חילוק עם שארית בקבוצת N_0

מפגש שני

ד"ר איליה סיניצקי, מכללת גורדון

תחום תוכן מתמטי (בהתאמה לסילבוס) - ארבע פעולות החשבון, אומדן, סיטואציות בעיה, הכללות ו"הוכחות" אלגבריות.

רשימת מושגים מתמטיים שנלמדים בפעילות – שארית, פיצול הקבוצה לקבוצות זרות, פעולות חיבור וכפל מודולרי, גורמים של אפס.

קישור לנושאים נוספים: תבנית אלגברית, טכניקה אלגברית, סגירות הקבוצה לגבי פעולה, הכפולה המשותפת הקטנה ביותר ומספרים זרים.

חומרים ועזרים דרושים - דפים למשתלם מס' 1-4 (לדפי המשתלמים 2 ו- 3 מצורפים דפי פתרון). שקף מס' 1, שקף מס' 2, שקף מס' 3, שקף מס' 4. הדפים והשקפים נמצאים בנספחים של היחידה.

הערה: הרציונל, ארגון החומר, ומבנה היחידה מופיעים בתחילת המודולה המתקדמת: חילוק עם שארית בקבוצת N_0 - מפגש ראשון.

דפי הנחיות למרצה

מהלך מפגש 2

1. חילוק עם שארית והפרדת קבוצת המספרים הטבעיים

א. **הצגת הבעיה**. חילוק עם שארית היא פעולת חשבון בינארית, ובמובן זה היא דומה ליתר פעולות החשבון: חיבור, חיסור וכפל. אך התוצאה שלה אינה מספר אחד אלא זוג מספרים: מנה ושארית. כאשר מחלק של החילוק הוא מספר נתון K, על-ידי פעולה זאת מוגדרת פונקציה על קבוצת המספרים הטבעיים, המתאימה לכל מספר טבעי את שאריתו בחילוקו במחלק הנתון. תמונתו של כל אחד מהמספרים הטבעיים N תהיה מספר שלם לא שלילי (אפס, כאשר המספר N מתחלק ב- K, ומספר טבעי כאשר N מתחלק ב- K עם שארית). מטרת הפרק היא תיאור של קבוצות המספרים הנותנים שארית שווה בחילוק ב- K, והבנת הפיצול של קבוצת המספרים הטבעיים לקבוצות אלו.

ב. **שאלות תזכורת על התכונות הבסיסיות של השארית**:

- מהי השארית הקטנה ביותר בחילוק בכל מספר טבעי?
- מהי השארית הגדולה ביותר בחילוק במספר טבעי K?
- מהו השם של קבוצת המספרים הטבעיים שמתחלקים ב- 2 (ללא שארית)?
- מהו השם של קבוצת המספרים הטבעיים שמתחלקים ב- 2 עם שארית 1?

ג. **פיצול קבוצת המספרים הטבעיים לקבוצת זרות - דף למשתלמים מס' 1**. בדף זה עוסקים בפיצול של קבוצת המספרים הטבעיים לקבוצות מספרים שווי שארית בהתאם למחלק הנבחר. מספר הערות בקשר לטיפול בדף:

- פיצול של קבוצת המספרים הטבעיים למספרים הזוגיים והמספרים האי-זוגיים מהווה הדגמה של פיצול בהתאם לשארית. אך כאן כל המספרים שלא מתחלקים ב- 2, מאוחדים בקבוצה אחת. (למה? – כי בחילוק ב- 2 קיימת רק שארית אחת ששונה מ- 0.)
- חשוב לציין כי הקבוצות המתקבלות בפיצול הן קבוצות זרות, וקבוצת האיחוד שלהם היא קבוצת המספרים הטבעיים. במילים אחרות, בפיצול קבוצת המספרים הטבעיים בהתאם לשארית החילוק של מספר טבעי במספר מסוים K, כל מספר טבעי שייך בדיוק לאחת מקבוצות הפיצול.
- את מספר קבוצות הפיצול ניתן לדעת מראש, והוא שווה למחלק הנבחר, K. כדאי לציין, כי בין 0 ל- K (כולל שניהם) יש בדיוק K מספרים שלמים.
- בכל פיצול, בין כל הקבוצות יש קבוצה אחת מיוחדת – קבוצת המספרים שמתחלקים ללא שארית. תפקידה חשוב לנו להרכבת התבניות האלגבריות לה וליתר הקבוצות. "מהם השמות נוספים של קבוצה זאת?" (קבוצת הכפולות של K, קבוצת המספרים הטבעיים שמתחלקים ב- K עם שארית 0).
- בשלב הראשון, ניתן להסתפק בהרכבת הביטויים האלגבריים הרלוונטיים רק לקבוצות של כפולות של המחלק.

2. קבוצות מספרים שווי שארית – התיאור האלגברי

א. מיומנות של הרכבת תבניות אלגבריות פשוטות ושל זיהוי תכונות המספרים בהתאם לתבנית חשובה מאוד לתלמידים להבטחת המעבר המוצלח משפה חשבונית לשפה אלגברית. מסיבה זאת חשוב להעמיק את הידע של המתמקצעים בנושא. הרכבת התבניות המתאימות מתבצעת באמצעות **דף למשתלמים מס' 1** ותוצאותיה מסוכמות ב- **שקפים מס' 2-1**.

