

התחלקות בקבוצת המספרים הטבעיים: מפגש מס' 4

סימני התחלקות

ד"ר איליה סיניצקי - מכללת גורדון

תחום תוכן מתמטי (בהתאמה לסילבוס) - תכונות המספרים: סימני התחלקות.
רשימת מושגים מתמטיים שנלמדים בפעילות – המחלק המשותף הגדול ביותר, הכפולה המשותפת הקטנה ביותר, מספרים זרים, חילוק עם שארית.
זמן משוער לפעילות – 4 ש"ל.
קישור לנושאים נוספים: פירוק לגורמים, חיתוך ואיחוד של קבוצות, תנאי הכרחי ותנאי מספיק, יחס.
חומרים ועזרים דרושים: דפים למשתלם מס' 1-4, שקפים 1-3. הדפים למשתלם והשקפים נמצאים בנספחים שבסוף היחידה.

תוכן מפגש 4

- א. המחלק המשותף הגדול ביותר - מושג ותכונות.
- ב. מספרים זרים: מושג, קשר עם מושגים אחרים בתורת המספרים, תכונות היחס, מספרים זרים.
- ג. פירוק לגורמים וחיפוש המכנה המשותף הגדול ביותר (הגישה של תורת הקבוצות).
- ד. הכפולה המשותפת הקטנה ביותר ודרכי חיפוש.
- ה. נוסחת הקשר בין המכנה המשותף הגדול ביותר והכפולה המשותפת הקטנה ביותר ויישומיה.
- ו. שיטת אוקלידס לחיפוש המכנה המשותף הגדול ביותר.

דפי הנחיות למרצה

מהלך מפגש 4

הערות כלליות: החומר המוצג במהלך מפגש 4 בדרך כלל מוכר בחלקו למשתלמים, לכן הדגש הושם על הנושאים שמוכרים להם פחות, כמו נוסחת הקשר בין ממג"ב (מכנה משותף גדול ביותר) וכמק"ב (כפולה משותפת קטנה ביותר), שיטת אוקלידס וכדומה.

1. המחלק המשותף הגדול ביותר – מושג ותכונות – דף למשתלם מס' 1.

שלבי הטיפול בנושא:

- הצגת השאלה: "מהו המחלק המשותף הגדול ביותר?" שמו של המושג כבר מכיל את הגדרתו המתמטית: בקבוצת המספרים הטבעיים, זה בדיוק המספר הטבעי הגדול ביותר שמחלק את כל אחד מהמספרים. חשוב, שמספר זה תמיד קיים (הוא לא גדול מהמספר הקטן ביותר מבין המספרים הנתונים), ולכן תהליך חיפשו, אפילו דרך בדיקה ישירה, הוא סופי. יש לציין, כי ממג"ב עונה לשני סוגי הדרישות: הוא מחלק את כל אחד מהמספרים הנתונים, ובקבוצת המספרים שהם המחלקים המשותפים הוא האיבר הגדול ביותר.

- לפי כך, ניתן לחפש את המחלק המשותף הגדול ביותר "לפי ההגדרה". אפשר לרשום את כל המחלקים של כל אחד מהמספרים הנתונים, ולחפש את המספר הגדול ביותר המופיע בכל הרשימות. כדאי לתת למשתלמים לבצע תהליך זה לזוג מספרים לבחירתם כדי שירגישו צורך בשיטה יעילה יותר לחיפוש הממג"ב.

- מספרים זוגיים מהווים דוגמה לקבוצת מספרים שיש להם מחלק משותף שגדול מ-1, אך הוא לפעמים הגדול ביותר (ממג"ב), ולפעמים – לא (סעיף ג).

- לפני פיתוח השיטה לחיפוש הממג"ב, כדאי לציין את המקרים המיוחדים, כאשר את הממג"ב ניתן לגלות באופן מיידי – סעיף ה בדף למשתלם מס' 1.

2. מספרים זרים

א. **הגדרת המושג - שקף מס' 1.** צריך לציין כי המושג מתייחס לקבוצה של (לפחות) שני מספרים,

זאת אומרת, הוא מצביע על היחס המסוים בין המספרים. אין מספר זר סתם, יש רק מספר שזר למספר אחר. בשקף מצוינות דוגמאות של מספרים זרים ודוגמאות של מספרים לא זרים. הדוגמה האחרונה מאפשרת גם את ההכללה הפשוטה לגבי אי-זרות של זוג מספרים זוגיים.

