שאלות נוספות שקשורות בפעילות **בדף למשתלם מס' 1**.

- מהו מספר המחלקים של המספר 2^n , של המספר 3^n ושל מספר 5^n ?

- כיצד לדעת, מהו מספר המחלקים של המספר $2^4 \times 3^2$ (בלי לחשב את הערך של המספר ולרשום את מחלקיו עצמם)?

שאלות אלו חשובות בהמשך לטיפול בנושא "מספר המחלקים של מספר טבעי".

ג. פירוק מספר טבעי לגורמים מטופל **בדף למשתלם מס' 2**

כדאי לכוון את המשתלמים לקחת לבדיקה מספרים שונים, ובינם גם מספרים "שמופיעים הרבה פעמים בלוח הכפלי" (מכפלות של חזקות מספרים ראשוניים שונים). אם נסמן את כל התהליכים האפשריים באותו איור, מתקבל תרשים (גרף) שמתאר את דרכי הפירוק של מספר נתון העומד בקודקוד הגרף, והבסיס של הגרף הוא מכפלת המספרים הראשוניים ששווה למספר הנתון. כאן ניתן להראות את הקשר בין הדרכים השונות לפירוק, ולהדגיש את "הירידה" ממספרים פריקים לגורמים הראשוניים.

שאלות לדיון בקשר לתרשים:

- מהו הקשר בין פירוק לגורמים והרכבת המספר מהמחלקים שלו? ("הליכה בכיוון הפוך בגרף, מהבסיס לקודקוד).

- למה תהליך הפירוק הוא סופי? (תזכורת: כאשר מספר טבעי הוצג כמכפלה של שני מספרים טבעיים שונים ממנו, שכל אחד מהם קטן ממנו – אז מספר צעדי הפירוק קטן מהמספר הנתון).

2. החד-משמעיות של פירוק המספר הטבעי לגורמים ראשוניים: משפט היסוד של האריתמטיקה

א. דיון בשאלה: מהם החוקים המתמטיים שמבטיחים את הפירוק היחיד? (להדגים את תפקידם של חוק החילוף ושל חוק הקיבוץ בכפל בתהליך הפירוק וברישום התוצאה).

ב. "כיצד לרשום את הפירוק בצורה קומפקטית?" – על שיטת הכתיבה באמצעות החזקות.

ג. משפט היסוד של האריתמטיקה: לכל מספר טבעי N קיימת הצגה אחת ויחידה כמכפלת

החזקות של מספרים ראשוניים p_1, p_2, \dots, p_n (שקף מס' 1)

$$N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

כדאי לנסח את המשפט בצורה שקולה במילים אחרות: אם יש שתי הצגות מסוג זה, הן שונות רק בסדר הגורמים הראשוניים.

ניסוח זה רומז על דרך הוכחת המשפט - דרך השלילה. יש להניח קיום של שתי הצגות שונות ולהשוות אותן:

$$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} = N = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot q_l^{\beta_l}$$

מחלק של מכפלת מספרים ראשוניים חייב להיות שווה לאחד מהגורמים, ומזה נובעת זהות בין קבוצות הגורמים (כלומר, רק סדר הגורמים יכול להשתנות) ושוויון של חזקותיהם. כדאי לרשום את השוויון הנ"ל ולהראות את עיקרון ההוכחה בלי להתרכז בפרטיה.

ד. למה 1 אינו מספר ראשוני?

כתיבה קנונית של מספר טבעי – כתיבת מספר טבעי כמכפלת חזקות טבעיות של מספרים ראשוניים שמסודרים בסדר עולה. יש לחזור ולהדגיש כי כתיבת מספר טבעי בצורה זאת היא חד-משמעית. נוסח זה נוח והוא הסיבה האמיתית מדוע לא לשייך את המספר 1 לקבוצת המספרים הראשוניים. אחרת - תמיד אפשר יהיה לכפול כל מספר ב- 1^n ובכך לקבל הצגות שונות של אותו מספר טבעי.

