התחלקות בקבוצת המספרים הטבעיים: מפגש מס' 3
סימני התחלקות

ד״ר איליה סיניצקי - מכללת גורדון

תחום תוכן מתמטי (בהתאמה לסילבוס) - תכונות המספרים: סימני התחלקות, מספר טבעי בכתיב החזקות, סכום המחלקים של מספר טבעי.

רשימת מושגים מתמטיים שנלמדים בפעילות - מחלקים של מספר (מספר המחלקים, סכום המחלקים), מיון מספרים טבעיים לפי סכום המחלקים, מספרים משוכללים.

זמן משוער לפעילות - 4 ש״ל.

קישור לנושאים נוספים: תכונות החילוק בקבוצת המספרים הטבעיים, המבנה העשרוני של מספר טבעי, משפט ומפשט הפוך, עיקרון הכפל, סדרה הנדסית וסכום הסדרה, בעיות פתוחות בתורת המספרים.

חומרים ועזרים דרושים: דפים למשתלם מס׳ 1-6, שקפים מס׳ 1-5. הדפים למשתלם והשקפים נמצאים בנספחים בסוף היחידה.

תוכן מפגש 3

א. שני סימני ההתחלקות ב- 11, דירוג סימני ההתחלקות לפי מורכבותם.

ב. עיקרון ההתחלקות של הסכום ושל ההפרש כבסיס להבניית ״סימן ההתחלקות האוניברסלי״ לבדיקת ההתחלקות בכל מספר ראשוני. התחלקות ב- 7, 19, 13.

ג. התחלקות במכפלה: הצגת הבעיה. סימני התחלקות ב- 6, 15. כיצד להחליט על התחלקות ב- 12, 18, 20?

ד. מחלקים של מספר. שיטת הסינון לרישום המחלקים. האם קיים מספר טבעי שמספר מחלקיו הוא אי-זוגי?

ה. מחלקים של חזקות המספרים הראשוניים, פירוק לגורמים ורשימת המחלקים, כתיבת המחלקים בכתיב החזקות.

ו. המחשות: טבלת המחלקים ועץ המחלקים, מספור המחלקים של המספר הטבעי.

ז. סכום המחלקים, סכום המחלקים של חזקות המספר הראשוני.

ח. מיון מספרים טבעיים לפי סכום המחלקים, מספרים משוכללים.

דפי הנחיות למרצה

מהלך מפגש 3

1. דירוג סימני ההתחלקות לפי מורכבותם, סימני ההתחלקות ב- 11

א. **דיון בשאלות**:

- מדוע יש סימני התחלקות 'פשוטים' יותר ומורכבים יותר?
- מדוע אין סימן התחלקות נוח ב- 7 או ב- 13?

המטרה של הדיון היא להדגיש שוב את תפקיד המבנה העשרוני כביסוס לסימני ההתחלקות הידועים למתמקצעים. "מתי זה עובד?" – כאשר יש חזקה של 10 שמתחלקת במספר ללא שארית (סימני ההתחלקות ב- 2, ב- 5, ב- 4, ב- 8), כל חזקה של 10 מתחלקת עם אותה השארית (סימני ההתחלקות ב- 3 וב- 9) או ששאריות מתחלפות לסירוגין (סימן ההתחלקות ב- 11).

ב. הצגת **שקף מס' 1** - סימן התחלקות ב- 11 בגישה אחרת. חשוב להדגיש את הצגת המספר הרב-ספרתי כסכום של מאות (100a) ומספר דו-ספרתי (b) גם בדוגמאות וגם בכתיבה אלגברית. כאן פיצול הסכום לשני מחוברים (a+b) + 99a דומה לפירוק שמוכר למשתלמים מפיתוח סימני ההתחלקות ב- 3 וב- 9. במהלך הבדיקה, לכל המספרים שמתקבלים כסכום a+b יש אותה השארית בהתחלקות ב- 11, כמו למספר הנבדק.

ג. **הבניית סימן ההתחלקות ב- 11** על-ידי המשתלמים באמצעות **דף למשתלם מס' 1**. הדרך להבניית סימן ההתחלקות דומה לזאת שהוצגה ב**שקף מס' 1.**

בסעיף ד, מגיעים המשתלמים למסקנה: "המספר 10a + b מתחלק ב- 11 רק כאשר ההפרש a – b מתחלק ב- 11. יש לציין, כי בשלבים הסופיים של מהלך הבדיקה עלולים להתקבל מספרים שליליים (מהמספר 23, למשל, מקבלים את ההפרש 1– = 3 – 2). אך כל ההפרשים החד-ספרתיים האלה מצביעים בהחלט על כך, שהמספר הנבדק אינו מתחלק ב- 11.

שימו לב, כי שיטת הבדיקה (בניגוד לכל הסימנים הקודמים) אינה שומרת על השארית. יותר מדויק, היא נותנת בסוף את השארית הנכונה כאשר מספר פעולות החיסור שבוצע בדרך, הוא זוגי.

שיטת הבדיקה של ההתחלקות ב- 11 שהתקבלה, מבוססת על עיקרון ההפרדה של ספרת היחידות מהמספר וחיסורה מהמספר המתקבל. ניתן לנסח את השיטה באנלוגיה עם השלבים המוצגים ב**שקף מס' 1.**

ד. בנוסף לטיפול בשאלות בדף, כדאי להשוות את סימן ההתחלקות שהוצג ב**שקף מס' 1** עם סימן ההתחלקות שהוצג ב**דף למשתלם מס' 1** מבחינת החישובים הדרושים: במקרה הראשון זאת הוספה של מספרים דו-ספרתיים (מפרידים את ספרת העשרות וספרת האחדות ומחברים מספר דו-ספרתי זה למספר המאות), ובמקרה השני הפעולה היא חיסור מספר חד-ספרתי (מפרידים את ספרת האחדות ומחסרים מספר זה ממספר העשרות), אך מספר הפעולות עד קבלת ההחלטה על ההתחלקות הוא כפול. לצורך המחשת הדיון, כדאי לתת למשתלמים לבחור את המספרים לפי רצונם ולערוך את בדיקת ההתחלקות בזוגות, שכל אחד מבני הזוג יבחר בשיטה שונה.

2. "סימן ההתחלקות האוניברסלי"

א. הצגת הבעיה למשתלמים: "ננסה להתאים את השיטה לבדיקת ההתחלקות במספרים ראשוניים אחרים". כדי לכוון את התהליך, כדאי לקחת מספר ראשוני מסוים (למשל, 19) ולדון בשאלות הבאות:

- אם מספר מתחלק ב- 19, מה ניתן לומר על כל הכפולות שלו, למשל על המספר הגדול פי 2 או פי 3 ממנו?
- ולהפך, אם מספר מתחלק ב- 19, מה ניתן לומר על חצי או שליש ממנו (בתנאי שאלה מספרים טבעיים)?
- מהי ההכללה לגבי הכפולות של 19? (מכיוון ש- 19 הוא מספר ראשוני, המספר a מתחלק ב- 19 אם ורק אם המספר ka מתחלק ב- 19 לכל מספר k טבעי שקטן מ- 19).

