מספרים שליליים ותכונותיהם

ד״ר איליה סיניצקי, מכללת גורדון

תחום תוכן מתמטי (בהתאמה לסילבוס): **מספרים שליליים** - הרחבת תחום המספרים, היכרות אינטואיטיבית, הגדרת הפעולות תוך שמירה על עקביות.

אומדנים והכללות אלגבריות.

רשימת מושגים מתמטיים: מספר נגדי, ציר המספרים, ערך מוחלט של מספר, חוקי פעולות החשבון , החלק השלם של מספר.

זמן משוער ללימוד הנושא: 3-4 שעות לימוד.

קישור לנושאים נוספים: סגירות קבוצת המספרים לגבי פעולה, פעולה אונרית ופעולה בינארית, משתנה בדיד ומשתנה רציף, סימטרייה.

חומרים ועזרים דרושים: 4 דפי פעילות למשתלמים (לדפים 1, 2 ו- 4 מצורפים דפי פתרונות). הדפים והשקפים נמצאים בנספחים של היחידה.

הרציונל: היחידה פותחה כחלק מהנושא ״**המספרים השלמים**״ (מודולה מתקדמת) ומהווה המשך של הפרק ״תכונות המספרים (הטבעיים)״. בנוסף להיבט האינטואיטיבי המוכר לרוב המורים, מוצגת כאן גישה פנים-מתמטית המצדיקה את הצורך בהרחבת עולם המספרים הטבעיים ואת כללי פעולות החשבון בקבוצת המספרים השלמים.
היחידה מכילה גם את הנושא של השוואת מספרים שלמים (כולל יחס הסדר) ומשימות הקשורות במושגים ״ערך מוחלט״ ו״החלק השלם של מספר״ ובאומדן תוצאות של פעולות בקבוצת המספרים השלמים.

דפי הנחיות למנחה

מהלך המפגש

1. מספרים שליליים מהם?

א. הבנה אינטואיטיבית של מספרים שליליים

בפתיחת הנושא כדאי להזכיר את הדוגמאות הטיפוסיות המשמשות להמחשת המספרים השליליים בבית הספר היסודי: טמפרטורה, גובה מעל פני הים, ייתרה (שלילית) בחשבון הבנק וכדומה. יש להדגיש כי בדוגמה האחרונה מדובר בפירוש על שימוש באופן אינטואיטיבי במספר שלילי כמספר נגדי למספר טבעי מסוים. אנו מזכירים, כי מבחינה היסטורית, מושג המספר השלילי הוא יחסית חדש בהשוואה, למשל, למספרים הרציונאליים (המספרים השליליים מוזכרים לראשונה במתמטיקה בהודו במאה ה – VI).

ב. חיסור כפעולה הפוכה לחיבור והצורך הפנימי במספרים שליליים

מתמטית, המספרים השליליים מופיעים כהשלמת מערכת המספרים הטבעיים על מנת להבטיח ביצוע של פעולה ההפוכה לפעולת החיבור.

בפעולת החיבור אנו מחפשים מספר שהוא סכום של שני מחוברים נתונים. למשל, 8 הוא סכום של 5 ו- 3 וכדומה. בבעיה ההפוכה עלינו למצוא את המחוברים המספקים את הסכום הדרוש. כך, כבר לסכומים קטנים יחסית, מספר הפתרונות של הבעיה ההפוכה הוא גדול (אם הזמן מאפשר זאת, ניתן לבקש מהמשתלמים לערוך פעילות חקר לחיפוש מספר הדרכים האפשריות להצגת מספר טבעי כסכום של שני מחוברים טבעיים – ולציין כי התשובה תלויה בהבנתנו, האם ההצגות 3+5 ו- 5+3 הן זהות או שונות).

בעיה הפוכה בעלת פתרון חד-משמעי מוגדרת באופן הבא: למצוא אחד מהמחוברים כאשר נתון סכום והמחובר הנוסף. מספר זה נקרא ההפרש בין הסכום הנתון והמחובר הידוע. למשל, 3 הוא ההפרש של 8 ו- 5. כאן כדאי לחזור לשיום האיברים בתרגיל החיסור ולהדגיש, בין היתר, את האסימטריה הקיימת מראש בפעולת החיסור.