ב. **תכונות של היחס "מספר זר"** – בהמשך של שקף מס' 1 מצוינות תכונות פשוטות של היחס, ראשית מצוינת הסימטריות של התכונה (המאפשרת לומר "זוג מספרים זרים" במקום "מספר זה זר למספר אחר"). לפני הצגת חלק זה של השקף, כדאי לתת למשתלמים לעבוד על **דף למשתלם מס' 2**, ועל סמך זה להגיע לתכונות שמסוכמות בשקף. שימו לב: בסעיף 6 הודגש שהמושג "מספרים זרים" הוא רחב, ומספרים עוקבים, זוגות מספרים ראשוניים וכדומה מהווים רק דוגמאות של זוגות מספרים זרים. בדיון על סעיף 7 כדאי לציין שהיחס "מספרים זרים" אינו רפלקסיבי (אף מספר פרט ל-1 לא זר לעצמו), סימטרי אך לא טרנזיטיבי (למשל, 9 זר ל-8 וזר ל-10, אך 8 ו-10 לא זרים זה לזה).

3. המכנה המשותף הגדול ביותר – שיטות החיפוש, בדיקה ויישום

א. חיפוש הממג"ב באמצעות פירוק לגורמים. הטכניקה המבוססת על פירוק לגורמים ראשוניים לחיפוש המחלק המשותף הגדול ביותר, בהחלט, ידועה למשתלמים. יחד עם זאת, כדאי להעיר מספר הערות:

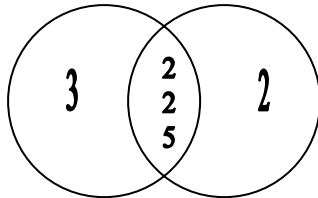
- הנימוק המתמטי של השיטה – אם מספר הוצג כמכפלה של גורמים (ראשוניים) הוא מתחלק לא רק בכל אחד מהם, אך גם בכל המכפלות שלהם. מסיבה זאת, לקבלת הממג"ב ניתן לכפול את כל המחלקים המשותפים הראשוניים שמצאנו בפירוק לגורמים של זוג המספרים הנתונים.
- אפשר להדגים את חיפוש הממג"ב באמצעות דיאגרמת ון (עיגולי אוילר). אם נסמן את כל המחלקים הראשוניים של שני המספרים בדיאגרמה, איברי החיתוך יציינו לנו את כל המחלקים המשותפים הראשוניים של הזוג הנתון, ואז צריך לכפול אותם. חשוב להדגיש, שכאן אותו איבר **כן** רושמים מספר פעמים ברשימת האיברים של קבוצת המחלקים, וכן מסמנים אותו מספר פעמים על הדיאגרמה, אם הוא מופיע בפירוק לגורמים יותר מפעם אחת. למשל, חיפוש של הממג"ב לזוג המספרים 60 ו-40:

$$\begin{array}{r|l} 60 & \underline{2} \\ 30 & \underline{2} \\ 15 & 3 \\ 5 & \underline{5} \\ 1 & \end{array}$$

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\begin{array}{r|l} 40 & \underline{2} \\ 20 & \underline{2} \\ 10 & 2 \\ 5 & \underline{5} \\ 1 & \end{array}$$

$$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$$



$$[40,60] = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$$

- במקרה של מספרים זרים, הקבוצות בדיאגרמה הן קבוצות זרות. יש להימנע מהביטוי "אין מחלקים משותפים" (כי קיים המחלק המשותף – המספר 1). מסיבה זאת כדאי לציין שבדיאגרמת ון מופיעים רק גורמים ראשוניים (והמספר 1 אינו ראשוני). מצד שני, אפשר גם לקבל החלטה להכניס את המספר 1 בדיאגרמה, ואז השיטה (לכפול את איברי קבוצת החיתוך) תהיה תקיפה גם למספרים זרים.

- כאשר אחד מהמספרים הנתונים a הוא מחלק של המספר השני b, קבוצת מחלקיו היא קבוצה חלקית של קבוצת המחלקים של המספר המתחלק (b), וקבוצת החיתוך זהה לקבוצה הקטנה. מכפלת כל איבריה שווה, כמובן, למספר a.