ב. הצגת **שקף מס' 2** - שיטה לבדיקת ההתחלקות ב- 19. השיטה דומה מאוד לשיטה שתורגלה **בדף למשתלם מס' 1.** גם כאן כדאי לציין כי השיטה אינה שומרת את השארית אם המספר הנתון אינו מתחלק ב- 19 (השארית מוכפלת אחרי כל שלב, כי אלגוריתם החישוב מכיל הכפלת המספר הנבדק).

ג. להבנת העיקרון, מומלץ לתרגל את השיטה באמצעות **דף למשתלם מס' 2**. הדגם המצורף מציג את השיטה הקומפקטית לביצוע תהליך הבדיקה. שימו לב, כי:

- אפשר להפסיק את התהליך בכל שלב, כאשר ידועה ההתחלקות ב- 19 של המספר המתקבל.
- אם ממשיכים את הבדיקה "עד הסוף", המספר האחרון הוא 19 (והוא מתחיל לחזור לעצמו: כאשר מפרידים את ספרת היחידות, נקבל 1|9, ומכאן $19 = 9 \times 2 + 1$.
- אם מתקבל בסוף התהליך מספר d שקטן מ- 19, המספר הנתון אינו מתחלק ב- 19, אך d **אינה** השארית בחילוק המספר הנתון ב- 19.

ד. כשלב מסכם, המשתלמים מפתחים בעצמם את סימני ההתחלקות לכל מספר ראשוני באמצעות **דף למשתלם מס' 3**. מטרת הפעילות היא פיתוח מיומנות העבודה עם המבנה העשרוני של המספר בשפה האלגברית. הפיתוח מתחיל מההתחלקות במספרים שספרת היחידות שלהם היא 1 או 9 – באנלוגיה עם סימן ההתחלקות ב- 19. בשלב השני מטופלים המחלקים שספרת היחידות שלהם היא 3 או 7. התשובות הצפויות של המתמקצעים מרוכזות בדף הפתרונות שבנספחים. חמש הערות לגבי השיטה המפותחת:

- במהלך בדיקת ההתחלקות במספרים שספרת היחידות שלהם היא 1 עלולים להתקבל מספרים שליליים בשלבים סופיים של הבדיקה – כמו בסימן ההתחלקות השני ב- 11.
- גישה זאת מאפשרת מספר אפשריות לבדיקת ההתחלקות. למשל, כדי לבדוק את ההתחלקות ב- 13, ניתן לעבור מהמחולק $10a + b$ ל- $4(10a + b)$, ולעבוד דרך חיבור עשרות עם מספר היחידות מוכפל בארבע - $4b$. אך אפשר גם לעבור ל- $9(10a + b)$, ובדיקת ההתחלקות תתבסס על חיסור המספר $9b$ ממספר העשרות.

- ברור כי גישה זאת מאפשרת לבדוק את ההתחלקות לא רק במספר ראשוני, אלא בכל מספר אחר, בתנאי שמספר העשרות שמגיעים אליו בבניית התהליך זר למחלק. למשל, זה תמיד נכון כאשר ספרת היחידות של המחלק היא 1 או 9. זאת אומרת, שבאותה דרך ניתן לבצע את בדיקת ההתחלקות ב- 51 או 69.

- נובע מכך, שתוך תהליך אחד ניתן לברר את ההתחלקות בשני מספרים ראשוניים בו-זמנית. למשל, התחלקות המספר $10\ a + b$ ב- 7 וב- 13 נבדקת באמצעות $a - 9\ b$. המספר הסופי 0 בתהליך הבדיקה מסמן את התחלקות המספר הנבדק בשני המחלקים 7 ו- 13, אך, למשל, התשובה 14 מצביעה על התחלקות ב- 7 ועל אי-התחלקות ב- 13.

- ברור, כי השיטה דורשת חישובים קשים יותר, כאשר מדובר על בדיקת ההתחלקות במספרים "גדולים": לבדיקת ההתחלקות ב- 131 יש בכל שלב של הבדיקה לחסר מהעשרות את ספרת האחדות מוכפלת ב- 13.

3. בדיקת ההתחלקות במכפלה

א. הצגת הבעיה: **כיצד לבדוק את ההתחלקות ב- 6?** באופן אינטואיטיבי, וגם על סמך ידע קודם, משתלמים עונים שלהתחלקות ב- 6 צריך לבדוק התחלקות ב- 2 וב- 3. כדאי לברר כי כאן מופיע גם תנאי הכרחי וגם תנאי מספיק:

- כל מספר שמתחלק במספר מסוים, מתחלק גם בכל אחד ממחלקיו, מכאן שכל כפולה של 6 מתחלקת גם ב- 2 וגם ב- 3 (רואים זה בקלות, כאשר כפולה של 6 נרשמת כ- 6k). התחלקות ב- 2 וב- 3 מהווה לכן תנאי הכרחי להתחלקות ב- 6. במילים אחרות, מספר שלא מתחלק ב- 2 (ב- 3) בטוח אינו מתחלק ב- 6. שאלות טיפוסיות לבדיקת ההבנה הן: "האם קיים מספר אי-זוגי שמתחלק ב- 6?", "האם מתחלק ב- 6 המספר 10, 10^2, ..., 10^n?"

- מצד שני ההתחלקות הבו-זמנית ב- 2 וב- 3 מספיקה להתחלקות ב- 6: נרשום כפולה של 2 בצורה 2k, ומהתחלקותה ב- 3 נובע כי k מתחלק ב- 3 (כי ל- 2 ו- 3 אין מחלקים משותפים!), $k=3m$, והמספר הנבדק הוא כפולה של 6: $2k=2(3m)=6m$.

ב. **סימן ההתחלקות ב- 6**. את ניסוחו אפשר להשאיר למשתלמים (למשל, מספר מתחלק ב- 6 אך ורק אם הוא זוגי וסכום ספרותיו מתחלק ב- 3), אך רצוי להדגיש שגם במקרה זה הסימן הוא קריטריון (תנאי הכרחי ומספיק). בשלבי היישום כדאי לדון עם המשתלמים על:

- מניעת השגיאה הטיפוסית של הערבוב בין שני סימני ההתחלקות הבלתי קשורים (המספר 126 מתחלק ב- 6 למרות שסכום ספרותיו אינו מתחלק ב- 6).

- האסטרטגיה האופטימלית לבדיקת ההתחלקות ב- 6 (להתחיל מבדיקת הזוגיות).

- דירוג השאלות שמוצגות לתלמידים על סמך ההתחלקות בו-זמנית ב- 2 וב- 3.