3. מחלקים וכפולות, התחלקות המכפלה

א. הצגת הבעיה: לכל מספר טבעי יש מחלקים שונים. כיצד לדעת, האם הוא מתחלק במספר טבעי מסוים ללא ביצוע פעולת החילוק? כיצד לדעת בוודאות שמספר טבעי נתון אינו ראשוני? דוגמה:

- האם המספר 221 מתחלק ב-13? כן, אך לא קל לומר מיד.

- האם מספר $13 \cdot 17 = 221$ מתחלק ב-13? בהחלט, כן. למה?

- האם מספר 1001 הוא מספר ראשוני? לא קל לומר מיד.

- האם מספר $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$ הוא מספר ראשוני? בהחלט, לא. למה?

ב. דף למשתלם מס' 3 עוסק בהתחלקות המכפלה.

שוב הודגשה שקילות המושגים גורם טבעי של המספר הנתון ומחלק של המספר הנתון. חשובה הצגת הכפולות באופן אלגברי: כל כפולה של מספר 2 ניתן להציג בצורה $2 \times k$, ומכך ברור כי

הוא מתחלק ב-2. נימוק זה משמש דגם לשתי הדוגמאות הבאות – וכאן בחרנו גם בכפולות של 3 ושל 6 כדי להדגיש את תקיפות ההצגה עבור כל סוג גורם: זוגי, אי-זוגי, ראשוני או פריק. חלק א של הדף מסתיים בנוסח המדגיש את הסימטריות של הטענה (כל מספר טבעי שניתן להצגה

כמכפלה $k \times m$ מתחלק גם ב- k וגם ב- m).

ג. הזוגיות של המכפלה

מטופל בפרק 1 של היישומים **בדף למשתלם מס' 3**. מהמשפט הישר (מכפלת מספר זוגי במספר טבעי מתחלקת ב-2, כלומר, מכפלת מספר זוגי במספר טבעי אחר תהה מספר זוגי) דרך הכללתו יש להביא את המשתלמים לקריטריון האי-זוגיות של המכפלה: מכפלת המספרים תהה מספר אי-זוגי רק כאשר כל הגורמים הם אי-זוגיים (למה? קיום לפחות גורם זוגי אחד גורר את הזוגיות של המכפלה). בשלב זה יש אפשרות לקשור את הנושא עם תכונות של לוח הכפל:

- אילו מספרים יש יותר בלוח הכפל, זוגיים או אי-זוגיים?
- מה ניתן לומר על שכנים של המספר האי-זוגי באותה השורה בלוח הכפל?
- מה ניתן לומר על שכנים של המספר האי-זוגי באותה העמודה בלוח הכפל?
- מה ניתן לומר על **כל השכנים** (לא רק מאותה השורה או אותה העמודה) של המספר האי-זוגי בלוח הכפל?

ד. סעיף 2 של היישומים **בדף למשתלם מס' 3** נותן סימן פשוט של התחלקות ב-4, ב-9 ובכלל בריבוע של מספר טבעי (מכפלת שתי כפולות של אותו מספר מתחלקת בריבוע של המספר). בסעיף 3 מגיעים להתחלקות במכפלת הגורמים של המספר. אפשר להסתפק בנימוקים מילוליים, אך רצוי מאוד שוב להתייחס להצגה אלגברית ולהדגיש את השימוש בחוקי הכפל בהוכחה (לפחות באמצעות דוגמה מספרית). מכפלת שני גורמים m ו- n , כאשר אחד מהם מתחלק ב- a והשני מתחלק ב- b , מתחלקת במכפלת ab :

$$k = m \times n = (ap) \times (bq) = a \times (p \times b) \times q = a \times (b \times p) \times q = (a \times b) \times p \times q$$

ה. פרק "התחלקות המכפלה"

כדאי לסיים בדיון על התחלקות של מכפלת מספר מספרים עוקבים:

- במה מתחלקת המכפלה של שני מספרים עוקבים? (אחד מהגורמים הוא זוגי, אז גם מכפלתם זוגית).
- במה מתחלקת המכפלה של שלושה מספרים עוקבים? (אחד מהגורמים מתחלק ב-3, ולפחות אחד זוגי, אז היא מתחלקת ב-6).

