בעיות "טובות" מהן?

הדגמה באמצעות הבעיה – "סכומים של מספרים"

ד״ר בת-שבע אילני, מכללת בית-ברל

תחום תוכן מתמטי (בהתאמה לסילבוס) - סיטואציות בעיה.

קישור לנושאים - גילוי חוקיות, הכללות, סדרות חשבוניות, ממוצע חשבוני וחזקות.

מטרות המפגש - היכרות עם בעיות טובות דרך דוגמה של בעיה העוסקת בסכומים של מספרים עוקבים.

זמן משוער ללימוד הנושא: 2 ש״ל.

חומרים ועזרים דרושים: 3 דפים למשתלם ושקף (נמצאים בנספחים שבסוף היחידה).

מבוא

ביחידה זו נעסוק בפתרון בעיות ״טובות״, נאפיין אותן מדוע הן נקראות בעיות ״טובות״ ומהו הייחוד שלהן.

בעיות ״טובות״ מהן?

בעיות ״טובות״ הן בעיות לא שגרתיות שבעזרתן ניתן לחשוף את יכולתם המתמטית של התלמידים לא רק מבחינת ידיעת פרוצדורות וטכניקות ביצוע מתמטיות, אלא גם מבחינת תהליכי חשיבה ואסטרטגיות פתרון שבהן התלמידים משתמשים.

בעיות מסוג זה חשוב לכלול הן בהוראה והן בהערכה משימות בעלות פתרון לא אלגוריתמי הדורשות חשיבה ברמה גבוהה יותר.

שונפלד (Schoenfeld, 1982) רואה בהתמודדות עם שאלות בלתי שגרתיות הזדמנות להפגנת מומחיות; לטענתו, כאשר מתמטיקאי משתמש בנוסחה הוא אינו חושב, במובן של תהליך חשיבה יצירתי אלא זו הפעלה של אלגוריתם שגור. כדי לבחון דבר זה, יש צורך להעמיד בפני המתמטיקאי בעיה שעבורה אין לו גישה לסכמת פתרון ידועה מראש. התנהגותו במקרה כזה שונה לחלוטין. על-פני השטח הוא איננו עוד מקצוען, הוא מגשש אחר פתרון בתהליך של ניסוי וטעייה ובסופו של דבר עם קצת מזל מצליח לפתור. דווקא אופן פעולה זה הוא ההופך אותו לפותר בעיות טוב. גם קלארק וסליבן (Clarke & Sullivan, 1992) סוברים כי שאלות פתוחות מחיי יומיום הן הכלי המתאים להדריך ולהעריך תלמידים בתחום פתרון בעיות לא שגרתיות. בשאלות פתוחות יש לכל תלמיד אפשרות לבחור באסטרטגיה המתאימה לרמה הקוגניטיבית בה הוא נמצא.

קרסנטי (1993) טוענת שבשאלות פתוחות, לא שגרתיות ומעוררות חשיבה, ניתן לחקור את התשובות לעומק ולחשוף הרבה מהתכונות המתמטיות של הלומד, כגון, מקוריות וביקורת עצמית. מטלות מסוג זה נקראות מטלות אותנטיות, כלומר, מטלות בעלות ערך, הדורשות מהתלמיד להפעיל שיפוט ולהשתמש בידע לפתרון בעיה בהקשר ממשי, כלומר, הקשר שבו נתקלים בבעיות כאלה בחיים. מטלה אותנטית מורכבת ואינה מוגדרת באופן חד-משמעי, היא