למשל, השוואה בין השאלות הבאות מבחינת האסטרטגיות להתמודדות ומספר הפתרונות:

"להשלים את ספרת העשרות במספר 123?4 כדי לקבל מספר שמתחלק ב- 6"

"להשלים את ספרת היחידות במספר 1234? כדי לקבל מספר שמתחלק ב- 6"

"להשלים את ספרת העשרות במספר 123?5 כדי לקבל מספר שמתחלק ב- 6"

ג. הצגת השאלה: "**האם ניתן לפתח את סימני ההתחלקות במספרים פריקים אחרים על סמך אותו העיקרון?**" יש להדגיש בהקשר זה, בתחילת הדיון, כי התחלקות ב- 10 גם נבדקת כשילוב ההתחלקויות ב- 2 וב- 5. אך יש להגיע למסקנה "שזה לא תמיד עובד" (מספר שמתחלק ב- 2 וב- 4 לא חייב להתחלק ב- 8). מצב זה מהווה גם דוגמה של שני משפטים ההפוכים אחד לשני, אך אחד מהם נכון והשני אינו נכון: מספר שמתחלק במכפלת שני מספרים מתחלק בכל אחד מהם, אך התחלקות בכל אחד משני המספרים לא מבטיחה את ההתחלקות במכפלתם. כדאי לקחת מספר מסוים ולבדוק את הדרכים השונות של פירוקו לגורמים, כדי למיין את הפירוקים ל-"מתאימים" ו- "לא מתאימים". לדוגמה:

- כיצד לבדוק ההתחלקות ב- 18? 18 זאת מכפלה של 3 ו- 6, ומהתחלקות ב- 3 וב- 6 ניתן/ לא ניתן להחליט על התחלקות ב- 18. למה? (המספר 12 כדוגמה נגדית).

- כיצד לבדוק התחלקות ב- 18? 18 זאת מכפלה של 2 ו- 9, ומהתחלקות ב- 2 וב- 9 ניתן/ לא ניתן להחליט על התחלקות ב- 18. למה?

המטרה של הדוגמאות היא להראות את חשיבות הצגת המספר כמכפלת מספרים זרים. טיפול מפורט במספרים זרים מתקיים במפגש 4 של הסדרה.

יש לציין שבדיקת ההתחלקות במספר פריק דורשת את הפירוק שלו לגורמים "שאין להם מחלקים משותפים" (מספרים זרים), ומסיבה זאת לכל החזקות של מספר ראשוני צריך לפתח סימן התחלקות מיוחד (כמו התחלקות ב- 4, ב- 9, ב- 8).

ד. **סיכום ביניים לנושא ההתחלקות**. בשלב זה משתלמים מתבקשים לסכם את הידע שלהם בנושא ההתחלקות בשני מישורים: תנאי ההתחלקות (ואי-התחלקות) של סכום אלגברי ומכפלה ומיון סימני ההתחלקות לפי רמת מורכבותם.

4. מחלקים של מספר טבעי

א. תזכורת: מהו המחלק של מספר טבעי? לצורך פיתוח שיטות יעילות למציאת מחלקי המספר, כדאי להזכיר את ההגדרה של מושג ההתחלקות ולברר את המושג "המחלק" (ראה גם **דף למשתלם מס' 1** במפגש הראשון):

מספר טבעי b הוא **מחלק של מספר טבעי** a אם ורק אם קיים מספר טבעי c שמקיים את השוויון:

$$a = b \cdot c.$$

ב. שיטות אינטואיטיביות למציאת המחלקים של מספר טבעי – **דף למשתלם מס' 4**.

- במהלך ההתמודדות עם דף זה המשתלמים מיישמים את הידע שלהם לגבי מושג המחלק ושימוש בסימני ההתחלקות ("אין צורך לבדוק האם 6 הוא מחלק אם ידוע ש- 3 אינו מחלק של המספר").
- בתשובה לסעיף ב ירגישו המשתלמים כי למספרים שיש להם הרבה מחלקים אנחנו זקוקים לשיטתיות בחיפושים.
- סעיף ג מסביר את שיטת הקשתות: "**מסקנה:** אם a הוא מחלק של מספר M, ו- b זאת המנה של חילוק זה, אז גם b הוא מחלק של M (ותוצאת החילוק שווה ל- a)". כדגם להצגת המחלקים בזוגות ניתן להשתמש ב**שקף מס' 3**.
- בסעיף ה המשתלמים מנסחים את אסטרטגיות החיפוש: לדלג על בדיקת ההתחלקות במספר שהוא כפולה של אי-מחלק, לעצור כאשר "נפגשים" במחלק ומנה. בין התוצאות הבלתי צפויות יכולות להיות "תמונות דלות מדי" (מחלקים של מספר ראשוני – זוג אחד בלבד) או "תמונה עם מקל" (אין בן-זוג למחלק שהוא השורש הריבועי של המספר הנתון).
- סעיף ו עוסק בהסקת המסקנה לגבי הזוגיות של מספר המחלקים: למספרים הריבועיים, ורק להם, יש מספר אי-זוגי של מחלקים. כדאי להדגים את המצב עם הצגת המחלקים של 36 (או של 100) ושל 64 בעזרת **שקף מס' 4** (במיוחד אם לימוד הנושא הוא בתקופה הקרובה לחנוכה או יום העצמאות).

ג. סעיף ז של **דף למשתלם מס' 4** פותח דיון בנושא של **מספר המחלקים של מספר טבעי**. ללא ספק, המשתלמים יודעים כי מספר המחלקים של מספר טבעי לא חייב לגדול עם גידול המספר. הם מביאים גם דוגמאות של זוגות מספרים שהגדול ביניהם הוא מספר ראשוני (60 ו- 61, 125 ו- 127). אך מסיבה זאת הם יכולים לפסול לגמרי את הגרעין הרציונלי שבטענה. נכון, שמספר המחלקים של 30 גדול ממספר המחלקים של 10, ולא במקרה. כדאי לדון עם המשתלמים על הטענה הבאה: לכל מספר שהוא כפולה של מספר טבעי N (ושונה ממנו), מספר מחלקיו גדול ממספר המחלקים של N. (כי כל מחלק של N מחלק את כפולתו, ונוספים מחלקים חדשים – למשל, הגורם שבו הוכפל N.)

ד. הצגת השאלה: "כיצד להיות בטוחים שאף מחלק (זוג מחלקים) לא מפוספס?" בהמשך הסדנה מפותחת שיטת המספור של כל המחלקים של מספר טבעי נתון המבוססת על פירוקו לגורמים ראשוניים והצגתו בכתיב חזקות.

5. מחלקים של חזקות המספרים הראשוניים

שלבי טיפול בנושא:

- מחלקים של 2, 4, 8, 16 (בכל שלב נוסף מחלק חדש אחד – המספר עצמו).

- המחלקים של המספר 2^n הם כל החזקות של 2, החל ב- $2^0=1$ עד למספר עצמו 2^n. כדאי להדגיש, כי לו החזקות היו מחזקת 1 עד חזקת n כמותן היתה שווה ל- n, אך בין המחלקים יש גם 2^0, ולכן מספר המחלקים שווה ל- n+1.
- דוגמה נוספת – מחלקים של מספר שהוא חזקה של 3.
- הכללה – "מספר המחלקים של המספר p^n, **כאשר p הוא מספר ראשוני**, שווה ל- n+1.
- **תזכורת**: התוצאה תקיפה רק לחזקות של מספר ראשוני.
- **דוגמה**: "כמה מחלקים יש למספר $4^3 = 64$?" (שימוש מיידי בנוסחה נותן, כמובן, תשובה לא נכונה, יש להציג את 4 כריבוע של 2.)