עם נימוקים מאותו סוג ניתן בקלות להחליט על התחלקות המכפלה של ארבעה מספרים עוקבים ב- $3 \times 4 = 12$, אך מסיבת קיום גורם זוגי נוסף המכפלה מתחלקת גם ב- $2 \times 3 \times 4 = 24$. בכלל, בכיתות חזקות ניתן להזכיר את התחלקות המכפלה של N מספרים עוקבים ב- $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times N = N!$ ולהסתפק בהסבר על-ידי דוגמה קונקרטית: "בין שבעה מספרים עוקבים יש גורם אחד שמתחלק ב-7, לפחות אחד שמתחלק ב-6 ו**בנוסף** לפחות עוד אחד שמתחלק ב-3, ... (ההוכחה הפורמלית דורשת את הבנתו של עיקרון ה-Dirichlet).

4. התחלקות של סכום והפרש, הוכחת משפטים פשוטים

א. הצגת השאלה (באנלוגיה עם המכפלה):

- האם ניתן להחליט על התחלקות הסכום במספר מסוים על-סמך התחלקותו של אחד מהמחברים במספר זה? (בתגובה על התשובה הטיפוסית "לא תמיד" יש להדגיש שקיום הדוגמה הנגדית מפריך את הטענה, והיא אינה נכונה: הסכום $4 + 5$ אינו מתחלק ב-2).

- מתי **כן** אפשר להחליט שסכום מתחלק במספר מסוים? ("כאשר כל אחד מהמחברים מתחלק במספר זה.")

- למה זה נכון?

(להדגיש את השימוש בחוק הפילוג בהוכחה: $(a + b + c) = kp + kq + kr = k \times (p + q + r)$.)

- האם אותה טענה נכונה לגבי הפרש של שתי כפולות של אותו המספר?

מסקנה: כאשר כל אחד מהמספרים a_1, a_2, \dots, a_n מתחלק במספר מסוים, כל סכום אלגברי שלהם $a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n$ מתחלק במספר זה.

ב. דוגמאות - מטלות מסוג זה: הסבירו, למה כל אחד מהמספרים הבאים מתחלק ב-7: 147, 224, 777, 784, 203, 693. (כדאי לבחור במחלק שלא ידוע למשתלמים מהו סימן ההתחלקות שלו כדי למנוע את הנימוקים "על סמך סימן ההתחלקות").

ג. הצגת הבעיה: מה ניתן לומר, כאשר יש בין המחברים כאלה שלא מתחלקים במספר נתון?

הצגת אוסף דוגמאות מסוגים שונים (למשל, $4+5$, $4+4$, $4+3$ בקשר להתחלקות ב-3, זוגי + אי-זוגי וכדומה בקשר להתחלקות ב-2) מביאה למסקנה: "אי-אפשר להחליט".

הצגת השאלה: אז, אולי ניתן לדעת, מתי הסכום של שני מספרים **בוודאות אינו מתחלק** במספר מסוים?

כן, כאשר אחד מהמספרים מתחלק במספר הנתון, והשני אינו מתחלק. הוכחה דרך השלילה על סמך טענה קודמת: אם הסכום $c = a + b$ מתחלק במספר מסוים וגם אחד מהמחברים מתחלק באותו מספר (נניח, a), אז גם המחבר השני מתחלק באותו מספר מכיוון שהוא ההפרש של שני מספרים שמתחלקים במספר המסוים $(b = c - a)$. יש להדגיש כי:

- משפט זה מאפשר הכללה פשוטה למספר כלשהו של מחברים והוא נכון גם לגבי סכום אלגברי $(a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n)$.