בשקף מספר 1 מוצג פיצול של קבוצת המספרים הטבעיים לקבוצות המספרים הזוגיים והאי-זוגיים עם הדגש על אופציות רבות לשיום קבוצות אלו. כהמשך, כל אחת מהקבוצות מפוצלת לשתיים בהתאם לשארית המספר בחילוקו ב- 4. יש לציין כאן את הקשר הברור בין חלוקה הראשונה והשנייה: המספרים הזוגיים בחילוקם ב- 4 ייתנו שארית 0 (התחלקות ללא שארית) או שארית 2, וכל המספרים האי-זוגיים נותנים שארית 1 או 3 בחילוק ב- 4. יישום מיידי של הפיצולים האלה הוא בניסוח פעם נוספת של התנאי ההכרחי של התחלקות ב- 4: אם מספר טבעי הוא אי-זוגי, הוא לא מתחלק ב- 4.

שקף מספר 2 מביא דוגמה נוספת של הפרדת קבוצת המספרים הטבעיים לקבוצות זרות לפי השארית בחילוק ב- 3. על הדיאגרמה כדאי לבקש לסמן את נציגי הקבוצות (כולל המספרים 1 ו- 2 הנותנים את השאריות 1 ו- 2 בהתאם, בחילוק ב- 3). בנוסף מוצגת "תמונה כללית" של הפיצול של קבוצת המספרים הטבעיים ל- K קבוצות, לפי השאריות (0, 1, ..., K–1) בחילוק ב- K. כדאי לציין, כי כאשר K אינו מספר ראשוני, ניתן לבנות פיצול זה על סמך חלוקת הקבוצה של המספרים הטבעיים בהתאם לשאריות בחילוק במספר שהוא מחלק של K, בדומה למעבר מ- 2 ל- 4 קבוצות פיצול.

ב. הרכבה של התבניות האלגבריות לקבוצות המספרים שווי השארית כדאי לבסס על סדרות המספרים שווי השארית ולהתחיל מכפולות של המספר. שלבי הרכבת התבנית מוצגים ב**שקף מס' 3**. במעבר מסדרת הכפולות לתבנית מנצלים את המשמעות של המילה "כפולה": שלוש **כפול** מספר טבעי אחר. את סדרת המספרים המתחלקים ב- 3 עם שארית 1 כדאי לקבל מסדרת הכפולות של 3 ("מהו ההפרש בין איברי הסדרות?"). אך צריך להדגיש שהתבנית 3n+1 אינה מכילה את המספר 1 כאשר n הוא מספר טבעי. בצורה דומה ניתן להסביר גם את הרכבת התבנית 3n+2.

כדאי לציין, כי "הנזק" הנגרם מהאי-אחידות של תחומי ההצבה (n הוא מספר טבעי בתבנית לכפולות ויכול להיות גם 0 ביתר התבניות) מפוצה בראייה הישרה של השארית של החילוק בתבניות המורכבות. אגב, בגישה אחרת כדאי לכתוב 1 מתחת ל- 3, 4 מתחת ל- 6 וכו', למשל:

3	6	9	...
1	4	7	...

ולשאול את השאלה המתאימה "כמה חסר?" התבניות שיתקבלו בגישה זאת הן 3n-2 ו- 3n-1 למספרים שמתחלקים ב- 3 עם שאריות 1 ו- 2 (בהתאם).

ג. בהמשך כדאי לתרגל את מיומנות הרכבת התבניות לקבוצות דומות (מספרים שמתחלקים ב- 5 עם שארית 3 וכדומה). בין היתר כדאי לבקש הרכבת תבניות של הכפולות (שארית 0) ולברר מהו האיבר הקטן ביותר בכל אחד מהמקרים. בשלב הבא ניתן להתמודד עם הבעיה ההפוכה: שיום הקבוצה לפי תבניתה.

3. תכונות של חילוק עם שארית

א. **התכונות הפשוטות שניתן לראות מהתבניות**

הפגשת המשתלמים עם שאלות מהסוג:

- מהו מספר השאריות השונות בחילוק מספר טבעי במספר N? (N שאריות, מ- 0 עד N-1)
- מהו המספר הטבעי הקטן ביותר שנותן שארית 2 בחילוק ב- 5? מהי המנה של החילוק? (המספר הוא 2, ומנת החילוק שווה ל- 0. במילים אחרות, כדי לקבל את התשובה, יש להציב את 0 במקום n בתבנית 5n+2.)
- מהי ספרת היחידות של המספרים שמתחלקים ב- 10 עם שארית 5?
- במה בוודאות מתחלק מספר טבעי שנותן שארית 2 בחילוק ב- 4? (להוציא את הגורם המשותף 2 בתבנית 4n+2.)

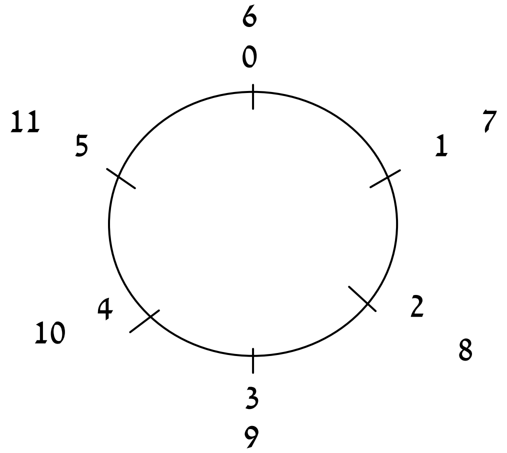
ב. **השפעת שינוי במחלק על המנה ועל השארית**

דף למשתלמים מס' 2 מיישם את השימוש בתבניות אלגבריות לקבוצות המספרים שווי השארית. הדף מתחיל בחזרה על הקשר בין התחלקות במספר והתחלקות במחלקו ובכפולתו. בהמשך, המשתלמים אמורים להגיע לקביעה חד-משמעית של השארית בחילוק המספר הנתון במחלק החדש, שהוא מחלק של המחלק המקורי, ולאוסף אפשרויות של השארית בהחלפת המחלק הנתון בכפולתו. בנספח דף

פתרונות ל**דף למשתלמים מס' 2**. אין צורך לדרוש מהמשתלמים את ההוכחות למסקנות וניתן להסתפק בהצגת הדוגמאות הרלוונטיות.