6. מספר המחלקים של מספר טבעי כלשהו

א. הצגת הרעיון: "**האם ניתן להשתמש בשיטה דומה כדי למצוא בשיטתיות את כל המחלקים של כל מספר טבעי?**" יש להדגיש ששיטה שפותחה לגבי חזקות של מספר ראשוני, היא סיסטמתית ונותנת את כל המחלקים של המספר הנתון, וברצוננו להכליל אותה ליתר המספרים הטבעיים. בשלב זה ניתן לבחור מספר דרכים שמביאות למספור המחלקים של מספר טבעי, למשל:

- (דרך "הרכבת המספר") "מהם המחלקים שנוספים למספר 2^n אם נכפיל אותו ב- 5?" כל אחד מהמחלקים a של 2^n משמש כמקור לשני מחלקים של המספר $2^n \times 5$: מספר a ומספר 5a.
- (דרך "פירוק המספר") "כיצד לקבל את כל המחלקים של המספר 40 באמצעות פירוקו לגורמים ראשוניים?"

בשני מקרים אלה, מגיעים המשתלמים לרשימת המחלקים של המספר. למשל, המחלקים של 40 הם: 1, 2, 4, 8, 5, 10, 20, 40. ברשימה זאת ארבעת המחלקים הראשונים הם חזקות של 2, וכל היתר הם מכפלותיהם ב- 5.

ב. **טבלת המחלקים**. "כיצד להציג את כל המחלקים בצורה נוחה וקומפקטית?" בהתאם לסדר הנבחר, ניתן להרכיב את טבלת המחלקים (**שקף מס' 5**, הטבלה הראשונה). יש להדגיש, כי בשורה ראשונה מופיעים המחלקים שקיבלנו ללא כפל ב- 5 (או נכפלים ב- $5^0=1$), ובשורה השנייה כל אחד מהם הוכפל ב- 5. הטבלה השנייה ב**שקף מס' 5** מציגה את אותם המחלקים בצורת לוח הכפל: כל מספר בלוח שווה למכפלת המספרים בשורת המפתח ובעמודת המפתח.

"כיצד אפשר לדעת את ממדי הטבלה?" החזקה הגבוהה ביותר של 2, שמחלקת את המספר $2^3 \times 5$, שווה ל- 3, וזה נותן 4 מחלקים (מ- 2 בחזקת 0 עד ל- 2 בחזקת 3). ל- 5 קיימות שתי אופציות: לא להופיע כגורם שמתאים ל -5^0, או להופיע כגורם שמתאים ל – 5^1. **לפי עיקרון הכפל**, מספר המחלקים שווה למכפלה 4×2, שמתבטא גם בגודל הטבלה שנבנתה.

ג. **טבלת המחלקים – תרגול**. כדאי לתרגל את השיטה ב- 2-3 דוגמאות, כאשר המספר הנתון כבר מפורק לגורמים ראשוניים או צריך לפרק אותו. בשלב זה יש להסתפק במקרה של שני גורמים ראשוניים שונים. למשל, למלא טבלת מחלקים למספרים הבאים: 48, 36, $2^2 \times 5^3$. במקרה האחרון יש להדגיש כי אין צורך **לחשב** את המחלק עצמו, רק מספיק לרשום אותו כמכפלת החזקות. על סמך

הניסויים, מגיעים המשתלמים **למסקנה**: מספר המחלקים של מספר $p^k \times q^l$ (כאשר p ו- q הם מספרים ראשוניים) שווה ל- $(k+1)\times(l+1)$. חשוב מאוד לבנות את הטבלה בלי למלא אותה "במקרים קשים", כמו למשל, טבלת המחלקים של המספר $17^3 \times 29^4$.

ד. **מקרה של יותר משני גורמים ראשוניים ועץ המחלקים**. דיון בשאלה "כיצד למצוא את כל המחלקים של המספר 60?" מצביע על ההגבלות של שיטת הטבלה ($60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$).

- אפשר להכליל את השיטה ולדבר על טבלה תלת-ממדית. "השכבה" הראשונה שלה לא מכילה את המחלק השלישי, ובה רושמים את כל המחלקים של המספר $12 = 2^2 \times 3^1 \times 5^0$. "השכבה" השנייה מכילה את אותם המחלקים, אך כל אחד מהם מוכפל ב- 5. בגישה זאת את מספר התאים בטבלה אפשר לחשב באנלוגיה עם נוסחת הנפח של התיבה: "שטח" הבסיס כפול "גובה" - מספר שכבות. לכן, למספר $60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$ יש $(2+1)\times(1+1)\times(1+1) = 12$ מחלקים שונים.

- ניתן להדגים את תהליך הרכבת המחלקים כמכפלה באמצעות הבניית העץ של המחלקים – ובדרך זאת להגיע לנוסחה כללית של מספר המחלקים של מספר טבעי. עץ המחלקים למספר 40 מוצג **בשקף מס' 5**.

- יש להגיע לנוסחה (אולי, מנוסחת במילים) לחישוב מספר המחלקים של מספר טבעי הנתון על סמך פירוקו לגורמים ראשוניים, ולהדגיש את היישום החשוב הנוסף של הפירוק.

ה. **יישום השיטה - דף למשתלם מס' 5**. בין היתר, מטופל בו נושא השינוי במספר המחלקים של המספר כאשר (א) כופלים אותו בגורם ראשוני שכבר מופיע בפירוקו לגורמים, או (ב) בגורם ראשוני חדש.

7. סכום המחלקים של מספר טבעי

הנושא מטופל באמצעות פעילות החקר "מספר טבעי וסכום מחלקיו" (**דף למשתלם מס' 6**). מספר הערות לדף זה:

- אין שום צורך לזכור שמות של המושגים "מספרים עודפים" או "מספרים חסרים".

- אם בוחרים במספר משוכלל (6 או 28) - אין לו מקום בטבלה, וזה מזמין את הדיון הרלוונטי על מיון המספרים לפי סכום מחלקיהם.

- סכום המחלקים האמיתיים של כל מספר ראשוני שווה ל- 1 (עליהם מדובר בסעיף ג).

- כדאי לציין כי למציאת סכום המחלקים של מספרים גדולים ניתן להשתמש ב- EXCEL (המספר a מתחלק ב- b רק כאשר $a = [a/b] \times b$, כאשר הסימן [...] מסמן את החלק השלם של המספר (פונקציה INT ב- EXCEL).

- כאשר המספר הנתון הוא חזקה של מספר ראשוני, המחלקים שלו מרכיבים את הסדרה ההנדסית, שמנתה שווה למספר ראשוני זה. למשל, המחלקים האמיתיים של 16 הם 1, 2, 4, 8. על סמך נוסחת

הסכום של הסדרה ההנדסית, אפשר להראות שכל החזקות של המספרים הראשוניים הם מספרים עודפים. החזקות של 2 זה מקרה מעניין במיוחד כי "העודף" שווה בדיוק ל- 1.

- כדאי לבדוק, כיצד הביטוי למספרים משוכללים נותן את השניים הקטנים מהם: $6 = 2^{2-1} \times (2^2 - 1)$; $2^{3-1} \times (2^3 - 1) = 4 \times 7 = 28$; אך $2^{4-1} \times (2^4 - 1) = 8 \times 15 = 120$ אינו משוכלל (כי 15 אינו ראשוני).