בגישה זאת, המספר 0 הוא תוצאת חיסור של שני מספרים זהים, אך אנחנו זקוקים לאובייקטים מתמטיים חדשים כדי **לסמן** את ההפרש כאשר המחובר הידוע גדול מהסכום (למשל, 3-5=?). מספרים שליליים מופיעים כאן כמספרים **הנגדיים** למספרים הטבעיים, לפי ההגדרה: שני מספרים נקראים נגדיים אחד לשני, אם סכומם שווה ל- 0. לפי הסימון המקובל, כדי לרשום מספר נגדי למספר כלשהו, יש לצרף לפניו את הסימן "-" (מינוס). כך, למשל, 2- מסמן את המספר הנגדי למספר 2, ומכך נובע, כי 2+(-2)=0. תהליך זה של הגדרת המספרים השליליים מסוכם על שקף מס' 1 (מופיע בנספחים).

ג. מספרים נגדיים ופעולת חיסור

בשורה האחרונה של שקף מס׳ 1 הודגש הקשר בין הסימון החדש ופעולת החיסור. מצד אחד, מעבר ממספר למספר נגדי זאת לא אחת מפעולות החשבון - אך זאת פעולה מתמטית, והיא פעולה אונרית בניגוד לארבע פעולות החשבון, שכולן פעולות בינאריות. מצד שני, הסימן למספר נגדי משקף את הקשר בין המספרים השליליים ופעולת החיסור - כל מספר שלילי הוגדר כהפרש בין המספר 0 והמספר הטבעי המתאים. תפיסת המושג ״מספר הנגדי״ מהווה שלב חשוב בהכנת הלומד לעבודה עם תבניות אלגבריות. **בדף למשתלמים מס׳ 1** (מופיע בנספחים בהמשך). נעשה טיפול במושג המספר הנגדי עם הדגשה מיוחדת על השוואה בין המספרים הנגדיים. כאן נקודת התורפה של המשתלמים היא בהצבה אינטואיטיבית של ערכים חיוביים במקום אותיות. זה גורר, למשל, מסקנות מיידיות מהסוג ״a תמיד גדול יותר מ-(a-)״. (לדף למשתלמים מס׳ 1 מצורף דף פתרונות.)

2. מספרים שלמים על ציר המספרים, הערך המוחלט של מספר

א. הרחבת ציר המספרים: אפס ומספרים שליליים

אחרי הוספת מספרים נגדיים למספרים טבעיים במערכת המספרים, ציר המספרים הופך מקרן עם התחלה בנקודה המתאימה למספר 0, לקו ישר. יש להדגיש ארבעה דברים חשובים בדיון על הנושא:

- קשר עמוק עם נושא **הסימטרייה** בהרחבת ציר המספרים ״לכיוון השלילי״: כל מספר שלילי הנגדי למספר טבעי מסוים ממוקם על הציר על-ידי סימטרייה שקופית (עם ציר הסימטרייה עובר דרך נקודת האפס ומאונך לציר המספרים) או מרכזית (כאשר נקודת האפס מתפקדת כמרכז הסימטרייה).

- כמו כל פעולת סימטרייה, הוספת מספרים שליליים שלמים שומרת מרחקים בין המספרים. מסיבה זאת, ניתן לדבר על המושג ״**מספר עוקב**״ ו״**מספר קודם**״ בקבוצת המספרים השלמים, בדומה לקבוצת המספרים הטבעיים. בקבוצת המספרים השלמים לכל מספר קיים לא רק מספר עוקב, אלא גם מספר קודם.

- **בדידות** של המספרים השלמים: למרות השימוש בציר המספרים ככלי המחשה, בשלב זה בין הנקודות המתאימות למספרים השלמים, אין מספרים נוספים. המספרים השלמים מרוחקים אחד מהשני, והמרחק בין המספרים הקרובים ביותר הוא מרחק קבוע (ושווה ליחידה אחת). חשוב לדון בזה בהשוואת המצב עם קבוצת המספרים הרציונלים.

- טיפול **בטעות** נפוצה **בסימון**: החץ המופיע על ציר המספרים מסמן את כיוון העלייה של המספרים ולא שום דבר אחר (בין התשובות האפשריות מופיעה ״אינסופיות של קבוצת המספרים״). מסיבה זאת אין שום חץ בכיוון ההפוך על ציר המספרים (ראו גם בסעיף 3).