- ביתר המקרים (יותר ממחבר אחד "לא טוב") אנו זקוקים לכלים נוספים כדי להחליט על ההתחלקות.

ד. דוגמאות - מטלות מסוג זה:

- החליטו לגבי כל אחד מהמספרים הבאים, האם הוא מתחלק ב-13: 143, 286, 404, 1327, 1285.

- מתי סכום של שני מספרים טבעיים הוא אי-זוגי? ומה לגבי ההפרש?

ה. **שקף מס' 2** מסכם את המשפטים לגבי התחלקות המכפלה והתחלקות הסכום האלגברי.

5. הצגה של בעיית ההתחלקות. סימני התחלקות ומשמעותם

הערות לסעיף זה:

- א. בסעיף זה יש לדבר על חשיבות ההחלטה לגבי ההתחלקות ללא ביצוע החילוק - במיוחד התחלקות במספר ראשוני לצורך פירוק לגורמים ראשוניים.
- ב. כל המשתלמים יודעים את רוב סימני ההתחלקות הנלמדים, אך צריך לחדד את הגישה שלנו: מטרתנו היא לדעת לקבל אותם ולהבין, מדוע הם כאלה ולא אחרים- ולפעמים שונים כל כך.
- ג. מבחינה דידקטית, בהוכחת סימני ההתחלקות משולבים המשפטים הנלמדים לגבי התחלקות המכפלה והסכום עם המבנה העשרוני של המספר.
- ד. בדומה להרבה מקרים אחרים, שאיפתנו לקבל תנאי מספיק ("מתי מספר מתחלק ב...") נותנת בנוסף גם את התנאי ההכרחי ("מספר מתחלק אם ורק אם"). למרות השם המסורתי "סימני התחלקות" מדובר על הקריטריונים של התחלקות.

6. סימני התחלקות ב- 2, ב- 5, כפולות של 2 ושל 5 בלוח ה- 100 ובלוח ה- 6

סדר העבודה בסעיף זה:

- א. על השאלה "כיצד ניתן לדעת, האם המספר הנתון מתחלק ב- 2" כל המשתלמים יודעים לענות, אך לא כולם מבינים את השאלה "למה דווקא ספרת האחדות קובעת את ההתחלקות ב- 2?" המטלה היא להוכיח ללא ביצוע חילוק שמספר מסוים מתחלק ב- 2.
- ב. יש לציין את הכלים שברשותנו: משפטי התחלקות של המכפלה והתחלקות (כולל אי- התחלקות) של הסכום, ולהזכיר את הכתיבה העשרונית של המספר הטבעי (דוגמאות בלבד). למשל, למה 342 מתחלק ב- 2? כי ניתן להציג אותו כסכום: $342 = 3 \times 100 + 4 \times 10 + 2$ בו כל אחד מהמחוברים מתחלק ב- 2.
- ג. על מה מבוססת ההחלטה על התחלקות ב- 2 של כל המחוברים פרט לאחרון? האם ספרת העשרות, מאות, אלפים חשובה להתחלקות זאת? מהצגת כל המספר הטבעי באמצעות המבנה העשרוני נובעת המסקנה, שכדאי לבקש מהמשתלמים לנסח: מספר מתחלק ב- 2 אם ורק אם מספר שעומד במקום האחדות ("ספרת האחדות") מתחלק ב- 2, זאת אומרת, הוא 0, 2, 4, 6 או 8.

ד. השאלה "איפה נמצאות כפולות של 2 בלוח ה- 100 ובלוח ה- 6?" היא פשוטה מאוד, אך הכרחית לדיון על מיקום של כפולות של 5 ושל 3 בלוחות אלה, וגם להבנת התפקיד של החזקות של 10 במבנה העשרוני.