- המחשה באמצעות עיגולי אוילר (דיאגרמות ון) מזמינה להכליל את מושג הממג"ב ליותר משני מספרים. בין היתר ניתן להמחיש את המצב, כאשר לשלושה מספרים נתונים הממג"ב שווה ל-1, אך לכל אחד משלושת הזוגות האפשריים יש מחלק משותף גדול יותר (למשל, השלישייה המתאימה הקטנה ביותר היא 6, 10, 15).

- בין הדוגמאות לתרגול כדאי לתת למשתלמים גם זוגות, שאחד מהמספרים כבר מופיע בתרגילים קודמים, ולציין שפירוקו כבר קיים ואין צורך לפרק אותו לגורמים ראשוניים שוב (אך השיטה מזמינה את הפירוק, ועל נקודה זאת יתקיים דיון בהמשך בהצגת שיטת אוקלידס לחיפוש ממג"ב).

ב. **בדיקת הממג"ב ודרך אחרת לחיפוש**. הצגת השאלה: " כיצד אפשר לבדוק שמספר שמצאנו הוא הממג"ב של זוג המספרים הנתון?" קל לבדוק האם מספר מסוים מחלק את שני המספרים הנתונים. "אך כיצד אפשר לדעת, שהוא הגדול ביותר בין המחלקים המשותפים?" כאן יש להשתמש בתכונה חשובה של הממג"ב: אם נחלק שני מספרים בממג"ב שלהם, נקבל זוג מספרים זרים:

$$\left[\frac{a}{d}, \frac{b}{d} \right] = 1 \Leftrightarrow [a, b] = d$$

דוגמאות של שאלות:

- בדקו, האם המספר 90 הוא מחלק משותף של זוג המספרים 120 ו-180?
- בדקו, האם המספר 12 הוא מחלק משותף של זוג המספרים 120 ו-180?
- בדקו, האם המספר 12 הוא ממג"ב של זוג המספרים 120 ו-180?
- בדקו, האם המספר 30 הוא ממג"ב של זוג המספרים 120 ו-180?
- בדקו, האם המספר 60 הוא ממג"ב של זוג המספרים 120 ו-180? **(כאן מתקבל בחילוק זוג מספרים עוקבים ולכן זרים)**.

מהתכונה הזאת ניתן לנסח שיטה נוספת לחיפוש הממג"ב. אפשר לחלק את שני המספרים הנתונים במחלק משותף – ואם המנות הם מספרים זרים, המספר שחילקנו בו הוא הממג"ב. במקרה שהם לא זרים, יש להם מחלק משותף ששונה מ-1 וצריך להמשיך את התהליך עד שמתקבל זוג מספרים זרים. הממג"ב שווה למכפלה של כל המספרים ששירתו כמחלקים בתהליך. דוגמה:

- האם מספר 2 הוא הממג"ב של 364 ו-504? לא, כי שתי המנות, 182 ו-252, הם מספרים זוגיים.
- נחלק את שניהם ב-2. האם הזוג שמתקבל הוא זוג מספרים זרים? לא, 91 וגם 126 מתחלקים ב-7 (140 – 14 = 126).
- נחלק את שניהם ב-7. האם הזוג שמתקבל הוא זוג מספרים זרים? כן, 13 ו-18 הם זרים.
- מסקנה: הממג"ב הוא $28 = 2 \times 2 \times 7 = [364, 504]$.

ג. אחד מיישומיו של הממג"ב הוא פתרון משוואות דיופנטיות (משוואות עם פתרונות שלמים). **דף למשתלם מס' 3** הורכב על סמך רעיונות של משחק המחשב "חידות מיכלים" (לומדה של מטח). בדיון, כדאי לרשום בצורה אלגברית את הפתרון של כל אחת מהמשימות. למשל, במשימה 1ב אנחנו מחפשים מספרים שלמים n, m שמקיימים את השוויון $5m + 2n = 1$. הפתרון $m = 1, n = -2$ אומר שאנחנו ממלאים את הכלי של 5 ליטר ופעמיים מעבירים ממנו 2 ליטרים לכלי קטן יותר. המטרה של ההצגה הזאת היא להביא את המשתלמים למסקנה בסעיף 4. למשוואה: $am + bn = d$ כאשר a, b ו- d נתונים a, b מסמנים את הקיבולות, ו- d היא הכמות הנדרשת) יש פתרון שלם רק כאשר d היא כפולה של הממג"ב של a, b . מסיבה זאת, למשל, אי-אפשר להגיע לאף כמות אי-זוגית אם הכלים הינם בעלי קיבולת זוגית כל אחד.