ב. הערך המוחלט של מספר

ככלל, אין למשתלמים בעיה למצוא ערך מוחלט של מספר נתון. ברוב המקרים הם גם מתארים את הערך המוחלט נכון בגישה גיאומטרית כ״מרחק מהמספר מ- 0 על ציר המספרים״. יחד עם זאת, ההגדרה הפורמלית של הפונקציה ״ערך מוחלט״ כפונקציה המוגדרת על-ידי ביטויים אלגברים שונים בתחומים שונים (״פונקציה עם תחום הגדרה מפוצל״) לא קלה. לצורך טיפוח השיח המתמטי על בסיס שפה מתמטית נכונה, עלינו לדאוג לשימוש הנכון במושג ברמה בלתי-פורמלית. סדרת השאלות להבהרת המושג מוצגת **בדף למשתלמים מס׳ 2** (מופיע בנספחים). בהמשך, הדף מיישם את הנושא בחיבור מספר חיובי עם מספר שלילי.

3. על פעולות חשבון עם מספרים מכוונים, ואומדן

א. הרחבת פעולות החשבון לתחום המספרים השליליים

בדיון על חוקי פעולות החשבון עם מספרים מכוונים, כדאי לציין שילוב כללים אינטואיטיביים עם עקביות בתכונות הפעולות. הגדרת סכום המספרים השליליים כמספר נגדי לסכום המספרים הנגדיים של המחוברים (הסכום של (-3) ו- (-5) הוא מספר נגדי לסכום של 3 ו- 5) מאפשרת לשמור על חוק החילוף, חוק הקיבוץ ועל הניטרליות של 0 בפעולת החיבור.

יחד עם זאת, צריך להדגיש, כי כל כלי ההמחשה הידועים למשתלמים מאפשרים רק להסביר כדאיות של כלל הסימנים בכפל, אך לא מוכיחים אותו. **אנחנו** רוצים לשמור על תכונת ה- 0 כגורם מאפס, תכונת ה- 1 כגורם ניטרלי בכפל ועל קיום חוק הפילוג. מסיבה זאת, את המכפלה $a = (-1)\cdot(-1)$ ניתן לחשב מהשוויון $0 = (-1)\cdot 0 = (-1)\cdot(1-1) = -1 + a$ ממנו נובע כי $a = 1$.

כללי עבודה עם המספרים המכוונים מסוכמים **בדף למשתלמים מס' 3**, (מופיע בנספחים) אך לפני הצגתו כדאי לבקש מהמשתלמים לנסח אותם.

את הנושא סימן המכפלה של יותר משני מספרים, כדאי לתרגל עם המשתלמים, כדי להגיע למסקנות המנוסחות בדף. כאן יש לציין את האנלוגיה עם זוגיות ואי-זוגיות של סכום המספרים הטבעיים הזוגיים והאי-זוגיים. יישום נוסף של הכלל הקובע את סימן המכפלה הוא בקביעת **הסימן של חזקות עם בסיס שלילי** (המסקנה לגבי חזקות בעלות מעריך טבעי: כל מספר שלם (פרט ל- 0) במעלה זוגית נותן תוצאה חיובית, תוצאת העלאה של מספר שלילי בחזקה זוגית היא חיובית ובחזקה אי-זוגית היא שלילית).

ב. הערכת התוצאה של פעולות החשבון בתחום המספרים המכוונים

הטיפול בנושא נעשה **בדף למשתלמים מס' 4** (מופיע בנספחים) העוסק בהערכה של תוצאות פעולות חשבון ללא חישוב. יש להדגיש את השוני בהשוואה לאומדן בתחום המספרים החיוביים ("החיבור תמיד מגדיל" וכדומה). הדף יכול לשמש לסיכום הפרק, ובדיון על התרגילים המשתלמים מתבקשים להשתמש במושגים הנרכשים בפרק (מספרים נגדיים, ערך מוחלט וכו').

4. העשרה: החלק השלם של מספר ובעיות קריאה של המספרים המעורבים השליליים.

ככלל, בתכנית הלימודים לא שמים דגש רב על שילוב הנושאים "מספרים רציונליים" ו"מספרים שליליים". אך, כדאי לנצל את מסגרת לימוד הנושא "מספרים שליליים" להבנה יותר עמוקה של מספרים רציונליים שליליים, ולשיפור דרכי ההוראה של הנושא "פעולות עם מספרים מעורבים". לצורך זה, אנחנו מציעים פעילות הקשורה במושג "החלק השלם של מספר".