- המספרים $2^m - 1$ שמופיעים בביטוי למספרים משוכללים זוגיים, מכונים מספרי מרסן (M. Mersenne). הם **יכולים להיות** ראשוניים רק כאשר m הוא מספר ראשוני. הם באמת ראשוניים כאשר $m = 2, 3, 5, 7$ וזה גורם לאשליה כי קל להרכיב את המספרים המשוכללים הזוגיים, אך כבר ל- $m = 11$, המספר $2^{11} - 1 = 2047$ אינו ראשוני. בדיקת הראשוניות שלו היא ההזדמנות להראות את היישום של החומר שנלמד קודם בסדנה:

- ראשית כל, יש לבדוק את התחלקותו במספרים ראשוניים קטנים מ- 46 (כי $45^2 = 2025$, אז $\sqrt{2047} < 46$).
- לפי סימני ההתחלקות הנלמדים, 2047 לא מתחלק ב- 2, 3, 5, 11.
- בדיקת ההתחלקות במספרים ראשוניים אחרים מסתיימת בניסוי החמישי: $2047 : 23 = 89$.

חשוב לציין כי בעיית המספרים המשוכללים האי-זוגיים זאת דוגמה נוספת של בעיה פתוחה במתמטיקה, שהנוסח שלה די פשוט ומובן אפילו לתלמיד של כיתה ד, אך אין כיום התקדמות בהתמודדות איתה.

נספחים

דף למשתלמים

תוכן מפגש 3

א. שני סימני ההתחלקות ב- 11, דירוג סימני ההתחלקות לפי מורכבותם.

ב. עיקרון ההתחלקות של הסכום ושל ההפרש כבסיס להבניית "סימן ההתחלקות האוניברסלי" לבדיקת ההתחלקות בכל מספר ראשוני. התחלקות ב- 7, 19, 13.

ג. התחלקות במכפלה: הצגת הבעיה. סימני התחלקות ב- 6, 15. כיצד להחליט על התחלקות ב- 12, 18, 20?

ד. מחלקים של מספר. שיטת הסינון לרישום המחלקים. האם קיים מספר טבעי שמספר מחלקיו הוא אי-זוגי?

ה. מחלקים של חזקות המספרים הראשוניים, פירוק לגורמים ורשימת המחלקים, כתיבת המחלקים בכתיב החזקות.

ו. המחשות: טבלת המחלקים ועץ המחלקים, מספור המחלקים של המספר הטבעי.

ז. סכום המחלקים, סכום המחלקים של חזקות המספר הראשוני.

ח. מיון מספרים טבעיים לפי סכום המחלקים, מספרים משוכללים.

רשימת מושגים מתמטיים:

סימן התחלקות

מספר טבעי בכתיב חזקות

סכום המחלקים של מספר טבעי

קישור לנושאים נוספים:

תכונות החילוק בקבוצת המספרים הטבעיים

המבנה העשרוני של מספר טבעי

משפט ומשפט הפוך

עיקרון הכפל

סדרה הנדסית וסכום הסדרה

בעיות פתוחות בתורת המספרים

שקף מס' 1

על סימן ההתחלקות ב- 11

א. נפריד את שתי הספרות האחרונות ממספר רב-ספרתי:

$$95431 = 954 \times 100 + 31$$
$$432084 = ? \times 100 + ?$$

ב. כל מספר רב-ספרתי ניתן להציג כסכום:

$$100\,a + b$$

ג. מהו המספר הקרוב ל- $100\,a$ ומתחלק ב- 11?

$$100\,a + b = 99\,a + a + b = 99\,a + (a + b)$$

מסקנה: המספר $100a+b$ מתחלק ב- 11 רק כאשר הסכום

$a + b$ מתחלק ב- 11.

– *כיצד בודקים את ההתחלקות ב- 11?*

1. מפרידים מהמספר הנתון A את שתי הספרות האחרונות ומחברים את המספר הדו-ספרתי הזה עם מספר המאות של המספר הנתון.
2. חוזרים על אותו התהליך עד שמתקבל המספר a שלגביו ידוע האם הוא מתחלק ב- 11 או לא.
3. המספר A מתחלק ב- 11 אם ורק אם המספר a מתחלק ב- 11.

שקף מס׳ 2

על ההתחלקות ב- 19

- כל מספר רב-ספרתי ניתן להציג כסכום:

$$10\,a + b$$

- לבדיקת ההתחלקות של המספר 10a+b ב- 19 אפשר לבדוק את ההתחלקות של אחת מהכפולות של המספר הנתון:

$$20a + 2b,\ 30a + 3b,\ 40a + 4b,\ \ldots$$

- בין המספרים האלה, 20a + 2b די קרוב לכפולה של 19:

$$20a + 2b = 19a + a + 2b = 19a + (a + 2b)$$

- ***כיצד לבדוק את ההתחלקות ב- 19?***

1. מפרידים מהמספר הנתון A את ספרת היחידות, כופלים אותה ב- 2 ומחברים עם מספר העשרות של המספר הנתון.
2. חוזרים על אותו התהליך עד שמתקבל מספר a שלגביו ידוע האם הוא מתחלק ב- 19 או לא.
3. המספר A מתחלק ב- 19 אם ורק אם המספר a מתחלק ב- 19.

שקף מס' 3

הצגת המחלקים של מספר טבעי

נתון מספר טבעי 140

מהו המחלק הקטן ביותר שלו? - המספר 1

מהי המנה בחילוק זה? - המספר 140

מהו המחלק הגדול ביותר שלו? - המספר 140

מהי המנה בחילוק זה? - המספר 1

מהו המחלק הקטן ביותר "אחרי" 1? - המספר 2

מהי המנה בחילוק זה? - המספר 70

$$140 : 2 = 70$$

מסקנות:

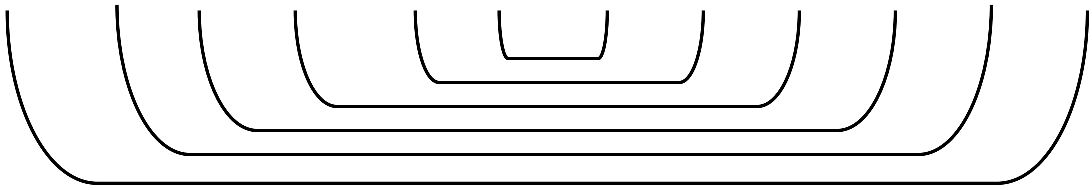
1. גם 70 הוא מחלק של 140:

$140 = 2 \times 70$ ומכאן $140 : 70 = 2$

2. כל המחלקים של 140 מסודרים בזוגות.