ה. טיפול בסימן התחלקות ב- 5 וכל השאלות הקשורות בכך מומלץ להשאיר למשתלמים, ולהדגיש את האנלוגיה בין סימני ההתחלקות ב- 2 וב- 5. כאן ניתן גם להזכיר את סימן ההתחלקות ב- 10 (שוב על סמך המבנה העשרוני, ולא דרך ההתחלקות במכפלה של 2 ו- 5).

ו. דף למשתלם מס' 4 "שובר" את האנלוגיה בין כפולות של 2 ושל 5 בלוח ה- 6.

בדיון על השאלה "למה כפולות של 5 לא נמצאות באותו מקום בשורות שונות?" רצוי להגיע לתשובה מדויקת (כי 5 אינו מחלק של 6) ולא להסתפק בהסברים מהסוג "בשורה הראשונה אחרי 5 יש עוד מספר, ואז בשורה השנייה הכפולה כבר במקום הרביעי ולא בחמישי", וכדומה.

א. סיניצקי

התחלקות בקבוצת המספרים הטבעיים: מפגש מס' 2

7. סימן התחלקות ב- 4

הערות לסעיף זה:

א. רצוי להתחיל מהצגה אלגברית של כפולות של 4, ואז לדון בקשר בין התחלקות ב- 4 והתחלקות ב- 2 ($4 \times k = 2 \times 2k$), התחלקות ב- 4 מספיקה להתחלקות ב- 2, התחלקות ב- 2 היא תנאי הכרחי אך לא מספיק להתחלקות ב- 4, כולל דוגמאות שמצביעות על הקשר. לסכם בשאלה: "האם יש מספר אי-זוגי שמתחלק ב- 4? למה לא?"

ב. כדאי לנסח "סימן התחלקות ב- 4" הדומה לסימן ההתחלקות ב- 2 או ב- 5, ולבדוק האם הוא "עובד". מתי הוא באמת עובד (כאשר העשרות מתחלקות ב- 4, זאת אומרת במקרה של כמות זוגית של העשרות).

ג. שוב להדגיש את התפקיד של המבנה העשרוני בקבלת סימן התחלקות באמצעות שאלות מהסוג: "מה בטוח מתחלק ב- 4 בסכום זה (ללא תלות בספרת המאות, האלפים וכו')?"

ד. בשלב היישום כדאי לבקש מהמשתלמים להרכיב מספרים רב-ספרתיים ולהחליט על התחלקותם או למחוק (או להחליף) במספרים אלה חלק מהספרות, ולשאל כיצד זה משפיע על התחלקותם.

ה. אפשר גם להראות את המיקום של הכפולות של 4 בלוחות מספרים, ושוב בהשוואה עם הכפולות של 2.

ו. בהחלט, אפשר גם להזכיר את סימן ההתחלקות ב- 8, אך להדגיש שה"רווח" כאן הוא רק למספרים רב-ספרתיים (כי רק $1000 = 10^3$ מתחלק ב- 8).

8. סימני התחלקות ב- 3 וב- 9, כפולות של המספר בלוחות המספרים

א. חשוב מאד לציין כי אנחנו רוצים לנמק את סימני ההתחלקות האלה ולהבין לא רק "איך זה עובד", אלא גם למה זה עובד בצורה כזאת ולא אחרת.

ב. שאלה לפתיחה: "למה סימני ההתחלקות ב- 3 וב- 9 שונים כל כך מסימני ההתחלקות ב- 2, ב- 5 וב- 4?" אפשר לחדד את השאלה: "בכלל, לחשב סכום של כל הספרות - רעיון מוזר ולא מסתדר עם כל הניסיון הקודם בנושא ההתחלקות".

ג. "ניסוי מאכזב".

באנלוגיה לסימני התחלקות קודמים, נרשום מספר בן 4 ספרות (למשל, שנת הלידה) כסכום של אלפים, מאות, עשרות ויחידות. ננסה למצוא את המחברים שמתחלקים ב- 3 ללא תלות בגורם המשתנה (ספרת אלפים, מאות, עשרות). האם חזקה כלשהי של 10 מתחלקת ב- 3?