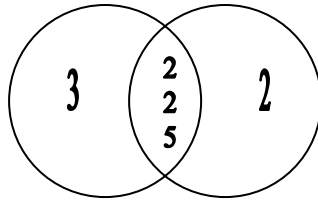
4. הכפולה המשותפת הקטנה ביותר ודרכי חיפושה. הצעה לסדר הטיפול בנושא:

- א. הצגת שאלות לבירור המושג כמק"ב:
- כיצד למצוא כפולה משותפת של שני מספרים טבעיים? – אפשר, למשל, לכפול אותם, כי מכפלת המספרים מתחלקת בכל אחד מהם.
- האם קיימת הכפולה המשותפת הגדולה ביותר של שני מספרים טבעיים? – בהחלט לא, כי כל אחד מהמספרים הנתונים הוא המחלק לא רק של מכפלתם אך גם כל כפולה של מכפלתם.
- מה מייחד את הכמק"ב מבין כל הכפולות המשותפות של שני מספרים? – זהו המספר הטבעי הקטן ביותר שמתחלק בשני המספרים הנתונים.
- ב. הערכת הגודל של כמק"ב וחיפוש הכמק"ב במקרים מיוחדים:
- "האם כמק"ב יכולה להיות גדולה יותר ממכפלתם של שני המספרים הנתונים?"
- "האם כמק"ב יכולה להיות קטנה יותר מאחד המספרים הנתונים?"
- **סימון**: כמק"ב לזוג המספרים a ו- b מסמנים (a, b) .
- **מסקנה**: לשני מספרים טבעיים a ו- b , $\max(a, b) \leq (a, b) \leq a \cdot b$ (הכמק"ב אינה גדולה ממכפלת המספרים ואינה קטנה מכל אחד מהם).
- "כאשר בין שני מספרים טבעיים הגדול משניהם מתחלק בקטן מביניהם, הכמק"ב של הזוג שווה ל-_____ . למה?" – התשובה: למספר הגדול, כי הוא כפולה משותפת - מתחלק בשניהם, וכל מספר שקטן ממנו אינו כפולה משותפת כי הוא לא מתחלק בו.
- "למה שווה $(a, 1)$ לכל מספר טבעי, a ?"
- ג. חיפוש הכמק"ב באמצעות פירוק לגורמים בווריאציות שונות:
- כמק"ב של שני מספרים טבעיים אפשר למצוא באמצעות פירוקם לגורמים. בין הגורמים של הכמק"ב חייבים להופיע כל הגורמים של כל אחד מהמספרים הנתונים. לכן, הכמק"ב היא מכפלת האיברים של קבוצת האיחוד של קבוצות המחלקים של המספרים הנתונים:

60	2	40	2
30	2	20	2
15	3	10	2
5	5	5	5
1		1	

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$$



$$(40,60) = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 120$$

- כדאי להדגיש כי אין שום צורך לכפול את כל האיברים של קבוצת האיחוד "מחדש". מספיק לקחת את כל הגורמים של המספר הראשון ולהוסיף את הגורמים החסרים של המספר השני (איברים של קבוצת ההפרש של קבוצות המחלקים). המכפלה של כל הגורמים של המספר הראשון שווה, כמובן, למספר זה, ולקבלת הכמק"ב צריך רק לכפול אותו בגורמים החסרים. למשל, לקבלת כמק"ב של זוג המספרים 40 ו-60 מספיק לכפול 40 ב-3 (או 60 ב-2).

- כאשר משתמשים בשיטה זאת, לצורך קיצור החישוב כדאי לבחור, בדרך כלל, במספר שיש לו יותר מחלקים, אז "הכפל המשלים" הוא קצר יותר.