בעלת שלבים אחדים ואין לה תשובה נכונה אחת. ביצוע המטלה דורש, הפעלת שיפוט בבחירת הידע המתאים ואופן יישומו, מיומנויות בקביעת סדר עדיפויות וארגון השלבים של הבהרת הבעיה ודרכי הפתרון. המטלה יכולה להתבצע על-ידי תלמידים אחדים בסיטואציה טבעית, ללא הגבלה של זמן, כלים ומקורות (בירנבוים, 1994).
השתתפות במטלות אותנטיות מניעה את התלמידים לעמוד בעבודה הקשה הנדרשת במהלך הלמידה, מאחר שלעבודה האותנטית יש ערך מעבר להפגנת מיומנויות בבית-הספר. מטלה אותנטית מאפשרת לתלמידים לעשות שימוש מקיף יותר בשכלם, לכן תהיה להם מעורבות גדולה יותר בהישג אותנטי. נמצא, שתלמידים הלומדים בכיתות שמקדמות את ההישגים האותנטיים הם תלמידים מעורבים יותר.
אתגרים אותנטיים מטפחים כישורים לחשיבה בסדר גודל גבוה יותר ומטפחים את הכושר לפתור בעיות, כישורים שיהיו שימושיים הן ליחיד והן לחברה. יש סיכוי רב יותר שהשליטה הנרכשת בבית-הספר במהלך עבודה אותנטית, תועבר לחיים שמחוץ לבית הספר.

מאפייניה של מטלת אותנטית מובאים בספרה של מנוחה בירנבוים (1997) "חלופות בהערכת הישגים":

- מטלה המאפשרת פתרונות שונים, נקודות מבט שונות וכיווני מחקר המובילים לשאלות אחרות או עשויים לשפוך אור חדש על הידע הקודם .
- מטלה אינטגרטיבית הדורשת לערוך קישורים בין חלקים נפרדים של תכנית הלימודים ומערבת ידע קודם.
- מטלה שאינה מובנית בצורה חד-משמעית (loosely structured), ולכן על התלמיד להבנות או לנסח את הבעיה בטרם יחל בפתרונה ולהפעיל שיקול דעת בבחירת הידע המתאים ואופן יישומו.
- מטלה שביצועה מתמשך לאורך זמן והיא דורשת תכנון וביצוע חקירה, ומאפשרת לתלמיד בחירה ובקרה על עבודתו.
- מטלה המאפשרת עבודה בצוות, אם משום גודלה, אם משום שהיא מאפשרת מגוון גישות או היבטים, ואם משום שהיא מאפשרת להעמיק את ההבנה באמצעות הדיון הקבוצתי.
- מטלה המספקת הזדמנות להערכה עצמית ורפלקציה.
- מטלה בעלת משמעות אישית לתלמיד, מעניינת, מאתגרת, פרובוקטיבית ומושכת, הגורמת להמשך העניין בנושא.

בירנבוים טוענת שאף אחת מהמטלות האותנטיות אינה כוללת את כל המרכיבים שנזכרו לעיל, אלא כל אחת כוללת צירופים שונים שלהם.

בבעיות אותנטיות ניתן להגיע לדרכי פתרון שונות ומקוריות, ולפיכך הן מאפשרות בחינת יכולתו המתמטית של הלומד, וניתן להדגיש את תהליך הפתרון ולאו דווקא להתמקד בתוצאה הסופית. בהערכת יכולתם המתמטית של הלומדים יש חשיבות רבה למעקב אחר תהליך הפתרון ואחר

תהליכי החשיבה המנחים את הלומדים. מטלות מסוג זה מתאימות לשמש ככלי הערכה בהתאם למגמות החדשות בהוראת המתמטיקה. כדי ליצור חפיפה בין הלמידה וההוראה בכיתה לבין ההערכה יש לתת מטלות הערכה מתאימות לדרך ההוראה. מכיוון שאנו שואפים לבסס את ההוראה והלמידה בכיתה על תהליכי חקר וגילוי, המתבצעים תוך כדי פתרון בעיות, הערכת תלמידים צריכה אף היא להתבסס על משימות מסוג זה. דרך ההוראה צריכה להיות בעבודה בקבוצות הטרוגניות תוך שימת דגש על עבודה במשימות אותנטיות הדורשות חקר וגילוי, דיונים ושיחות מתמטיות בתוך הקבוצות ובמליאה.