4. שארית של הסכום ושל המכפלה: יישומים

א. **כללים: חשבון של שאריות**. מבלי להשתמש בשפה פורמלית של חשבון מודולרי, המשתלמים אמורים להגיע לכללי עבודה עם השארית. כדאי להסביר כי קבוצת שאריות אפשריות בחילוק במספר מסוים, היא קבוצה שבתוכה ניתן לבצע פעולות חשבון. מומלץ להתחיל את הנושא מחזרה לפילוג קבוצת המספרים הטבעיים, ומהמחשה ויזואלית של פילוג זה: למקם את סדרת המספרים הטבעיים (וגם האפס) על המעגל בהתאם לשארית בחילוק המספר הטבעי (למשל, ב- 6). מתקבלת "ספירלה" של המספרים הטבעיים ואפס, והמספרים שווי השארית נמצאים על הקווים הישרים היוצאים מהמרכז.



אם ניקח את הנציגים הקטנים ביותר מכל אחת מהקבוצות, נקבל את קבוצת השאריות בחילוק ב- 6. קבוצה זאת מכילה שישה איברים, וניתן להגדיר עליה את הפעולות חיבור וכפל מודולרי. יש להדגיש כי הגדרה זאת אינה שרירותית: סכום (מכפלה) של שתי שאריות שווה לשארית של הסכום (המכפלה) של שני המספרים השייכים למחלקה של השאריות הנתונות. למשל, סכום המספר שנותן שארית 3 בחילוק ב- 6 עם המספר שנותן שארית 4 בחילוק ב- 6 ייתן שארית 1 בחילוק ב- 6 (למה? כי $(6n+3)+(6k+4)=6(n+k)+6+1$) ובכך, $3\oplus_6 4=1$, כאשר הסימן $\oplus_6$ מסמן את החיבור המודולרי בבסיס (מודולו) 6.

ללא ספק, כדאי לתת למשתלמים הזדמנות לבניית לוחות החיבור והכפל המודולרי בבסיס כלשהו (אך רצוי, לא של מספר גדול). יש כל הזמן להמחיש את התוצאה באמצעות הדוגמאות המספריות. כדאי לציין במיוחד את המקרים של תוצאת אפס: משמעות התשובה (המספר מתחלק ב- 6) והסיבה לתשובה זאת (למשל, מכפלת שני המספרים שאחד מהם מתחלק ב- 6 עם שארית 2 והשני עם שארית 3מתחלקת ב- 6).

לוחות החיבור והכפל המודולרי מופיעים ב**שקף מס' 4.**

המבנה של הלוחות ותכונותיהם הם נושא לסדנה נפרדת המתייחסת ללוחות פעולה.

מבחינה מתמטית, חשוב להדגיש כי בקבוצה זאת קיימים מחלקים של אפס: כאשר מכפלה שווה לאפס, לא בהכרח אחד מהגורמים הוא 0 (למשל, $3\otimes_6 4=0$). הדבר נכון, כמובן, רק כאשר הבסיס אינו מספר ראשוני.

בתור דוגמה נוספת ויישום כדאי לעבוד על דף העבודה "**מה השארית**" (מופיע בנספח) שחובר על-ידי ד"ר בת-שבע אילני (**דף למשתלמים מס' 4**).

ב. **בעיות הקשורות בהתחלקות**. קיים אוסף בעיות מסוגים שונים הקשורות בהתחלקות ובחילוק עם שארית. ב**דף למשתלמים מס' 3** רוכזו חלק מהבעיות שפתרונותיהם מבוססים על הנושא הנלמד ורלוונטיים להוראה בכיתות הלימוד של המשתלמים. בנספח מופיע גם דף פתרונות לדף למשתלמים מס' 3. חלק מהבעיות הן בפירוש בעיות חקר (למשל, השאלה על התחלקות של סכומי מספרים עוקבים), ומומלץ להציג אותן לעבודה בקבוצות.

נספחים

דף למשתלמים

תוכן מפגש 2

1. חילוק עם שארית והפרדת קבוצת המספרים הטבעיים
2. קבוצות מספרים שווי שארית – התיאור האלגברי. כיצד לראות את השארית מהתבנית?
3. תכונות של חילוק עם שארית
4. שארית של סכום ושל מכפלה, מבוא לחשבון המודולרי
5. יישומים: שארית בלוחות המספרים, סכומים של מספרים עוקבים
6. משחקים שקשורים בתכונות ההתחלקות

רשימת מושגים מתמטיים:

שארית, פיצול הקבוצה לקבוצות זרות, פעולות חיבור וכפל מודולרי, גורמים של אפס.

קישור לנושאים נוספים:

תבנית אלגברית, טכניקה אלגברית, סגירות הקבוצה לגבי פעולה, הכפולה המשותפת הקטנה ביותר, מספרים זרים.