הצגת המחלקים של המספר 140

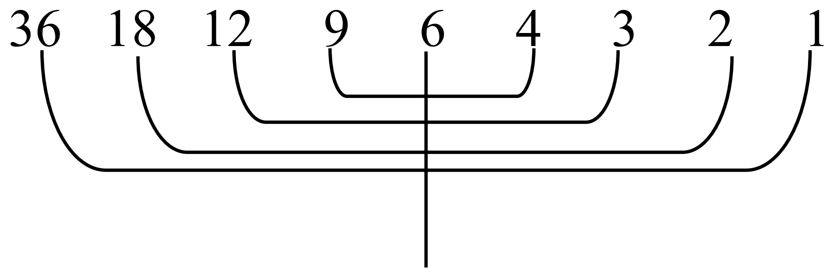
1 2 4 5 7 10 14 20 28 35 70 140



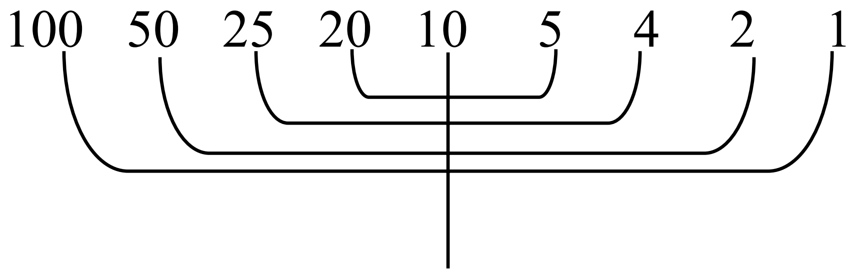
שקף מס' 4

"חנוכיית המחלקים" ו-"מנורת המחלקים"

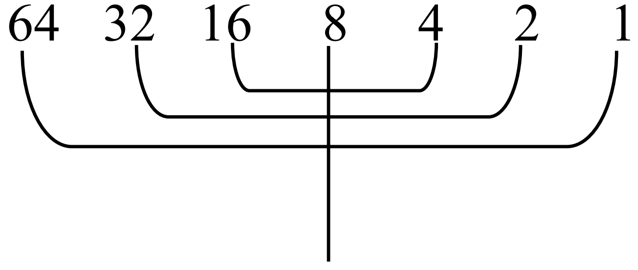
המספר 36 – והמחלקים שלו



המספר 100 – והמחלקים שלו



המספר 64 – והמחלקים שלו



שקף מס' 5

כל המחלקים של מספר טבעי

המחלקים של המספר 40

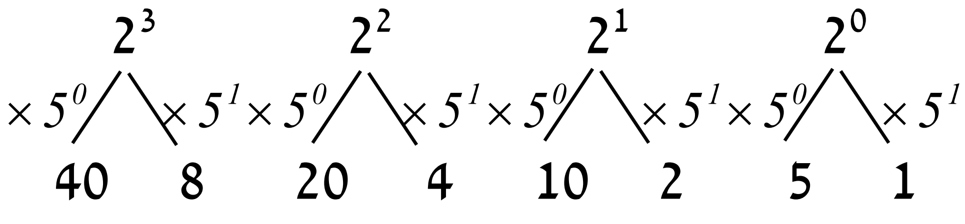
8 4 2 1

40 20 10 5

טבלת המחלקים של המספר 40

x	2^0	2^1	2^2	2^3
5^0	1	2	4	8
5^1	5	10	20	40

עץ המחלקים של המספר 40



דף למשתלם מס׳ 1

הבניית סימן ההתחלקות ב- 11

א. בחרו במספר רב-ספרתי והציגו אותו כסכום של עשרות ומספר חד-ספרתי, כמו בדוגמה הבאה:

$$5432 = 543 \times 10 + 2$$

ב. המספר 10 אינו מתחלק ב- 11, אך קרוב אליו המספר _____, שכמובן מתחלק ב- 11.

לכן אפשר להציג את המספר הנבחר כהפרש של כפולה של 11 והמחסר המתאים:

$$5432 = 543 \times (11-1) + 2 = 543 \times 11 - 543 + 2 = 543 \times 11 - (543 - 2)$$

בצעו תהליך דומה עם המספר שבחרתם:

ג. רשמו מספר רב-ספרתי כלשהו כסכום של עשרות ומספר חד-ספרתי בצורה אלגברית:

חזרו על התהליך שביצעתם עם דוגמה מספרית:

- הציגו את המחובר הראשון כהפרש בין כפולה של 11 והמחסר המתאים:
- קבצו את שני האיברים האחרונים של הביטוי המתקבל כמחסר אחד:

ד. מסקנה: המספר $10a + b$ מתחלק ב- 11 רק כאשר ________________ מתחלק ב- 11.

ה. על סמך המסקנה, נסחו את שיטת הבדיקה של ההתחלקות ב- 11.

דף למשתלם מס׳ 2

בדיקת ההתחלקות ב- 19

1. דוגמאות לרישום תהליך הבדיקה :

א. המספר הנתון הוא 42384

$$\begin{array}{r} 4238|3 \\ \underline{+6} \\ 424|4 \\ \underline{+\ 8} \\ 43|2 \\ \underline{+4} \\ 4|7 \\ \underline{+14} \\ 18 \end{array}$$

ב. המספר הנתון הוא 29431

$$\begin{array}{r} 2943|1 \\ \underline{+2} \\ 294|5 \\ \underline{+\ 10} \\ 30|4 \\ \underline{+8} \\ 3|8 \\ \underline{+16} \\ 19 \end{array}$$

מסקנה : המספר 42384 אינו מתחלק ב- 19.

מסקנה : המספר 29431 מתחלק ב- 19.

ב. בדקו את ההתחלקות של המספר 9253 ב- 19 לפי הדגם המוצג.

(התשובה : המספר 9253 **כן** מתחלק ב- 19.)

ג. בחרו מספר רב-ספרתי וערכו את בדיקת התחלקותו ב- 19 לפי הדגם המוצג.

דף למשתלם מס׳ 3

סימן ההתחלקות האוניברסלי

בהתאם לדוגמאות, נסו להציג שיטות לבדיקת ההתחלקות של המספר 10a+b במספרים ראשוניים שונים.

התהליך של כל אחת מהבדיקות מבוסס על פעולה שחוזרת על עצמה. אם ידוע שהתוצאה שמתקבלת בשלב כלשהו מתחלקת (לא מתחלקת) במחלק, זה נכון גם לגבי המספר הנבדק וניתן להפסיק את הבדיקה בשלב זה.

התחלקות ב-	החלפת המספר הנבדק במספר אחר	בניית הדגם לתהליך הבדיקה	ניסוח סימן ההתחלקות
11	10a+b	$10a+b=11a-a+b=$ $=11a-\underline{(a-b)}$	יש להפריד את ספרת היחידות מהמספר ולחסר את המספר החד-ספרתי הזה ממספר העשרות.
19	20a+2b	$20a+2b=19a+a+2b=$ $=19a+\underline{(a+2b)}$	יש להפריד את ספרת היחידות מהמספר ולחבר למספר העשרות את המספר החד-ספרתי הזה מוכפל ב- 2.
31	30a+3b		
41			
13	40a+4b	$40a+4b=39a+a+4b=$ $=39a+\underline{(a+4b)}$	
17			
7			
23			

דף למשתלם מס׳ 3 - תשובות

סימן ההתחלקות האוניברסלי

בהתאם לדוגמאות, נסו להציג שיטות לבדיקת ההתחלקות של המספר 10a+b במספרים ראשוניים שונים.