היעדים שנוכל להגיע אליהם בעזרת בעיות אותנטיות הם: ללמד מתמטיקה משמעותית ולא מנותקת; ליצור ידע בעל ערך ללומדים; לקשור קשרים בין תחומים שונים במסגרת מתמטית, במסגרת של מקצועות אחרים ובחיי יום-יום; וללמד את התלמידים לנמק ולהציג את פתרונותיהם.

מהלך המפגש

1. המשתלמים יעבדו בקבוצות על **דף למשתלמים מס׳ 1**: ״סכומים של מספרים״, יפתרו אותו, וידונו בקבוצות בנקודות הדיון שבדף.
2. ייערך דיון במליאה בפתרונות הבעיה.
3. המשתלמים יעבדו בקבוצות על **דף למשתלמים מס׳ 2**: ״מחברים רק עוקבים״, וידונו בקבוצות בנקודות הדיון שבדף.
4. ייערך דיון במליאה בנושא מהי בעיה ״טובה״, ומדוע בעיית ״סכומים של מספרים״ היא בעיה טובה. הדיון ייערך בעזרת **שקף מס׳ 1**: נימוקים להיות הבעיה ״סכומים של מספרים״ בעיה טובה. כמו כן יערך דיון בדומה ובשונה בין צורת הצגת השאלה במאמר ״מחברים רק עוקבים!״ לבין צורת הצגת השאלה **בדף למשתלמים מס׳ 1** - ״סכומים של מספרים״ (שאלה 2 **בדף למשתלמים מס׳ 2)**.
5. המשתלמים יחפשו משימות דומות המתאימות לתלמידיהם בכיתות השונות (**דף למשתלמים מס׳ 3**) - משימה זו יכולה להינתן כעבודת בית.

הערות והארות לשאלות שבדף למשתלמים מס׳ 1

דוגמאות לניתוח הבעיה נלקחו מאוסף תשובות של מורים וסטודנטים במכללות להכשרת מורים), הדוגמאות כוללות תשובות מלאות תשובות חלקיות ותשובות שאינן נכונות:

שאלה 1 - מצאו מספרים השונים מ- 9 ו- 15 שנוכל לייצגם כסכומים של מספרים עוקבים.

השאלה מהווה המשך לדוגמאות ומאפשרת התנסות ראשונה בבעיה.

בכל אחת מהשאלות, יש הכוונה הנותנת אפשרות להתנסות שמטרתה גילוי חוקיות.

כדי להגיע לתשובות האפשריות, צריך לערוך חקירה, או להתחיל את החקירה בניסוי וטעייה.

שאלה 2 - אילו מספרים לא ניתנים לייצוג כסכומים של מספרים עוקבים?

דוגמאות לתשובות:

דוגמאות לתשובות לא נכונות (הערה: ת - קיצור לתשובה.)

ת - מספרים זוגיים:

$12=6+6$
$12=4+8$
$12=4+7$
$8=4+4$

(תשובות לא נכונות, נראה שהעונה הבינה שצריך להיות סכום של שני מספרים לא מחייב עוקבים!)

מספרים אי-זוגיים ניתנים לייצוג:

$21=11+10$
$43=22+21$
$55=28+27$

התשובה אומנם נכונה אך לא הייתה כאן התייחסות ליותר משני משתנים, אולם אותה אחת רשמה כתשובה לשאלה אחרת $12=3+4+5$.

דוגמאות לתשובות נכונות

ת - כל החזקות של 2: 2^n, כאשר n - כל מס׳ טבעי וגם 0.

הסבר - מכיוון שהמס׳ 2 אינו ניתן לכתיבה כסכום של מספרים עוקבים כך גם הריבועים שלו.

שאלה 3 - אילו סוגי מספרים ניתנים לכתיבה כסכום של שניים, שלושה, ארבעה, או יותר מספרים עוקבים?

כדי לענות על שאלה זו באופן מלא צריך לערוך חקירה.

דוגמאות למקרים פרטיים

ת - כסכום 2 מס׳ עוקבים - אי זוגיים ראשוניים.