דף למשתלמים מס' 1

פיצול קבוצת המספרים הטבעיים

א. מהו השם של קבוצת המספרים הטבעיים שמתחלקים ב- 2?
כמה מספרים יש בקבוצת המספרים הזוגיים?
מה מאפיין את קבוצת המספרים האלה?

מסקנה: את הקבוצה של המספרים הטבעיים ניתן לפצל לשתי קבוצות זרות: ______________________.

ב. מהו השם של קבוצת המספרים הטבעיים שמתחלקים ב- 3?
מהם השמות הנוספים של אותה הקבוצה?
מהן השאריות השונות מ- 0 שניתן לקבל בחילוק ב- 3?
מהן שתי הקבוצות הנוספות של המספרים הטבעיים שנוצרות בחילוק ב- 3?
אם נשייך כל מספר טבעי לקבוצה מסוימת בהתאם לשאריתו בחילוק ל- 3, כמה קבוצות נקבל?

מסקנה: את הקבוצה של המספרים הטבעיים ניתן לפצל לשלוש קבוצות זרות: כפולות של 3 (מס' טבעיים שמתחלקים ב- 3 ללא שארית), מספרים ______________ ______________ ו- ______________.

ג. מהן השאריות האפשריות בחילוק של מספר טבעי כלשהו ב- 4?
מהם השמות של הקבוצות המתקבלות מהקבוצה של המספרים הטבעיים בהתאם לשאריותיהם בחילוק ב- 4?

מסקנה: את הקבוצה של המספרים הטבעיים ניתן לפצל לארבע קבוצות זרות:

____
____
____
______________________.

ד. *הכללה:* את הקבוצה של המספרים הטבעיים ניתן לפצל ל- K קבוצות זרות.
בכל אחת מהקבוצות, כל האיברים נותנים שארית זהה בחילוק ב- K.
בקבוצה הראשונה השארית שווה ל- 0 (קבוצת המספרים ______________),
בקבוצה השנייה השארית שווה ל- 1 (קבוצת המספרים ______________),
בקבוצה השלישית השארית שווה ל- 2 (קבוצת המספרים ______________)
ובקבוצת ה- K כל המספרים המתחלקים ב- K עם שארית ______________.

דף למשתלמים מס׳ 2

קשר בין שאריות

1. התחלקות במחלק של המספר הנתון.

א. האם כל מספר שמתחלק ב- 4 מתחלק גם ב- 2? נמקו את דעתכם!

ב. האם כל מספר שמתחלק במספר מסוים מתחלק גם במחלק שלו? למה?

2. שארית בשינוי המחלק: המחלק החדש מחלק את המחלק המקורי.

א. בדקו כמה מספרים שמתחלקים ב- 4 עם שארית (שונה מ- 0): מהי השארית שלהם בחילוק ב- 2?

מסקנות: אם מספר מתחלק ב- 4 עם שארית 1, הוא מתחלק ב- 2 עם שארית _____.

נימוק: $4n+1=2\cdot(2n)+1$

אם מספר מתחלק ב- 4 עם שארית 2, הוא מתחלק ב- 2 עם שארית __ (_____).

נימוק: $4n+2=$

אם מספר מתחלק ב- 4 עם שארית 3, הוא מתחלק ב- 2 עם שארית ____.

נימוק:

ב. כיצד ניתן לדעת את השארית בחילוק המספר ב- 2 על סמך שארית בחילוקו ב- 4?

ג. *מסקנה:* אם מספר k הוא מחלק של מספר n, השארית בחילוק מספר נתון ב- k שווה ל_______________________________.

דוגמאות: המספר 17 מתחלק ב- 6 עם שארית 5, אז הוא מתחלק ב- 3 עם שארית 2;

המספר 14 מתחלק ב- 6 עם שארית 2, אז הוא מתחלק ב- 3 גם עם שארית 2;

הוסיפו שלוש דוגמאות משלכם:

דף למשתלמים מס׳ 2 - המשך

3. שארית בשינוי המחלק: המחלק החדש הוא כפולה של המחלק המקורי.

א. אם מספר מסוים מתחלק ב- 3, מה ניתן לומר על השארית בחילוקו ב- 6?

ב. אם מספר מסוים מתחלק ב- 3, מה ניתן לומר על השארית בחילוקו ב- 9?

ג. נסו להגיע להכללה.

רמז: בדקו, באילו מבין תשע המחלקות של קבוצת המספרים הטבעיים מרוכזות כל הכפולות של 3.

מסקנה: אם מספר N מתחלק במספר מסוים K, שארית החילוק של N בכפולה של המחלק K שווה ל-______________________________.

דוגמאות:

הכללות:

אם מספר נותן שארית D בחילוק ב- K, שארית חילוקו במספר 2K תשווה ל- D או ל- (D+K).

אם מספר נותן שארית D בחילוק ב- K, שארית חילוקו במספר 3K תשווה ל- D, ל- (D+K) או ל- (D+2K).

דוגמאות:

דף למשתלמים מס' 2 - פתרונות

קשר בין שאריות

1. **התחלקות במחלק של המספר הנתון**

א. האם כל מספר שמתחלק ב- 4 מתחלק גם ב- 2? נמקו את דעתכם! כן, $4n = 2 \cdot (2n)$

ב. האם כל מספר שמתחלק במספר מסוים מתחלק גם במחלק שלו? למה? כן, בדומה ל-א.