התהליך של כל אחת מהבדיקות מבוסס על פעולה שחוזרת על עצמה. אם ידוע שהתוצאה שמתקבלת בשלב כלשהו מתחלקת (לא מתחלקת) במחלק, זה נכון גם לגבי המספר הנבדק וניתן להפסיק את הבדיקה בשלב זה.

התחלקות ב-	החלפת המספר הנבדק במספר אחר	בניית הדגם לתהליך הבדיקה	ניסוח סימן ההתחלקות
11	10a+b	10a+b=11a – a+b= = 11a – <u>(a – b)</u>	יש להפריד את ספרת היחידות מהמספר ולחסר את המספר החד-ספרתי הזה ממספר העשרות.
19	20a+2b	20a+2b=19a + a+2b= = 19a + <u>(a + 2b)</u>	יש להפריד את ספרת היחידות מהמספר ולחבר למספר העשרות את המספר החד-ספרתי הה מוכפל ב- 2.
31	30a+3b	30a+3b=31a – a + 3b= 31a – <u>(a – 3b)</u>	יש להפריד את ספרת היחידות מהמספר ולחסר ממספר העשרות את המספר החד-ספרתי הזה מוכפל ב- 3.
41	40a+4b	40a+4b=41a – a +4b = 41a – <u>(a – 4b)</u>	יש להפריד את ספרת היחידות מהמספר ולחסר ממספר העשרות את המספר החד-ספרתי הזה מוכפל ב- 4.
13	40a+4b	40a+4b=39a+ a+ 4b = =39a + <u>(a + 4b)</u>	יש להפריד את ספרת היחידות מהמספר ולחבר למספר העשרות את המספר החד-ספרתי הזה מוכפל ב- 4.
17	50a+5b	50a+5b=51a – a +5b= =51a – <u>(a – 5b)</u>	יש להפריד את ספרת היחידות מהמספר ולחסר ממספר העשרות את המספר החד-ספרתי הזה מוכפל ב- 5.
7	20a+2b	20a+2b=21a – a+2b= = 21a – <u>(a – 2b)</u>	יש להפריד את ספרת היחידות מהמספר ולחסר ממספר העשרות את המספר החד-ספרתי הזה מוכפל ב- 2.
23	70a +7b	70a+7b=69a + a+7b= = 69a + <u>(a + 7b)</u>	יש להפריד את ספרת היחידות מהמספר ולחבר למספר העשרות את המספר החד-ספרתי הזה מוכפל ב- 4.

דף למשתלם מס׳ 4

מציאת המחלקים של מספר טבעי

א. נתון המספר הטבעי 68. מהו המחלק הקטן ביותר של המספר 68? ___________________

מהו המחלק הגדול ביותר של המספר 68? ___________________

המספר N מבטא את גילך (בשנים שלמות). מהו המחלק הקטן ביותר של המספר N? ___________

מהו המחלק הגדול ביותר של המספר N? ___________

מסקנות: - לכל מספר טבעי N יש מחלק שהוא הקטן ביותר - _____________

- לכל מספר טבעי N יש מחלק שהוא הגדול ביותר - _____________

- לכל מספר טבעי N מספר המחלקים לא גדול מ- N.

ב. נתון המספר 180. מהם כל המחלקים שלו? רשמו אותם.

כיצד אפשר לדעת שרשימתכם מלאה?

ג. המספר M הוא מספר המשתלמים בקבוצתך. בחרו מחלק כלשהו של M וחלקו את המספר M במחלק זה. ___________________________________

מה ניתן לומר על המנה שקיבלתם? האם המספר M מתחלק גם בה?

מסקנה: אם a הוא מחלק של המספר M, ו- b היא המנה של חילוק זה, אז גם ___________________.

ד. בחרו שלושה מספרים טבעיים שונים, וסדרו את כל המחלקים של כל אחד מהם "בתמונת הקשתות" (בדומה למוצג בשקף מס׳ 4).

דף למשתלם מס' 4 - המשך

ה. סכמו את עבודתכם:

- מאיזה זוג מחלקים התחלתם?
- האם בדקתם את ההתחלקות **בכל** המספרים?
- באיזה שלב סיימתם את התהליך?
- האם קבלתם תוצאה בלתי צפויה לגבי מספר המחלקים?

ו. מרוב הדוגמאות הקודמות אפשר להסיק את המסקנה הבאה: לכל מחלק של מספר קיים בן-זוג, ומכאן שמספר המחלקים של כל מספר טבעי הוא מספר _________.

האם נתקלת בדוגמה נגדית לטענה זאת?

בדקו מהם כל המחלקים של המספר 36.

למה לא קיים בן זוג לאחד מהמחלקים?

מיהם המספרים בעלי מספר מחלקים אי-זוגי?

ז. תלמיד טוען: "ככל שמספר גדול יותר, יש לו יותר מחלקים. למשל, ל- 10 יש רק ארבעה מחלקים, אך למספר 30, שהוא מכפלת 10 ו- 3, נוספו המחלקים 3, 6, 15 ו- 30 בעצמו, וסה"כ יש ל- 30 8 מחלקים. זה תמיד ככה – כופלים, ומקבלים יותר מחלקים למספר החדש".

התייחסו לטענת התלמיד.

דף למשתלם מס׳ 5

מספר המחלקים של מספר טבעי

1. א. רשמו את כל המחלקים של המספרים הטבעיים הבאים:

- כל המחלקים של המספר 17 הם:

- כל המחלקים של המספר 325 הם:

הסבר: 325 =

- כל המחלקים של המספר 324 הם:

הסבר: 324 =

- כל המחלקים של המספר 120 הם:

הסבר: 120 =

ב. האם בין המספרים הנתונים יש מספרים ריבועיים? כיצד ניתן לראות זאת מרשימת מחלקיהם?

2. א. רשמו בכתיב חזקות את כל המחלקים של המספרים הטבעיים הבאים:

- כל המחלקים של המספר 19^3 הם:
- כל המחלקים של המספר $3^3 \times 17^2$ הם:
- כל המחלקים של המספר $7 \times 3^2 \times 2$ הם:

ב. בין המספרים 6, 8, 9, 25, 42, 7×2^3, $2 \times 3 \times 5^2$, $5^3 \times 11$ בחרו רק את אלה שמחלקים את המספר $7 \times 5^3 \times 3 \times 2^2$. נמקו את בחירתכם.

דף למשתלם מס' 5 - המשך

3. א. חשבו את כמות המחלקים של כל אחד מהמספרים הטבעיים הבאים:

- למספר 144 יש ________ מחלקים.

הסבר: 144 =

- למספר 240 יש ________ מחלקים.

הסבר:

- למספר $2^3 \times 5^2 \times 7$ יש ________ מחלקים.

הסבר:

- למספר $4^3 \times 5^2$ יש ________ מחלקים.

הסבר:

ב. למספר 20 יש 6 מחלקים. האם קיימים מספרים טבעיים נוספים עם מספר מחלקים זהה?

רשמו כמה מהם בכתיב חזקות.