ד. מה ניתן ללמוד מהניסוי הכושל?

שתי אפשרויות: "למה 10, 100, 1000 לא מתחלקים ב- 3? כי מספרים קטנים יותר באחד (9, 99, 999) מתחלקים ב- 3" או "מהו המספר שקרוב ל- 10 (100, 1000) שמתחלק ב- 3?" כדאי לבודד את המחובר שקרוב ל- 10^n ומתחלק ב- 3:

$$1957 = 1 \times 1000 + 9 \times 100 + 5 \times 10 + 7 = 1 \times (999 + 1) + 9 \times (99 + 1) + 5 \times (9 + 1) + 7$$

ואחרי פתיחת סוגריים כל הסכום מתפלג לשני מחוברים :

$$1 \times (999 + 1) + 9 \times (99 + 1) + 5 \times (9 + 1) + 7 = \underbrace{(1 \times 999 + 9 \times 99 + 5 \times 9)}_{\text{...}} + \underbrace{(1 + 9 + 5 + 7)}_{\text{...}}$$

כאשר הראשון מתחלק ב- 3 והשני שווה לסכום ספרותיו של המספר הנתון.

ה. מסקנה: מספר מתחלק ב- 3 אם ורק אם סכום ספרותיו מתחלק ב- 3 (דגש על קריטריון ההתחלקות).

הדגמת השימוש באותו העיקרון ומסקנה נוספת: מספר מתחלק ב- 9 אם ורק אם סכום ספרותיו מתחלק ב- 9.

הדגשת הקשר בין ההתחלקות ב- 3 והתחלקות ב- 9: תנאי הכרחי ותנאי מספיק. ו. יישום.

- להדגיש את חשיבותן של כל ספרות המספר להחלטה לגבי התחלקות ב- 3 (דוגמאות עם ספרות חסרות, החלפת ספרות ששומרת ולא שומרת על התחלקות).

- "שיפור" סימני ההתחלקות: האם יש צורך לחשב את סכום הספרות למספרים 99969, 6060, 9999299, 21212121?

ז. הכללת השיטה: על סימן ההתחלקות ב- 11. ל- 100, 10000, ... יש שארית 1 בחילוק ב- 11, אך ל- 10, 1000, ... חסר 1. להמחיש בדוגמה של מספר רב-ספרתי את השוואת שני סכומי ספרות. למשל: 47653 : הסכום (3+6+4) מול הסכום (7+5).

ח. כפולות של 3 ושל 9 בלוח ה- 100 ובלוח ה- 6.

פעילות דומה לדף למשתלם מס' 4. שימו לב לשוני במיקום הכפולות של 3 ושל 9 בלוח ה- 6. דיון: מתי כפולות של מספר מסודרות בעמודות? מה הקשר בין המספר ובסיס הלוח (מתאים ללוחות של מספרים טבעיים עוקבים, לא עובד, למשל, בלוחות מספרים המתחילים מאפס!)

9. תרגילים מסכמים

הרכיבו מספר או השלימו ספרות חסרות במספר (ספרה אחת או שתיים) כך שיתחלק בו-זמנית ב- 2 ו- 3; יתחלק ב- 2 אך לא יתחלק ב- 3 וב- 5; יתחלק ב- 9, ב- 3, ב- 5 ולא יתחלק ב- 2. (שימו לב: "אולי יש דרישות מיותרות?", "האם זה אפשרי?")