כסכום 3 מס׳ עוקבים - כפולות של 3.

כסכום 4 מס׳ עוקבים - מספרים שההפרש ביניהם 4. דוגמה: 18,14,10.

דוגמה: כסכום של 5 מס׳ עוקבים - מספרים שההפרשים ביניהם 5. ... 20, 15

דוגמאות לניסיונות להכליל

עיקרון הממוצע החשבוני

ת - כסכום של שני מספרים עוקבים - מספרים אי-זוגיים; כסכום של שלושה מספרים עוקבים - מספר המתחלק ב- 3.

הערה: המספר העוקב האמצעי קטן פי 3 מהסכום.

$\underline{18}=5+\underline{6}+7$

$\underline{24}=7+\underline{8}+9$

הקשר לתכונות חלוקה של מספרים

ת - המספרים הניתנים לכתיבה כסכום של שלושה מספרים עוקבים הם מספרים זוגיים המתחלקים גם ב- 3. כלומר, מספרים המתחלקים ב- 6.

(הכללה זו אינה נכונה כי שלושה מחוברים נותנים פעם תשובה זוגית ופעם תשובה אי-זוגית לכן הם לא תמיד מתחלקים ב- 6).

תלות במספר הופעות של מספר זוגי או אי-זוגי:

ת - אי-זוגי מס' זוגי של פעמים - סכום זוגי.

אי-זוגי מס' אי-זוגי של פעמים - סכום אי-זוגי.

שלושה מספרים: ראשון זוגי - תוצאה אי-זוגית, ראשון אי-זוגי - תוצאה זוגית.

הכללות בעזרת סדרות

ת - כסכום של שני מספרים עוקבים: $n + (n + 1) = 2n + 1$.

כסכום של שלושה מספרים עוקבים: $n+(n+1)+(n+2)=3n+3$.

כסכום של ארבעה מספרים עוקבים: $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=4n+6$.

כסכום של חמישה מספרים עוקבים: $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)=5n+10$.

ת- כסכום של 2 מס' עוקבים - מס' אי-זוגיים.

כסכום של 3 מס' עוקבים - כפולות של 3.

כסכום של 4 מס' עוקבים - סדרה חשבונית - $a_1=10$ $d=4$.

כסכום של 5 מס' עוקבים - סדרה חשבונית - $a_1=15$ $d=5$.

כסכום של 6 מס' עוקבים - סדרה חשבונית - $a_1=21$ $d=6$.

כסכום של 7 מס' עוקבים - סדרה חשבונית - $a_1=28$ $d=7$.

כסכום של 4 מס' עוקבים - סדרה חשבונית - $a_1=36$ $d-8$.

ת - התבנית הכללית לסדרות היא: $nm + [1 + 2 + 3 + ... + (n - 1)]$

2 עוקבים - $2m+1$

3 עוקבים - $3m+3$ n - מס׳ המספרים העוקבים.

4 עוקבים - $4m+6$ m - המס׳ הסידורי של האיבר.

5 עוקבים - $5m+10$

שאלה 4 - בכמה צורות שונות של סכום מספרים עוקבים ניתן להציג מספרים שונים?

כדי לענות על שאלה זו באופן מלא צריך לערוך חקירה.

תשובות סתמיות (בלי דוגמאות)

- אחת, שתיים, שלוש.
- את מס׳ 12 - צורה 1.
- את מס׳ 18 - 2 צורות.
- את מס׳ 15 - 3 צורות.
- את מס׳ 30 - 4 צורות.

ייצוג בטבלה של מקרים פרטיים

המספרים	2 מס׳ עוקבים	3 מס׳ עוקבים	4 מס׳ עוקבים	5 מס׳ עוקבים
15	7+8	4+5+6	-	1+2+3+4+5
9	4+5	2+3+4	-	-
18	-	5+6+7	3+4+5+6	-

דוגמה של תקשורת לקויה (הסבר לא ברור):

סכום של שלושה מספרים עוקבים? כל המספרים שהם כפולות של 3. כי ניתן לחלק ל- 3 באופן שווה. לחלק אחד להוסיף 1 ולחלק השני להחסיר 1.