א. לכל מספר, נגדיר **חלק שלם שלו** – המספר השלם הגדול ביותר, שלא גדול מהמספר הנתון. בהתחלה, נסתפק בטיפול במספרים חיוביים (או לא שליליים) בלבד.

דוגמאות: החלק השלם של 5.1 שווה ל- 5; החלק השלם של 4.9 שווה ל- 4; החלק השלם של $3\frac{2}{5}$ שווה ל- 3; החלק השלם של 3 שווה ל- 3; ככלל, חלק שלם של מספר טבעי שווה למספר עצמו.

יש לציין כי הגדרנו פעולה (אונרית), **השונה** מעיגול המספר עד למספר שלם, ותוצאת הפעולה לא גדולה מהמספר הנתון (ושווה לו כאשר הוא שלם).

סימון: את החלק השלם של המספר a מסמנים $[a]$.

ב. שאלות לבדיקת הבנת המושג:

- האם קיימים מספרים שונים בעלי אותו חלק שלם?
- האם יש מספרים שהחלק השלם שלהם שווה ל- 0? (כל השברים האמיתיים)
- מהם המספרים שמקיימים את השוויון $[a] = a$? (כל המספרים השלמים)

ג. מה קורה עם החלק השלם בתחום המספרים השליליים?

קל להבין, כי $[-3] = -3$, $[-10] = -10$ ובכלל, השוויון $[a] = a$ נכון לכל מספר שלם – חיובי, שלילי או אפס.

אך מהו החלק השלם של המספר $-3\frac{2}{5}$? התשובה המיידית היא 3-, וזאת תשובה לא נכונה. כדי להסביר זאת, יש להפנות את המשתלמים לציר המספרים, ולמקם שם את המספר הנתון. לפי הגדרתנו, חלק שלם של המספר **אינו גדול** ממנו, ולכן $[-3\frac{2}{5}] = -4$, כי המספר 4- הוא המספר השלם הגדול ביותר, שלא גדול מהמספר הנתון $-3\frac{2}{5}$.

ד. אחרי דוגמאות נוספות, רצוי לדון במקור הקושי בהבנת המושג "החלק השלם" בתחום המספרים השליליים הלא שלמים.

בתחום המספרים החיוביים, קריאת המספר המעורב $3\frac{2}{5}$ משקפת בדיוק את המשמעות שלו: הוא **סכום** של החלק השלם (3) ושבר אמיתי $\frac{2}{5}$; במילים אחרות, $3\frac{2}{5} = 3 + \frac{2}{5}$.

אך קריאת המספרים השליליים "מטעה": קריאת המספר $-3\frac{2}{5}$ כסכום של מספר שלם (-3) ושבר $\frac{2}{5}$ הינה שגויה, המספר מתקבל כ**חיסור** של $\frac{2}{5}$ מהמספר השלם (-3):

$$-3\frac{2}{5} \neq -3 + \frac{2}{5}\ ;\ -3\frac{2}{5} = -(3 + \frac{2}{5}) = -3 - \frac{2}{5}.$$

חשוב להסב את תשומת לב התלמיד לאי התאמה זו בפעולות חשבון בתחום המספרים מעורבים.

נספחים

דף למשתלמים

תוכן המפגש

א. מספרים שליליים מהם? צרכים מעשיים ומתמטיים בהרחבת קבוצת המספרים הטבעיים.

ב. מספרים נגדיים ותכונותיכם, כתיבה אלגברית של המספר הנגדי.

ג. מספרים שליליים על ציר המספרים, ערך מוחלט של המספר.

ד. פעולות חשבון ואומדן בתחום המספרים המכוונים.

ה. על החלק השלם של מספר.

רשימת מושגים מתמטיים

מספר נגדי

ציר המספרים

ערך מוחלט של מספר

חוקי פעולות החשבון

החלק השלם של מספר

קישור לנושאים נוספים

סגירות קבוצת המספרים לגבי פעולה
פעולה אונרית ופעולה בינרית
משתנה בדיד ומשתנה רציף
סימטרייה

שקף מס' 1

מספרים שליליים – הגדרות

בעיה ישרה: מהו הסכום של שני המספרים הטבעיים 5 ו- 3?

$$5 + 3 =$$

בעיה הפוכה א: אילו שני מספרים טבעיים שסכומם שווה ל- 8?

$$? + ? = 8$$

בעיה הפוכה ב: מהו המספר הטבעי שבחיבורו עם 5 מתקבל הסכום 8?

$$5 + ? = 8$$

הגדרה: המספר 3 הוא ההפרש של 8 ו- 5, $8-5 = 3$.