ד. מקרה מיוחד: כמק"ב של זוג מספרים זרים. קבוצת המחלקים השונים מ-1 לזוג מספרים זרים הן קבוצות זרות, ולקבלת הכמק"ב צריך לקחת את כל האיברים של שתי הקבוצות. במילים אחרות, יש לכפול את כל הגורמים של המספר הראשון ("ומהי מכפלתם?") בכל הגורמים של המספר השני (זאת אומרת, במספר השני עצמו). "מסקנה: הכמק"ב של מספרים זרים שווה ל-_____." (התשובה: למכפלתם).

5. הקשר בין ממג"ב ו-כמק"ב. נושא זה מטופל ב- **דף למשתלם מס' 4** שמטרתו לתרגל בחיפוש ממג"ב וכמק"ב וגם לגלות קשר חשוב (ומפתיע) בין שני המספרים האלה. אחרי מספר ניסויים, רואים המשתלמים את הקשר בין הממג"ב והכמק"ב המתבטא בנוסחה קומפקטית:

$$(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$$

הצדקת הנוסחה באה משיטת החיפוש של הכמק"ב: כדי לקבל את הכפולה המשותפת הקטנה ביותר של שני מספרים, כופלים את כל האיברים מקבוצת האיחוד של קבוצות מחלקיהם. ניתן לבצע את זה בצורה זאת: לקחת בתור הגורמים את כל המחלקים של המספר הראשון ולכפול את מכפלתם **בכל הגורמים** של המספר השני. המספר שמתקבל שווה למכפלת המספרים הנתונים, אך "לקחנו יותר מדי גורמים": כל האיברים של קבוצת החיתוך מופיעים במכפלה זאת פעמיים – פעם אחת כגורמים של המספר הראשון ופעם שנייה כגורמים של המספר השני. לקבלת הכמק"ב צריך לחלק את המכפלה "בגורמים המיותרים" של החיתוך - בממג"ב. מכך נובעת נוסחת הקשר בצורה הבאה:

$$(a, b) = \frac{a \cdot b}{[a, b]}$$

כדאי, בין היתר, להראות כי בכל המקרים המיוחדים (שני מספרים זהים, אחד

מהמספרים מתחלק בשני, אחד מהמספרים שווה ל-1, מספרים זרים) הקשר הנ"ל מתקיים "באופן אוטומטי". בין יישומי הנוסחה אפשר לציין את בדיקת תוצאות החישוב של ממג"ב וכמק"ב, וחיפוש הכמק"ב כאשר ידוע הממג"ב של שני המספרים הנתונים. שימוש זה מזמין שאלה על דרך יעילה לחיפוש הממג"ב ללא פירוק שני המספרים הנתונים לגורמים ראשוניים. חוץ מתזכורת לגבי שיטת הרכבת הממג"ב" (ראה ב3), זה מפנה אותנו לסעיף הבא - שיטת אוקלידס לחיפוש הממג"ב.

6. שיטת אוקלידס לחיפוש הממג"ב

א. **דיון:** "מהם היתרונות והחסרונות של השיטה לחיפוש הממג"ב המבוססת על פירוק לגורמים." היתרון הברור של השיטה הוא הבהירות שלה והקשר הישר שלה עם המיומנות ידועה וחשובה של פירוק המספר לגורמים ראשוניים. היא אוניברסלית, כי היא מתאימה לכל זוג מספרים, ואפילו לחיפוש הממג"ב ליותר משני מספרים טבעיים. אך לפעמים הפירוק לגורמים הוא מיותר: למשל, כאשר בין שני המספרים האחד הוא מחלק של השני, או כשזוג מספרים הם מספרים עוקבים (ולכן הם זרים) וכדומה. באופן כללי, שיטת הפירוק לגורמים **לא לוקחת בחשבון את הקשר שקיים בין המספרים** עד לשלב האחרון של חיפוש הממג"ב. ניתן להדגים זאת בכיתה באמצעות המשימה הבאה: "צריך למצוא את הממג"ב של שני מספרים טבעיים, הראשון הוא 48 והשני - ... עד לא החלטתי." האמת, שלפי שיטת הפירוק לגורמים, אפשר להתחיל את התהליך, אך ייתכן שאחרי קביעת המספר השני אין בו שום צורך.