2. **שארית בשינוי המחלק**: המחלק החדש מחלק את המחלק המקורי.

א. בדקו כמה מספרים שמתחלקים ב- 4 עם שארית: מהי השארית שלהם בחילוק ב- 2?

מסקנות: אם מספר מתחלק ב- 4 עם שארית 1, הוא מתחלק ב- 2 **עם שארית 1**.

אם מספר מתחלק ב- 4 עם שארית 2, הוא מתחלק ב- 2 **עם שארית 0 (מתחלק ללא שארית)**.

נימוק: $4n + 2 = 2(n + 1)$

אם מספר מתחלק ב- 4 עם שארית 3, הוא מתחלק ב- 2 עם שארית **1**.

נימוק: $4n + 3 = 2(n + 1) + 1$

ג. *מסקנה:* אם מספר k הוא מחלק של מספר n, השארית בחילוק המספר הנתון ב- k שווה **לשארית של חילוק של שארית החילוק ב- n במחלק החדש k**.

דוגמאות: המספר 15 מתחלק ב- 6 עם שארית 3, אז הוא מתחלק ב- 3 עם שארית 0;

המספר 15 מתחלק ב- 6 עם שארית 3, אז הוא מתחלק ב- 2 עם שארית 1;

המספר 15 מתחלק ב- 9 עם שארית 6, אז הוא מתחלק ב- 3 עם שארית 0;

המספר 100 מתחלק ב- 12 עם שארית 4, אז הוא מתחלק ב- 3 עם שארית 1.

3. **שארית בשינוי המחלק**: המחלק החדש הוא כפולה של המחלק המקורי.

א. אם מספר מסוים מתחלק ב- 3, מה ניתן לומר על השארית בחילוקו ב- 6?

הוא מתחלק ב- 6 או נותן שארית 3 בחילוק ב- 6. (כפולה של 3 שווה ל- 3n ומתחלקת ב- 6 כאשר n הוא זוגי, אך שווה ל- 3(2k+1)=6k+3 כאשר n הוא אי-זוגי).

ב. אם מספר מסוים מתחלק ב- 3, מה ניתן לומר על השארית בחילוקו ב- 9?

השאריות האפשריות הן 0, 3 או 6.

ג. נסו להגיע להכללה.

מסקנה: אם מספר n מתחלק במספר מסוים k, שארית החילוק של n בכפולה של המחלק k שווה **לאחת הכפולות של k: 0, k, 2k, 3k, ...**

הכללות: אם מספר נותן שארית D בחילוק ב- K, שארית חילוקו במספר 2K תשווה ל- D או ל- (D+K). אם מספר נותן שארית D בחילוק ב- K, שארית חילוקו במספר 3K תשווה ל- D, ל- (D+K) או ל- (D+2K).

דוגמאות: השארית של 15 בחילוקו ב- 2 שווה ל- 1, והשארית בחילוקו ב- 4 שווה ל- 3 (2+1=3), השארית בחילוקו ב- 6 שווה גם היא ל- 3, השארית בחילוקו ב- 8 שווה ל- 7 ($2 \times 3 + 1 = 7$).

דף למשתלמים מס' 3

במה מתחלק?

1. בדקו לכמה מספרים את ההפרש בין המספר וסכום הספרות שלו. מה מצאתם? מהי הכללתכם? נסו להוכיח אותה!

2. בחרו מספר דו-ספרתי עם ספרות שונות. כתבו מספר הבנוי מאותן הספרות אך בסדר הפוך. בדקו, במה מתחלק הסכום של שני המספרים שקיבלתם ובמה מתחלק ההפרש שלהם. חזרו על אותו התהליך עם מספר אחר. מהי טענתכם? נסו להוכיח אותה!

3. האם מכפלת המספרים הטבעיים מ- 1 עד 10 מתחלקת ב- 5? ב- 14? ב- 19? ב- 21? ב- 30? ב- 77?

4. בדקו כמה סכומים של שלושה מספרים טבעיים עוקבים. במה תמיד מתחלק סכום זה? למה?

5. מה ניתן לומר על סכום של חמישה מספרים טבעיים עוקבים? למה?

6. מהי הכללתכם לגבי סכום של מספרים עוקבים? האם היא תמיד נכונה? האם הטענה דומה במקרה של מספר זוגי ומספר אי-זוגי של מחוברים?

ניחוש המספר

1. מהו המספר הנותן שארית 1, בחילוקו ב- 3, ב- 5 וגם ב- 7?

2. האם קיים מספר המקיים בו-זמנית את התנאים הבאים:

שאריתו בחילוק ב- 3 שווה ל- 1,

שאריתו בחילוק ב- 4 שווה ל- 2,

שאריתו בחילוק ב- 5 שווה ל- 3,

שאריתו בחילוק ב- 6 שווה ל- 4?

3. נתון מספר תלת-ספרתי. אם נוריד ממנו 7, יתחלק ההפרש ב- 7; אם נוריד ממנו 8, יתחלק ההפרש ב- 8; אם נוריד ממנו 9, יתחלק הפרש ב- 9. מהו המספר?