סכום של ארבעה מספרים עוקבים? (מהו המספר הראשון?) מספרים שההפרשים ביניהם 4 שאחד הגורמים הראשוניים שלהם 2.

דוגמה: 14, 18, 22.

סכום של חמישה? כפולות של 5.

תשובה סתמית בלי דוגמה וביסוס:

ייתכן שככל שלמספר יהיו תכונות רבות יותר, כלומר, יענה על תנאים רבים יותר לסעיף הקודם, כך ניתן יהיה ליצור לו צורות שונות ורבות יותר של סכום מספרים עוקבים.

ניסיונות להכליל

מספרים שניתן להציג בצורות שונות:

- כאשר המספר הוא תוצר של אחת המשוואות הבאות אז יש לו הצגה אחת.

  סכום של 2 עוקבים - 2n+1,

  סכום של 3 עוקבים - 3n+3,

  סכום של 4 עוקבים - 4n+6,

  סכום של 5 עוקבים - 5n+10.
- אם המספר הוא תוצר של שתי משוואות אז יש לו שתי הצגות.
- אם המספר הוא תוצר של שלוש משוואות אז יש לו שלוש הצגות.

  דוגמאות: המספר 9 - 2n+1, 3n+3.

  המספר 15 - 2n+1, 3n+3, 10+5n.

שאלה 5 - מה גיליתם?

מטרת השאלה היא לסכם. הרוב נמנעו מכך!

א. דוגמאות של סיכומים: (סיכומים שהופיעו בשאלה 5 בלבד, מעבר למה שפורט בשאלות הקודמות.)

- מספרים ראשוניים מתקבלים מסכום 2 מחוברים (אי-זוגיים).
- אין סכומים כאלה לכפולות של 2 (חזקות 2^n ,n>0). סכומים של שלושה מחוברים מתחלקים ב- 3.
- ככל שנעלה בערך המספר, יעלה גם מספר הייצוגים.
- מספר מסוים גדל מבחינת כמות בהתאם למספר מחובריו. (5 מחוברים בקפיצות של 5.)
- סכום של שני מספרים עוקבים הוא אי-זוגי.
- סכום של שלושה מספרים עוקבים הוא מעורב (זוגי או אי-זוגי).
- סכום של ארבעה מספרים עוקבים הוא מספר זוגי.
- סכום של חמישה מספרים עוקבים הוא מעורב.
- סכום של שישה מספרים עוקבים הוא אי-זוגי.
- כדי לדעת אילו מספרים ניתנים לכתיבה כסכום של 2 מספרים עוקבים, 3 מספרים עוקבים, עד n מספרים עוקבים.

סדרה חשבונית:

$d=2$ $a_1=3$ - 2 מספרים עוקבים.

$d=3$ $a_1=6$ - 3 מספרים עוקבים.

$d=7$ $a_1=28$ - 7 מספרים עוקבים.

$d=n$ $a_1=n/2(n+1)$ - n מספרים עוקבים.

ב. ניסיונות להכליל

- כיצד ניתן לכתוב מס' כסכומים של 4, 6, 8, 10 מספרים עוקבים? ניקח את המספר נחלק אותו במספר המספרים העוקבים, התשובה צריכה להיות חצי מהמספר המחלק ומעלה, ושארית השווה לחצי מהמספר המחלק. להלן דוגמאות.

- נכתוב 36 ב- 8 מס' עוקבים **הכלל**: 36:8=4(4)

1+2+3+4+5+6+7+8=36

- נכתוב 39 ב- 6 מספרים עוקבים. **הכלל**: 39:6=6(3)

4+5+6+7+8+9 =39

- 24 כסכום של 4 מספרים עוקבים 24:4=6, לא ייתכן לפי הכלל, ואומנם:

4+5+6+7=22 להתחיל ב- 4 סכום של ארבעה עוקבים נותן 22 שקטן מ- 24.