ב. **ניסוח שיטת החילוק.** במקום תיאורה הפורמלי, עדיף להתחיל את הצגת שיטת החילוק ממקרה פשוט ביותר. כדי למצוא את הממג"ב של שני המספרים, ננסה לחלק את הגדול מביניהם בקטן. אם הוא מתחלק ללא שארית, מצאנו כבר את הממג"ב (**שקף מס' 2**). חשוב לציין, כי התחלקות ללא שארית (שארית 0) קובעת את הממג"ב, אך תוצאת החילוק אינה חשובה לתהליך. השיטה מוצגת עם זוג מספרים אקראיים ב- **שקף מס' 2**. החיצים בשרשרת תרגילי החילוק מסמנים את המקור למחולק ולמחלק בכל חילוק נוסף. גם כאן, המנות של החילוק אינן משתנות בתהליך חיפוש הממג"ב. המסקנה לגבי הממג"ב לזוג הנתון מוצגת כטענה ב- **שקף מס' 2**, ונבדקת על סמך קבלת זוג מספרים זרים (125 ו-24) בחילוק של שני המספרים הנתונים (250 ו-48) ב- **2. שקף מס' 3** מסביר:

א) למה 2 מחלק את שני המספרים הנתונים - דרך מעבר בשרשרת החילוק עם שארית מסופה להתחלתה);

ב) למה 2 הוא המחלק המשותף הגדול ביותר לזוג הנתון: כל מחלק של 250 ו-48 מחלק גם את השארית של חילוק של 250 ב-48, מחלק גם את שארית החילוק של 48 ב-10, מחלק גם את שארית החילוק של 10 ב-8, ששווה ל-2. המחלק הגדול ביותר של 2 שווה ל-2 עצמו. ההצדקה הזאת משלימה את השקף הקודם, שבו הבדיקה רק מאשרת את התשובה, אך לא מסבירה "למה זה לא מקרי". את תהליך ההנמקה שהוצג ב- **שקף מס' 3** אפשר לבצע לכל זוג מספרים טבעיים, כלומר, שיטת החילוק תמיד נותנת את הממג"ב של שני המספרים הטבעיים.

נספחים**דף למשתלמים****תוכן מפגש 4**

- א. המחלק המשותף הגדול ביותר – מושג ותכונות.
- ב. מספרים זרים: מושג, קשר עם מושגים אחרים בתורת המספרים, תכונות היחס מספרים זרים.
- ג. פירוק לגורמים וחיפוש המכנה המשותף הגדול ביותר (גישה של תורת הקבוצות).
- ד. הכפולה המשותפת הקטנה ביותר ודרכי חיפוש.
- ה. נוסחת הקשר בין המכנה המשותף הגדול ביותר והכפולה המשותפת הקטנה ביותר ויישומיה.
- ו. שיטת אוקלידס לחיפוש המכנה המשותף הגדול ביותר.

רשימת מושגים מתמטיים :

המחלק המשותף הגדול ביותר
 הכפולה המשותפת הקטנה ביותר
 מספרים זרים
 חילוק עם שארית

קישור לנושאים נוספים :

פירוק לגורמים
 חיתוך ואיחוד של קבוצות
 תנאי הכרחי ותנאי מספיק
 יחס

דף למשתלם מס' 1

1. המחלק המשותף הגדול ביותר

א. נסו להגדיר מהו המחלק המשותף הגדול ביותר לזוג מספרים טבעיים.

ב. מהו המחולק המשותף הקטן ביותר של קבוצת מספרים טבעיים? למה?

ג. האם קיים מחלק משותף גדול יותר מ-1 לזוג מספרים זוגיים? מהו? האם הוא תמיד המחלק המשותף הגדול ביותר?

ד. בחרו בזוג מספרים טבעיים לפי רצונכם ורשמו את כל המחלקים של כל אחד מהם.

סימון: את המחלק המשותף הגדול ביותר לזוג המספרים a ו- b מסמנים $[a, b]$. רשמו את תשובתכם באמצעות סימון זה.

מה ניתן לומר על השיטה שהשתמשתם? מתי היא תהיה יעילה?

ה. נתונים שני מספרים זהים? מהו הממג"ב שלהם?

מהו הממג"ב של זוג המספרים 1 ו-12? $[12, 1] =$

מהו הממג"ב של זוג המספרים 24 ו-48?