ג. מיהו המספר הטבעי הקטן ביותר שיש לו ארבעה מחלקים?

מיהו המספר הטבעי הגדול ביותר שיש לו ארבעה מחלקים?

4. תלמיד טוען: "אם נכפיל מספר טבעי נתון ב- 5, מספר המחלקים שלו יוכפל פי שניים. למשל, למספר $12 = 2^2 \times 3^1$ יש 6 מחלקים, ולכן למספר $60 = 12 \times 5 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$ יש 12 מחלקים".

התייחסו לטענת התלמיד.

דף למשתלם מס' 5 - תשובות

מספר המחלקים של מספר טבעי

1. א. רשמו את כל המחלקים של המספרים הטבעיים הבאים:

- כל המחלקים של מספר 17 הם: 1, 17.

- כל המחלקים של המספר 325 הם: $1,\ 5,\ 5^2=25,\ 13,\ 5\times13=65,\ 325=5^2\times13$

הסבר: $325=5^2\times13^1$. יש סה"כ $(2+1)\times(1+1)=6$ מחלקים.

- כל המחלקים של המספר 324 מוצגים בטבלה:

	3^4	3^3	3^2	3^1	3^0	
	81	27	9	3	1	2^0
	162	54	18	6	2	2^1
	324	108	36	12	4	2^2

הסבר: $324=2^2\times3^4$

ב. האם בין המספרים הנתונים יש מספרים ריבועיים? כיצד ניתן לראות זאת מרשימת מחלקיהם?

כן, מספר 324 הוא מספר ריבועי, ובהתאם יש לו מספר אי-זוגי של מחלקים.

2.ב. בין המספרים 6, 8, 9, 25, 42, 7×2^3, $2\times3\times5^2$, $5^3\times11$ בחרו רק את אלה שמחלקים את המספר $2^2\times3\times5^3\times7$.

בפירוק המחלק של המספר לגורמים מופיעים אותם הגורמים הראשוניים, בחזקות לא גדולות יותר מאשר בפירוק המספר עצמו. מסיבה זאת, 8, 9, 7×2^3, $5^3\times11$ אינם מחלקים של המספר הנתון.

3. א. חשבו את כמות המחלקים של כל אחד מהמספרים הטבעיים הבאים:

- למספר $4^3\times5^2$ יש $7\times3=21$ מחלקים.

הסבר: $4^3\times5^2=\left(2^2\right)^3\times5^2=2^6\times5^2$. **טעות נפוצה: התשובה "12 מחלקים", אך 4 אינו מספר ראשוני.**

ב. למספר 20 יש 6 מחלקים. האם קיימים מספרים טבעיים נוספים עם מספר מחלקים זהה?

דף למשתלם מס' 5 - תשובות המשך

$20 = 2^2 \times 5^1$, **וקיימות דוגמאות דומות נוספות רבות:** $45 = 3^2 \times 5^1$, $50 = 5^2 \times 2^1$, $76 = 2^2 \times 19^1$ **. יש גם אופציה אחרת:** $32 = 2^5$, 3^5, ובכלל p^5 **כאשר p הוא מספר ראשוני**.

ג. מהו המספר הטבעי הקטן ביותר שיש לו ארבעה מחלקים? **מספר המחלקים 4 ניתן לקבל בשתי דרכים: ארבעה מחלקים יש למספרים** p^3 **וגם למספרים** $p^1 \times q^1$ **. הקטן ביניהם הוא המספר** $6 = 2 \times 3$ **(ואחריו** $8 = 2^3$**). בהחלט, לא קיים מספר טבעי בעל ארבעה מחלקים שהוא הגדול ביותר.**

4. תלמיד טוען: "אם נכפיל מספר טבעי נתון ב- 5, מספר המחלקים שלו יוכפל פי שניים. למשל, למספר $12 = 2^2 \times 3^1$ יש 6 מחלקים, ולכן למספר $60 = 12 \times 5 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$ יש 12 מחלקים".

א. הדוגמה של התלמיד היא נכונה ומדגימה את המקרה בו כופלים את המספר הנתון בגורם שלא מופיע בפירוק המספר הנתון לגורמים: אם נכפול את המספר $N = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ... \times p_n^{\alpha_n}$ בחזקה של המספר הראשוני q^t **השונה** מכל המחלקים הראשוניים שלו, מספר המחלקים של המכפלה יוגדל פי (t+1).

ב. אך, כאשר כופלים מספר N בחזקה של אחד מהגורמים שלו (למשל, ב- p_1^s , מספר המחלקים החדש יוגדל, אך לא פי (s+1). למשל, המספר המחלקים של המספר $24 = 12 \times 2$ שווה רק ל- $8 = (1+1) \times (3+1)$, כי 2 הוא אחד מהגורמים הראשוניים של 12.

דף למשתלם מס' 6

פעילות החקר "מספר טבעי וסכום מחלקיו"

א. בחרו במספר טבעי כלשהו N וחברו את כל מחלקיו פרט למספר עצמו (למחלקים אלה לפעמים קוראים "מחלקים אמיתיים"). את הסכום שקיבלנו נסמן ב- S(N).

למשל,

$S(12)=1+2+3+4+6=16$, $S(10)=1+2+5=8$.

אם המספר הטבעי גדול מסכום מחלקיו האמיתיים, הוא מכונה "מספר עודף".

אם המספר הטבעי קטן מסכום מחלקיו האמיתיים, הוא מכונה "מספר חסר".

ב. בדקו עוד כמה מספרים טבעיים ורכזו את התוצאות בטבלה:

מספרים עודפים, $N>S(N)$	10				
מספרים חסרים, $N<S(N)$	12				

ג. מיהם המספרים הטבעיים שבסכום המחלקים האמיתיים שלהם יש רק מחובר אחד? לאיזה שורה בטבלה הם שייכים?

ד. בדקו את סכום המחלקים האמיתיים של חזקות עוקבות של 2. מה ניתן לומר על סכום זה?

מה ניתן לומר על המיקום של החזקות של 2 בטבלה הנ"ל?

ה. האם בין המספרים שבחרתם יש מספר שסכום מחלקיו האמיתיים שווה בדיוק למספר עצמו? אם כן, מיהו?

אם לא, בדקו מספרים מהעשרת הראשונה כדי למצוא אותו.

דף למשתלם מס' 6 - המשך

ו. מספר השווה לסכום מחלקיו האמיתיים הוא **מספר משוכלל**.

המספר המשוכלל הקטן ביותר הוא ________.

המספר המשוכלל הבא נמצא בין 20 ל- 50. מיהו?

רמז: האם יש צורך לבדוק את כל המספרים בטווח זה?

ז. לידיעתכם:

- אוקלידס גילה, כי אם המספר $2^m - 1$ הוא מספר ראשוני, אז המספר $2^{m-1}(2^m - 1)$ הוא מספר משוכלל.
- אוילר הוכיח שכל מספר משוכלל זוגי הוא מהסוג $2^{m-1}(2^m - 1)$.
- לא ידוע, האם מספר המספרים המשוכללים הזוגיים הוא סופי או אינסופי.
- לא ידוע, האם בכלל קיימים מספרים משוכללים אי-זוגיים.