למה? כי: $5+3 = 8$.

מהו המספר 0? 0 הוא ההפרש של שני מספרים זהים,

$$0 = 3 - 3 = 5 - 5 = ...$$

המספר הנגדי למספר 3 הוא המספר שאם נחברו ל- 3 התוצאה תהיה אפס.

$$3 + (-3) = 0$$

הכללה:

$$a + (-a) = 0$$

$$-a = 0 - a$$

דף למשתלמים מס' 1

מספרים נגדיים

א. מהו המספר הנגדי למספר 3?

מהו המספר הנגדי למספר 5?

מהו המספר הנגדי למספר (3-)?

מהו המספר הנגדי למספר (5-)?

הכללה: אם a הוא המספר הנגדי ל-b, אז b הוא ________________________.

התכונה האופיינית של מספרים נגדיים: סכום של מספרים נגדיים __________________.

ב. האם לכל מספר שלם קיים מספר נגדי?

אם a הוא מספר חיובי, המספר הנגדי לו הוא __________________.

אם a הוא מספר שלילי, המספר הנגדי לו הוא __________________.

ג. אם a הוא המספר הנתון, מהי התבנית למספר הנגדי לו?

יישום: למספר 5 אפשר לקבל מספר נגדי על-ידי צירוף הסימן " – " למספר הנתון : 5- ;

למספר 3- אפשר לקבל מספר נגדי על-ידי צירוף הסימן " – " למספר הנתון : (3 -)-=3 ;

הוסיפו 3-2 דוגמאות משלכם:

ד. האם קיימים מספרים **ששווים** למספר הנגדי להם? מיהם?

ה. מהם המספרים **הגדולים** מהמספר הנגדי להם?

מהם המספרים **הקטנים** מהמספר הנגדי להם?

ו. נסמן ב- a מספר שלם כלשהו. כיצד נרשום את המספר הנגדי למספר a?

מהם הערכים של a עבורם מתקיים השוויון $a = a -$?

מהם הערכים של a עבורם מתקיים האי-שוויון $a < a -$? מהי המשמעות של התשובה?

מהם הערכים של a עבורם מתקיים האי-שוויון $a > a -$? מהי המשמעות של התשובה?

דף למשתלמים מס' 1 – פתרונות

מספרים נגדיים

א. מהו המספר הנגדי למספר 3? המספר 3- , או בכתיבה אחרת (3-).

מהו המספר הנגדי למספר 5? המספר 5- , או בכתיבה אחרת (5-).

מהו המספר הנגדי למספר (3-)? המספר 3.

מהו המספר הנגדי למספר (5-)? המספר 5.

הכללה: אם a הוא המספר הנגדי ל- b, אז b הוא **המספר הנגדי ל- a.**

התכונה האופיינית של מספרים נגדיים: סכום של מספרים נגדיים **שווה ל- 0.**

ב. האם לכל מספר שלם קיים מספר נגדי?

כן, זה המספר שסכומו עם המספר הנתון שווה ל- 0.

(תזכורת: לפעמים, יש בלבול בין המושג "מספר נגדי" והמושג "מספר הופכי". כדאי להדגיש כי מספר נגדי קיים לכל מספר – "אפילו ל-0!")

אם a הוא מספר חיובי, המספר הנגדי לו הוא **מספר שלילי**.

אם a הוא מספר שלילי, המספר הנגדי לו הוא **מספר חיובי.**

ג. אם a הוא המספר הנתון, מהי התבנית למספר הנגדי לו?

תבנית המספר הנגדי למספר נתון a היא a-.

ד. האם קיימים מספרים **ששווים** למספר הנגדי להם? מיהם?

כן, 0 הוא המספר היחיד ששווה לנגדי לו (מספר נגדי לעצמו). הוכחה: לפי ההגדרה, סכום המספר והנגדי לו חייב להיות 0, ולפי הדרישה המספר שווה לנגדי לו, כלומר, $a + a = 0$, לזה גורר $a = 0$.