נספחים

דף למשתלמים

תוכן מפגש 2

- א. הרכבת מספרים כמכפלת מספרים ראשוניים, פירוק מספר טבעי לגורמים, סופיות של תהליך הפירוק, קשר בין התהליכים;
- ב. חד-משמעיות של פירוק המספר הטבעי לגורמים ראשוניים: משפט היסוד של האריתמטיקה;
- ג. כתיבה קנונית של מספר טבעי, למה 1 אינו מספר ראשוני?
- ד. מחלקים וכפולות, התחלקות המכפלה, במה מתחלקת המכפלה של N מספרים עוקבים?
- ה. התחלקות של סכום והפרש, הוכחת משפטים פשוטים;
- ו. הצגה של בעיית ההתחלקות, סימני התחלקות ומשמעותם;
- ז. סימני התחלקות ב-2, ב-5, כפולות של 2 ושל 5 בלוח ה-100;
- ח. התחלקות ב-4;
- ט. סימני התחלקות ב-3 וב-9.

רשימת מושגים מתמטיים

פירוק לגורמים ראשוניים
משפט היסוד של האריתמטיקה
חזקה של מספר
סימני התחלקות

קישור לנושאים נוספים

תכונות החילוק בקבוצת המספרים הטבעיים
הוכחה דרך סינון אפשרויות
הוכחה דרך שלילה
חוקי פעולות החשבון
תנאי הכרחי ותנאי מספיק
מבנה עשרוני של מספר טבעי

דף למשתלם מס' 1

הרכבת מספרים טבעיים כמכפלת מספרים ראשוניים

א. נתון המספר הראשוני 2. מהם המספרים הטבעיים הנוספים שניתן להרכיב ממנו באמצעות פעולת הכפל (שיכולה לחזור על עצמה מספר פעמים)?

כיצד תרשמו את המספרים שקיבלתם בעזרת פעולת החזקה?

מהם המחלקים של כל אחד מהמספרים שרשמתם?

מהם כל המחלקים של מספר 2^6 ?

מהם כל המחלקים של מספר 2^n ?

מהם כל המחלקים של מספר 3^n ?

ב. נתונים שני מספרים ראשוניים 2 ו-3. מהם המספרים הטבעיים שניתן להרכיב מהם באמצעות פעולת הכפל?

באילו מספרים מתחלקים המספרים שהרכבתם?

דף למשתלם מס' 2

פירוק מספר טבעי לגורמים

א. בחרו מספר טבעי דו-ספרתי שמופיע בלוח הכפל והציגו אותו כמכפלה של שני גורמים טבעיים השונים ממנו.

אם ניתן לפרק לפחות אחד מהגורמים שהתקבלו, המשיכו בתהליך.

כאשר אי-אפשר להמשיך בתהליך, מה אפשר לומר על כל אחד מהגורמים שהתקבלו?

הציגו את המספר הנבחר כמכפלה של הגורמים "הפשוטים ביותר".

מהם החוקים המתמטיים המאפשרים לכם צורת הצגה זו?

ב. האם ניתן לפרק את המספר הנבחר למכפלת שני גורמים השונים ממנו בדרך שונה מהדרך הקודמת?

הציגו את שני התהליכים בצורה ויזואלית כתרשים.

מהן מסקנותיכם?