5+6+7+8=26 להתחיל ב- 5 סכום של ארבעה עוקבים נותן 26 הגדול מ- 24.

- כיצד נוכל לכתוב מספר כסכומים של 3, 5, 7, 9 מספרים עוקבים?

- ניקח מספר נחלק אותו במספר המספרים העוקבים - התשובה צריכה להיות שלמה בלי שארית, וגדולה מחצי המספר שבו חילקנו.

- 27 כסכום של 3 מספרים עוקבים:

27:3=9

27=8+9+10

- 28 כסכום של 7 מספרים עוקבים:

28:7=4

1+2+3+4+5+6+7=28

- 21 כסכום של 7 מספרים עוקבים:

21:7=3

בלתי אפשרי! 3 קטן מחצי של 7.

ג. שאלות נוספות שעלו:

- מדוע מספרים ראשוניים ניתנים לכתיבה רק כסכום שני מספרים עוקבים?
- מה מאפיין את כל המספרים המתחלקים ב- 2?
- מה היה קורה עם כפל במספרים עוקבים?
- האם החוקיות שמצאת במספרים, עובדת גם במספרים שליליים?
- האם כאשר שרשרת המספרים העוקבים בסכום ארוכה יותר, גם התוצאה תהיה גבוהה יותר לעומת זאת של שרשרת קצרה?
- מה ההפרש בין התוצרים כאשר מחשבים סכום n מספרים עוקבים?

נספחים

דף למשתלמים מס' 1

1. פתרו את הבעיה הבאה באופן אישי.
2. דונו על הפתרונות בקבוצות.

סכומים של מספרים

בעיית הצגת מספר באמצעות סכום של מספרים עוקבים

1. בבעיה זו צריך למצוא סכומים של מספרים עוקבים המייצגים מספר נתון. לדוגמה, צריך למצוא סכומים של מספרים עוקבים שייצגו את המספר 15 :

$15 = 7+8$ $15 = 1+2+3+4+5$ $15 = 4+5+6$

נסו למצוא למספרים שונים סכומים מתאימים (לפחות לעשרה מספרים שונים). התבוננו במספרים שמצאתם וענו על השאלות הבאות :

2. אילו מספרים לא ניתנים לייצוג כסכומים של מספרים עוקבים?

3. אילו סוגי מספרים ניתנים לכתיבה כסכום של שניים, שלושה, ארבעה או יותר מספרים עוקבים?

4. בכמה צורות שונות ניתן להציג מספרים כסכום של מספרים עוקבים? לדוגמה, למספר 9 שני ייצוגים שונים :
$9=2+3+4$ $9=4+5$

5. חברו שאלות נוספות.

מה גיליתם?

נסו להסביר ולנמק.

דף למשתלמים מס' 2

מחברים רק עוקבים!

1. קראו את המאמר: **מחברים רק עוקבים!**. מאת רוזנטל, א', בן-ארי, מ' (1995). **מספר חזק**, 12, עמ' 20-24.

2. דונו בקבוצות בנקודות הבאות:

- מדוע נקראת הבעיה "סכומים של מספרים" בעיה "טובה"?
- ציינו את הדומה והשונה בין השאלה המוצגת במאמר מחברים רק עוקבים! לבין השאלה המוצגת בדף למשתלמים מס' 1- "סכומים של מספרים".

דף למשתלמים מס׳ 3

מחפשים בעיה

לאורך הקורס עסקנו בבעיות פתוחות מסוגים שונים. בשיעורים האחרונים עסקנו במאפיינים של בעיה ״טובה״.

בשיעור זה נסכם את נושא הבעיות הפתוחות והבעיות הנחשבות ״טובות״, ונתנסה בחיפוש בעיות ממקורות שונים.

עבודה בזוגות

חפשו בעיה ״טובה״ במקומות שונים:

בעיתונים מתמטיים, כגון: מספר חזק, אלף אפס, Arithmetic Teacher.