4. לקחו כמות גדולה של מנדרינות וניסו לחלק אותן לשקיות בכמויות שוות. אך כאשר ניסו לחלק אותן ל- 10 מנדרינות לשקית, נותרו 9 מנדרינות. כאשר ניסו לחלק ל- 9 מנדרינות בשקית, נותרו 8 מנדרינות. ניסו להכניס 8 מנדרינות לכל שקית ואז נותרו 7. מדהים, אך כאשר החליטו להסתפק ב- 7 פרות לשקית, נותרו 6 פרות, כאשר הכניסו 6 בכל שקית נותרו 5 פרות. עם 5 פרות בכל שקית נותרו 4, כאשר שמו 4 פרות בכל שקית נותרו 3, עם 3 פרות בשקית נותרו 2, וכאשר הכניסו 2 פרות לכל שקית נשארה מנדרינה אחת. מהו מספר המנדרינות שניסו לחלק?

שני קסמים מתמטיים

1. בחרו מספר בין 6 ל- 60. ענו על השאלות: מהי השארית בחילוק המספר ב- 3? מהי השארית בחילוק המספר ב- 4? מהי השארית בחילוק המספר ב- 5? לפי תשובותיכם אנחש מהו המספר.

2. בחרו מספר בין 7 ל- 100. ענו על השאלות: מהי השארית בחילוק המספר ב- 3? מהי השארית בחילוק המספר ב- 5? מהי השארית בחילוק המספר ב- 7? לפי תשובותיכם אנחש מהו המספר.

דף למשתלמים מס' 3 - פתרונות והסברים

במה מתחלק?

1. ההפרש תמיד מתחלק ב- 9. לדוגמה, למספר תלת-ספרתי עם הספרות a, b, c ההפרש שווה ל- $100a + 10b + c - (a + b + c) = 99a + 9b = 9(11a + b)$.

2. שני המספרים הם $10a + b$ ו- $10b + a$, סכומם מתחלק ב- 11 והפרשם מתחלק ב- 9.

3. המכפלה (סימנה !10 וקריאתה "עשר עצרת") מתחלקת ב- 5 (הוא אחד מהגורמים במכפלה זאת), ב- 14 ($14 = 2 \times 7$), ב- 21 ($21 = 3 \times 7$), ב- 30 ($30 = 3 \times 10$) ואפילו ב- 900 ($900 = 3 \times 10 \times 5 \times 6$) אך לא מתחלקת ב- 19 (מספר ראשוני שלא מופיע בין הגורמים) ולא ב- 77 (כי אינה מתחלקת ב- 11).

4, 5, 6. סכום של $2n + 1$ מספרים עוקבים מתחלק ב- $2n + 1$. נוח לסמן את האמצעי מהם ב- a, הסכום הוא $(a - n) + (a - n + 1) + ... + (a - 1) + a + (a + 1) + ... + (a + n - 1) + (a + n)$ שווה ל- $(2n + 1)a$. במקרה של מספר זוגי יש $2n$ של מחוברים, הסכום מתחלק ב- n (או במילים אחרות מתחלק ב- $2n$ עם שארית n).

ניחוש המספר

1. אם נחסר אחד מהמספר שמדובר עליו, המספר החדש יתחלק ב- 3, ב- 5 וגם ב- 7 ללא שארית. אז, הוא יתחלק בכפולה משותפת שלהם, מכיוון שהם מספרים זרים, הוא חייב להתחלק במכפלתם ששווה ל- $3 \times 5 \times 7 = 105$. המספר הקטן ביותר שווה ל- 105+1=106, המספר המתאים הבא הוא $105 \times 2 + 1 = 211$.

2. מאוד נוח לציין **כמה חסר** למספר זה להתחלקותו בכל אחד מהמספרים הנתונים: אם נוסיף לו שתיים, יתחלק הסכום ב- 3, ב- 4, ב- 5 וב- 6. המספר הקטן שמתחלק בכל המספרים אלה, הוא הכמק"ב שלהם השווה ל- 60. המספר הנתון הוא ב- 2 קטן יותר ושווה ל- 58 (ככלל, אלה מספרים מהסוג $60n - 2$).

3. המספר בעצמו מתחלק ב- 7, ב- 8 וב- 9, אז הוא מתחלק ב- 504 ($9 \times 8 \times 7 = 504$). המספר הוא תלת-ספרתי, ולכן הוא יחיד ושווה ל- 504.

4. בדומה לבעיה מס' 2, למספר הנתון חסר אחד להתחלקותו בכל אחד מהמספרים הטבעיים מ- 1 עד 10. הכפולה המשותפת הקטנה ביותר לקבוצת מספרים אלה שווה ל- $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2520$. ומכאן שמספר הפרות הוא 2519.

דף למשתלמים מס׳ 3 - פתרונות והסברים - המשך

הסברים לשני קסמים מתמטיים

1. נסמן את שאריות החילוק של המספר ב- 3 ב- R_3, שאריות חילוקו ב- 4 ב- R_4, ושאריות חילוקו ב- 5 ב- R_5. נרכיב באמצעותם את התבנית ההבאה: $S = 40R_3 + 45R_4 + 36R_5$. אם כל אחת מהשאריות שווה ל- 0, המספר מתחלק ב- 3, ב- 4 וב- 5 ללא שארית, ומכאן הוא שווה ל- 60. ביתר המקרים שארית החילוק של S ב- 60 נותנת את המספר המקורי. הבחירה של המקדמים בתבנית של S כמובן אינה אקראית: המספר 40 (המקדם של R_3) מתחלק ב- 4 וב- 5, ובחילוק ב- 3 נותן שארית 1;

המספר 45 (המקדם של R_4) מתחלק ב- 3 וב- 5, ובחילוק ב- 4 נותן שארית 1;

המספר 36 (המקדם של R_5) מתחלק ב- 3 וב- 4, ובחילוק ב- 5 נותן שארית 1;

מצד שני, אם A הוא המספר הנתון,

$$A = 3T + R_3$$
$$A = 4U + R_4$$
$$A = 5V + R_5$$

אם נכפול כל אחת מהשורות במקדמים המתאימים ונחבר את השוויונות, נקבל את שוויון הבא: $121A = 120T + 180U + 180V + S$, וממנו נובע כי השארית בחילוק של S ב- 60 שווה למספר A (בתנאי שהוא קטן מ- 60).