הכללה: כאשר נתונים שני מספרים שאחד מהם מתחלק בשני, המחלק המשותף הגדול ביותר שלהם שווה ל-_____.

בסימנים מתמטיים: כאשר מספר a מתחלק במספר b , אז $[a, b] =$ _____.

דף למשתלם מס' 2

מספרים זרים ותכונותיהם

1. מהו המחלק המשותף הגדול ביותר לזוג המספרים 1 ו- N , כאשר N הוא מספר טבעי כלשהו?

סקנה: מספר 1 הוא _____ לכל מספר טבעי.

2. בחרו בשני מספרים ראשוניים שונים ורשמו את המחלקים של כל אחד מהם.

סקנה: שני מספרים ראשוניים שונים _____ אחד לשני.

3. בחרו מספר ראשוני כלשהו. מה ניתן לומר על כל מספר טבעי שקטן מהמספר הנבחר?

סקנה: כל מספר טבעי שקטן ממספר ראשוני כלשהו _____.

4. האם קיימים מספרים טבעיים שאינם זרים למספר ראשוני? מיהם?

סקנה: _____.

5. בדקו את הטענה: "מחלק משותף של שני מספרים טבעיים מחלק גם את ההפרש שלהם".

מה נובע מכך לגבי המחלק המשותף הגדול ביותר של זוג מספרים עוקבים?

סקנה: _____.

6. האם קיימים שני מספרים לא עוקבים, שאף אחד מהם אינו ראשוני, אך הם זרים לשני?

7. בדקו, האם היחס "מספרים זרים" הוא טרנסיטיבי. במילים אחרות: נתון שמספר a זר למספר b

ומספר b זר למספר c . האם מכך נובע שהמספרים a ו- c זרים אחד לשני?

דף למשתלם מס' 3

המשחק "חידות מיכלים"**(מבוסס על הלומדה "חידות מיכלים" בהוצאת מטח)**

בכל אחת מן הבעיות ניתן למלא את הכלי הנתון עד הסוף מנקודת ההספקה (עם כמות לא מוגבלת של הנוזל) או להעביר אליו את הנוזל מהכלי השני.

1. נתונים שני כלים: אחד בעל קיבולת של 2 ליטרים ושני עם קיבולת של 5 ליטרים.

א. בכלי נוסף ריק צריך לצבור 7 ליטרים של הנוזל. האם אפשר לעשות זאת? כיצד להשלים את המשימה במספר מינימלי של צעדים?

ב. צריך לקבל ליטר אחד של הנוזל באחד מהכלים הנתונים. האם אפשר לעשות זאת? כיצד להשלים את המשימה במספר מינימלי של צעדים?

2. נתונים שני כלים שקיבולת שלהם היא 3 ליטרים ו-5 ליטרים.

א. צריך לקבל ליטר אחד של הנוזל באחד מהכלים הנתונים. האם אפשר לעשות זאת? כיצד להשלים את המשימה במספר מינימלי של צעדים?

ב. בכלי נוסף ריק צריך לצבור 7 ליטרים של הנוזל. האם אפשר לעשות זאת? כיצד להשלים את המשימה במספר מינימלי של צעדים?

3. נתונים שני כלים שקיבולת שלהם היא 8 ליטרים ו-6 ליטרים.

א. צריך לקבל שני ליטרים של הנוזל באחד מהכלים הנתונים. האם אפשר לעשות זאת? כיצד להשלים את המשימה במספר מינימלי של צעדים?

דף למשתלם מס' 3 - המשך

ב. בכלי נוסף ריק צריך לצבור 7 ליטרים של הנוזל. האם אפשר לעשות זאת? כיצד להשלים את המשימה במספר מינימלי של צעדים?

4. א. נסו להרכיב משימה אחת נוספת שיש לה פתרון ומשימה אחת נוספת שאינה פתירה.

ב. במה תלוי קיום הפתרון של הבעיה?

ג. כיצד קיום הפתרון קשור בממג"ב?

דף למשתלם מס' 4

הקשר בין ממג"ב וכמק"ב

1. הוסיפו שני זוגות מספרים, לפי בחירתכם, ומלאו את המשבצות בטבלה עבור כל אחד מזוגות המספרים.