בספרי חידות, כגון: ספר החידות הגדול (דייוויד וולס), רגע חושבים (גזית אביקם), מתמטיקה בהנאה (שמואל אביטל).

באתרים שונים באינטרנט, לדוגמה: http://mathcenter-k6.haifa.ac.il

פתרו את הבעיה, נמקו מדוע היא בעיה טובה, הראו את הדרכים השונות לפתרון (אם יש), הפעילו את הבעיה בכיתה, ודווחו בהתאם להוראות הבאות:

- תיאור הכיתה, רקע כללי,
- תיאור הבעיה,
- מקור הבעיה,
- איך הועברה הבעיה (לכל הכיתה, ליחידים בקבוצות וכו׳..),
- תיאור תהליך הפתרון,
- תיאור קשיים שהתעוררו,
- תופעות מעניינות שהתרחשו בכיתה,
- ניתוח תשובות התלמידים,
- רפלקציה על התהליך,
- הערות.

שקף מס' 1

נימוקים להיות הבעיה "סכומים של מספרים" בעיה טובה

דירוג ברמת קושי עולה: הדירוג בבעיה מאפשר לכל אחד לגשת ולהתחיל לפתור ולהתקדם בהתאם ליכולת שלו.

גיוון בדרגות המורכבות של המשימה: כל פותר יכול לפתור ברמת פתרון שונה.

בעיה אותנטית: זוהי בעיה אותנטית, מאחר שניתן להגיע למסקנות משמעותיות בנושאים שונים.

למשל: במסגרת הפתרונות מגיעים לממוצע חשבוני, להצגה יחידה של מספרים ראשוניים , לסדרות ועוד.

מעקב אחר תהליך פתרון: כל שלב או כל שאלה דורשת הסבר ונימוק - מה שמאפשר מעקב אחרי תהליך הפתרון.

חשיבה הפוכה: לדוגמה, לאחר שמוצאים מספר ייצוגים למספרים שונים מנסים לראות לאילו מספרים יש יותר מייצוג אחד, ומאפיינים את הייצוגים השונים.

אפשרויות שונות לפתרון: לכל אחד מהסעיפים יש פתרונות שונים ודרכים שונות להגיע לפתרון ברמות שונות.

חשיבה יצירתית: חיבור שאלות נוספות. הכללות בכיוונים שונים.

גילוי חוקיות: ישנו תהליך מהפרט אל הכלל, ותוך כדי עשיית ההכללות מגיעים גם לחוקיות.

העמקה והרחבת הבעיה: מבעיה זו אפשר ללכת לכיוונים שונים, כמו פורמאליות בסדרות חשבוניות. דוגמאות נוספות: ממוצע חשבוני וחזקות.

הצגות שונות של פתרון: ייצוגים שונים של פתרונות, לדוגמה, הצגה בטבלה.

הפעלת חשיבה לא אלגוריתמית: כל אחד מהסעיפים, מצריך ניסוי וטעייה כדי להגיע למסקנות.

מקורות

בירנבוים, מ' (1994). הערכה חלופית, מנוף לשיפור ההוראה והלמידה. **הד החינוך**, ס"ח (10), 12-14.

בירנבוים, מ' (1997). **חלופות בהערכת הישגים**. הוצאת רמות, אוניברסיטת תל-אביב.

קרסנטי, ר' (1993). **התמודדות התלמיד עם שאלות לא שגרתיות במבחן במתמטיקה**. חיבור לשם קבלת תואר מוסמך. האוניברסיטה העברית, ירושלים.

Clarke, D. J., & Sullivan, P. (1992). Responses to Open-Ended Tasks in Mathematics: Characteristics and Implications. *Proceedings PME-XVI*, Vol. 1. (pp. 137-144). Durham, NH.

Schoenfeld, A. H. (1982). Some Thoughts on Problem-Solving Research and Mathematics Education. In F.K. Lester & J. Garofalo (Eds.), *Mathematical Problem Solving: Issues in Research*. Philadelphia: The Franklin institute Press.