אין צורך להציג את כל ההוכחה למשתלמים, אך כדאי לציין את תכונות המקדמים בתבנית של S.

2. בדומה למקרה הקודם, התבנית המתאימה היא $S = 70R_3 + 21R_5 + 15R_7$. שאריתו בחילוק ב- 105 נותנת את המספר הנתון (זה אומר שאת תחום המספרים ניתן להרחיב עד 105, ובמקרה של S=0 המספר המקורי הוא 105). גם במקרה זה המקדמים עונים על הדרישות הדומות (למשל, 70 מתחלק ב- 5 וב- 7 ובחילוק ב- 3 נותן שארית 1). כדאי לבקש מהמשתלמים להרכיב את הביטוי על סמך ההסברים לקסם הקודם.

כהמשך, ניתן להרכיב עם המשתלמים את הביטויים לניחוש המספר על סמך שארית החילוק במספרים אחרים. למשל, כל מספר שקטן מ- 140 ניתן לנחש על סמך השאריות של חילוקו ב- 4, 5 ו- 7 ($140 = 4 \times 5 \times 7$), התבנית המתאימה היא $S = 105R_4 + 56R_5 + 120R_7$. כדאי גם לפתח תבניות פשוטות יותר לניחוש המספר על סמך שאריות החילוק רק בשני מספרים (כמובן, זרים זה לזה).

דף למשתלמים מס׳ 4

ד״ר בת-שבע אילני, מכללת בית-ברל

מה השארית?

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70

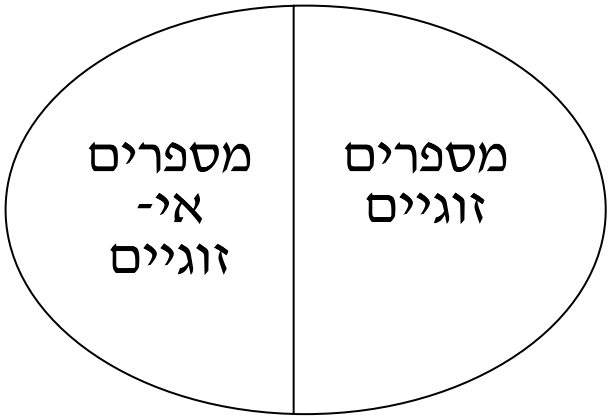
1. התבוננו בטבלה, מצאו דברים מיוחדים בטבלה.
2. בחרו מספרים מעמודה 6 חלקו ב - 7, מה מאפיין את התוצאות?
3. בחרו מספרים מעמודה 3 חלקו ב - 7, מה מאפיין את התוצאות?
4. בחרו מספרים מעמודה 2 חלקו ב - 7, מה מאפיין את התוצאות?
5. היכן נמצאים המספרים שהשארית בחילוק ל- 7 היא 5? 1?
6. מהן כל השאריות האפשריות עבור חילוק ב- 7? הסבירו את תשובתכם.
7. בחרו 2 תרגילי חילוק והפכו אותם לתרגילי כפל, לדוגמה:

   $29:7=4(1)$ תרגיל הכפל: $4\times7+1=29$

8. מצאו את הקשר בין תרגיל החילוק לתרגיל הכפל, מה תפקיד השארית בתרגיל הכפל?
9. בחרו מספר מעמודה 2 ומספר מעמודה 4 חברו אותם, היכן נמצאת התוצאה? בחרו מספרים אחרים מאותן עמודות היכן נמצאות התוצאות? מדוע?
10. חיזרו על פעילות 10 בשתי עמודות אחרות.
11. ערכו חקירה דומה בחילוק במספר אחר: צרו טבלה מתאימה ושנו את המספרים שבשאלות בהתאם.

שקף מס׳ 1

פיצול קבוצת המספרים הטבעיים
לקבוצות מספרים שווי שארית



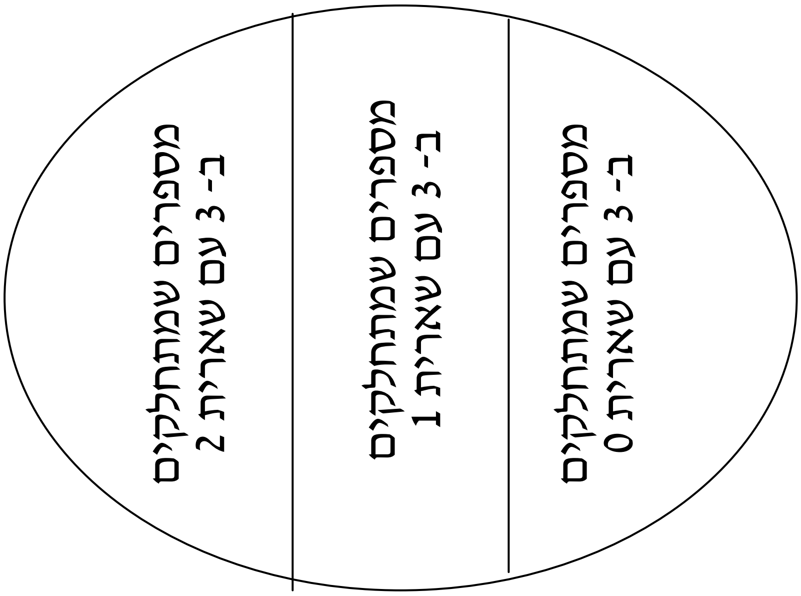
שמות חליפיים:

- **מספרים שמתחלקים ב- 2**
- **מספרים שמתחלקים ב- 2 ללא שארית**
- **כפולות של 2**

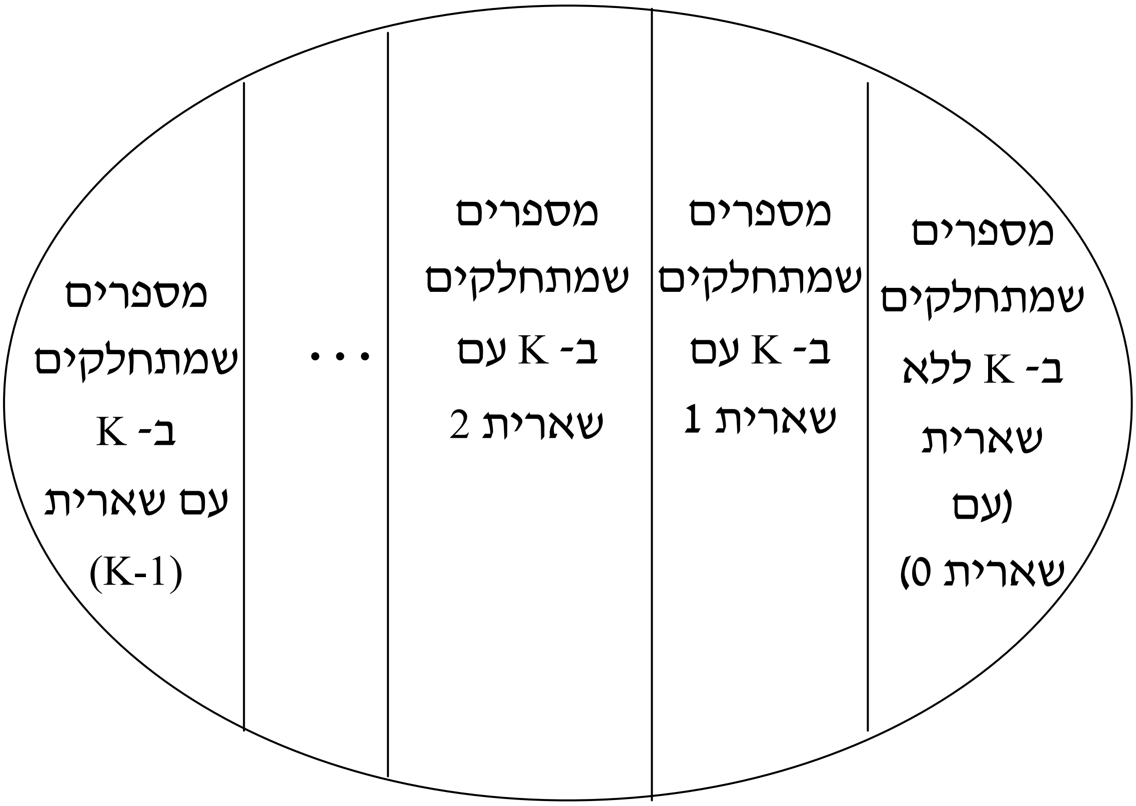
- **מספרים שלא מתחלקים ב- 2**
- **מספרים שמתחלקים ב- 2 עם שארית**
- **מספרים שמתחלקים ב- 2 עם שארית 1**

שקף מספר 2

מחלקות של קבוצת המספרים הטבעיים
לפי השארית בהתחלקות ב- 3



מחלקות של קבוצת המספרים הטבעיים
לפי השארית בהתחלקות ב- K



שקף מספר 3

תבניות אלגבריות למספרי שווי שארית

- סדרת המספרים המתחלקים ב- 3 (ללא שארית)

$3, \quad 6, \quad 9\ , \quad 12\ ,..., 48, ...,$

שם אחר של הקבוצה: כפולות של 3

$3\cdot 1, 3\cdot 2, 3\cdot 3, 3\cdot 4, ..., 3\cdot 16, ...$

תבנית אלגברית: $3\cdot n$, כאשר n מספר טבעי.

- סדרת המספרים המתחלקים ב- 3 עם שארית 1

$1, \quad 4, \quad 7, \quad 10\ , \quad 13,..., 49, ...,$

נשווה: $3, \quad 6, \quad 9\ , \quad 12\ ,..., 48,...,$

תבנית אלגברית: $3\cdot n + 1$, כאשר n מספר טבעי או 0.

- סדרת המספרים המתחלקים ב- 3 עם שארית 2

$2, \quad 5, \quad 8, \quad 11\ , \quad 14,..., 50, ...,$

נשווה: $3, \quad 6, \quad 9\ , \quad 12\ ,..., 48, ...,$

תבנית אלגברית: $3\cdot n + 2$, כאשר n מספר טבעי או 0.

שקף מס' 4

לוח החיבור המודולרי (מודולו 6)

$\oplus_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

לוח הכפל המודולרי (מודולו 6)

$\otimes_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1