מספר ראשון, a	מספר שני, b	ממג"ב, [a, b]	כמק"ב, (a, b)	מכפלת ab
8	6			
15	10			
25	8			

2. האם אתם רואים קשר בין גודל הממג"ב וגודל הכמק"ב בכל אחד מהזוגות?

3. האם אתם רואים קשר מסוים בין גודל הממג"ב, גודל הכמק"ב, ומכפלת המספרים הנתונים בכל אחד מהזוגות?

4. נסו לבטא את הקשר בין המספרים הנתונים, הממג"ב [a, b] והכמק"ב (a, b) באמצעות נוסחה.

5. מהם היישומים האפשריים של נוסחת הקשר בין ממג"ב, כמק"ב ומכפלת המספרים?

שקף מס' 1

מספרים זרים

◆ מספר a זר למספר b כאשר a מחלק של b פרט

ל-1 אינו מחלק את a .

דוגמאות: המספר 16 זר למספר 21.

המספר 12 זר למספר 23.

המספר 15 לא זר למספר 3333306.

המספר 3333306 לא זר למספר 15.

המספר 3333306 לא זר למספר 1242.

◆ המספר a זר למספר b רק כאשר

המספר b זר למספר a .

זוג המספרים a, b נקרא זוג מספרים זרים.

◆ התכונות של היחס "מספרים זרים":

- המספר 1 ומספר טבעי כלשהו הם מספרים זרים.

- שני מספרים ראשוניים הם מספרים זרים.

- מספר ראשוני זר לכל מספר שקטן ממנו.

- מספר ראשוני זר לכל מספר שאינו כפולה שלו.

- שני מספרים עוקבים תמיד זרים.

שקף מס' 2

שיטת אוקלידס לחיפוש הממג"ב

- מהו המחלק המשותף הגדול ביותר לזוג המספרים

$$?192, 48$$

$$\Leftarrow 192 : 48 = 4 \quad \Leftarrow 192 \text{ מתחלק ב- } 48 \text{ ללא שארית} \Leftarrow$$

$$[192, 48] = 48$$

מסקנה: אם בין שני מספרים טבעיים אחד מתחלק

בשני, המחלק של המספר הגדול

הוא הממג"ב של זוג מספרים אלה.

- מהו המחלק המשותף הגדול ביותר לזוג המספרים

$$?250, 48$$

$$250 : 48 = 5 \text{ (שארית 10)}$$

$$48 : 10 = 4 \text{ (שארית 8)}$$

$$10 : 8 = 1 \text{ (שארית 2)}$$

$$8 : \underline{2} = 4$$

טענה: המחלק בחילוק האחרון של התהליך

הוא הממג"ב של זוג המספרים הנתונים.

$$[250, 48] = 2$$

בדיקה: $250 : 2 = 125 = 5^3$, $48 : 2 = 24 = 2^3 \cdot 3$

שקף מס' 3

הצדקה לשיטת אוקלידס לחיפוש הממג"ב

$$250:48 = 5 \text{ (שארית 10)}$$

$$48:10 = 4 \text{ (שארית 8)}$$

$$10:8 = 1 \text{ (שארית 2)}$$

$$8:\underline{2} = 4$$

• למה 2 הוא מחלק משותף של 250 ו-48?

$$2 \text{ הוא מחלק של } 8 \qquad 8 = 4 \cdot 2$$

$$2 \text{ הוא מחלק של } 10 \qquad 10 = 1 \cdot 8 + 2$$

$$2 \text{ הוא מחלק של } \underline{48} \qquad 48 = 4 \cdot 10 + 8$$

$$2 \text{ הוא מחלק של } \underline{250} \qquad 250 = 5 \cdot 48 + 10$$

• למה 2 הוא המחלק המשותף הגדול ביותר

של 250 ו-48?

$$250 - 5 \cdot 48 = 10 \quad \text{כל מחלק של } 250 \text{ ו- } 48 \text{ מחלק את } 10.$$

$$48 - 4 \cdot 10 = 8 \quad \text{כל מחלק של } 48 \text{ ו- } 10 \text{ מחלק את } 8.$$

$$10 - 1 \cdot 8 = 2 \quad \text{כל מחלק של } 10 \text{ ו- } 8 \text{ מחלק את } 2.$$

2 הוא המחלק המשותף הגדול ביותר של הזוג 250 ו-48.