דף למשתלם מס' 3

התחלקות המכפלה

- א. השלימו את המשפט: כל כפולה של שתיים מתחלקת ב-_____.
- הסבר: כל כפולה של המספר 2 ניתן להציג בצורה _____, ומכך _____.
- השלימו את המשפט: כל כפולה של שלוש מתחלקת ב-_____.
- הסבירו את טענתכם.
- השלימו את המשפט: כל כפולה של שמונה מתחלקת ב-_____.
- הסבירו את טענתכם.
- הכללה: כל כפולה של מספר טבעי k מתחלקת ב- k .
- מסקנה: להוכחת ההתחלקות של מספר טבעי n במספר טבעי k מספיק להציג את n ככפולה של k .
- נוסח סימטרי: כל מספר טבעי שניתן להצגה כמכפלה $k \times m$ מתחלק גם ב- k וגם ב- m .
- ב. יישום.
1. על זוגיות המכפלה: מכפלת מספר זוגי במספר טבעי מתחלקת ב- _____, כלומר, מכפלת מספר זוגי במספר טבעי אחר תהיה מספר _____.
- הכללה: מכפלת מספר גורמים כאשר יש בינם גורם זוגי, _____.
- מכפלת המספרים תהיה מספר אי-זוגי רק כאשר _____ למה?
2. מכפלת שני מספרים זוגיים היא זוגית, אך בנוסף היא מתחלקת גם ב- _____ למה?
- מכפלת שתי כפולות של 3 מתחלקת ב- 3, אך בנוסף מתחלקת גם ב- _____.
- הכללה: מכפלת שתי כפולות של אותו מספר מתחלקת ב- _____.
3. מכפלה של שני גורמים כאשר אחד מהם מתחלק ב- 2 והשני מתחלק ב- 3 מתחלקת ב- _____ למה?
- מכפלה של שני גורמים כאשר אחד מהם מתחלק ב- a והשני מתחלק ב- b מתחלקת ב- _____ למה?

דף למשתלם מס' 4

כפולות של 2 וכפולות של 5 בלוח ה- 100 ובלוח ה- 6

א. מה אפשר לומר על מיקום הכפולות של 2 בלוח ה- 100?

מה אפשר לומר על מיקום הכפולות של 5 בלוח ה- 100?

ב. המספרים הטבעיים מסודרים בשש עמודות (לוח ה- 6):

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60

...

מה אפשר לומר על מיקום הכפולות של 2 בלוח ה- 6?

מה אפשר לומר על מיקום הכפולות של 5 בלוח ה- 6?

למה הכפולות של 5 לא נמצאות באותו מקום בשורות שונות?

ג. אם נבנה את לוח ה- 5, איפה ימצאו בו כפולות של 5 ואיפה ימצאו בו כפולות של 2?

דף למשתלם מס' 5**דף משימות בנושא מספרים ראשוניים**

1. בדקו, האם מספר ארבע-ספרתי הכתוב משני מספרים דו-ספרתיים זהים (לדוגמה, 1313) יכול להיות ראשוני.

2. הוכיחו שסכום של שני מספרים עוקבים אינו מתחלק ב-2.

3. האם סכום של שלושה מספרים עוקבים מתחלק ב-3?

4. מה אפשר לומר לגבי התחלקות של סכום של ארבעה מספרים עוקבים?

5. מה אפשר לומר לגבי התחלקות של סכום של חמישה מספרים עוקבים?

6. הוכיחו שכל מספר ריבועי זוגי מתחלק ב-4.

שקף מס' 1

משפט היסוד של האריתמטיקה

כל מספר טבעי ניתן להציג בצורה חד-משמעית
 כמכפלת חזקות של מספרים ראשוניים.

$$N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

המספרים הראשוניים p_i הם אורמים ראשוניים של N .

$$48 = 2^4 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^1 : \text{למשל}$$

שקף מס' 2

התחלקות של המכפלה, של הסכום ושל ההפרש

- כאשר מכפלת המספרים יש אורט שמתחלק במספר מסוים, כל המכפלה מתחלקת במספר זה.

- התחלקות של אחד מאוראי המכפלה מספיקה להתחלקות המכפלה.

- כאשר כל אחד מהמחברים מתחלק במספר מסוים, גם הסכום שלהם מתחלק במספר זה.

- כאשר מחוסר ומחסר מתחלקים במספר מסוים, גם ההפרש שלהם מתחלק במספר זה.

- כאשר כל אחד מהמספרים בסכום אלאברי מתחלק במספר מסוים, גם הסכום האלאברי מתחלק במספר זה.

- כאשר אחד מבין שני המחברים מתחלק במספר מסוים והשני אינו מתחלק במספר זה, כל הסכום אינו מתחלק במספר זה.

- כאשר בין מחוסר ומחסר בדיוק אחד מתחלק במספר מסוים, ההפרש שלהם אינו מתחלק במספר זה.