ה. מיהם המספרים **הגדולים** מהמספר הנגדי להם?

כל המספרים החיובים, ורק הם, גדולים מהנגדיים להם (שהם מספרים שליליים).

מיהם המספרים **הקטנים** מהמספר הנגדי להם?

כל המספרים השליליים, ורק הם, קטנים מהנגדיים להם (שהם מספרים חיוביים).

ו. נסמן ב- a מספר שלם כלשהו. כיצד נרשום את המספר הנגדי למספר a?

המספר הנגדי למספר נתון a הוא המספר a- .

(למרות החזרה הברורה על שאלה ג, כדאי שוב להדגיש זאת לפני הטיפול בשאלה הבאה.)

מהם הערכים של a עבורם מתקיים השוויון $-a = a$?

זה נכון רק למספר 0 (או בצורה "אלגברית יותר", רק כאשר $a = 0$).

מהם הערכים של a עבורם מתקיים האי-שוויון $-a < a$? מהי המשמעות של התשובה?

זה נכון לכל מספר חיובי (או בצורה "אלגברית יותר", רק כאשר $a > 0$).

המשמעות: מספרים חיוביים (ורק הם) גדולים יותר מהנגדיים להם.

מהם הערכים של a עבורם מתקיים האי-שוויון $-a > a$? מהי המשמעות של התשובה?

זה נכון לכל מספר שלילי (או בצורה "אלגברית יותר", רק כאשר $a < 0$).

המשמעות: מספרים שליליים (ורק הם) קטנים יותר מהנגדיים להם.

דף למשתלמים מס' 2

ערך מוחלט של מספר

א. **ענו על השאלות הבאות, השתמשו בסימן המתמטי המוסכם | |.**

מהו הערך המוחלט של המספר 3? $|3| = 3$

מהו הערך המוחלט של המספר 7?

מהו הערך המוחלט של המספר 12?

הכללה: הערך המוחלט של כל מספר חיובי שווה ________________________.

ב. **ענו על השאלות הבאות, השתמשו בסימן המתמטי המוסכם | |.**

מהו הערך המוחלט של המספר 3-?

מהו הערך המוחלט של המספר 7-?

מהו הערך המוחלט של המספר 12-?

הכללה: הערך המוחלט של כל מספר שלילי שווה ________________________.

ג. מיהם המספרים שהערך המוחלט שלהם שווה ל- 5?

מיהם המספרים שהערך המוחלט שלהם שווה ל- 8?

מיהם המספרים שהערך המוחלט שלהם שווה ל- 0?

מיהם המספרים שהערך המוחלט שלהם שווה ל- (5-)?

מסקנות:

– לכל מספר חיובי, קיימים שני מספרים שהערך המוחלט שלהם שווה למספר הנתון: ________________________.

– יש רק מספר אחד בעל ערך מוחלט 0 והוא המספר ____.

– אין מספרים בעלי ערך מוחלט שלילי.

ד. בין שני מספרים חיוביים, המספר הגדול יותר הוא בעל ערך מוחלט גדול יותר.

מהו המצב בקבוצת המספרים השליליים?

ה. סכום של שני מספרים חיוביים הוא תמיד מספר חיובי.

סכום של שני מספרים שליליים הוא ______________.

נסחו באמצעות מושג הערך המוחלט את הכלל המאפשר להחליט על הסימן של הסכום של שני מחוברים, כאשר אחד מהם חיובי ואחד שלילי.

דף למשתלמים מס' 2 – פתרונות

ערך מוחלט של המספר

א. מהו הערך המוחלט של המספר 7? $|7| = 7$

מהו הערך המוחלט של המספר 12? $|12| = 12$

הכללה: הערך המוחלט של כל מספר חיובי שווה למספר עצמו [לא להסתפק בתשובה "למספר חיובי"]. בשפה אלגברית, לכל a>0, $|a| = a$

ב. מהו הערך המוחלט של המספר 3-? $|-3| = 3$

מהו הערך המוחלט של המספר 7-? $|-7| = 7$

מהו הערך המוחלט של המספר 12-? $|-12| = 12$

הכללה: הערך המוחלט של כל מספר שלילי שווה **למספר הנגדי לו (ואז הוא מספר חיובי)**. בשפה אלגברית, לכל a<0, $|a| = -a$ (הזהרה: מקום קשה מאד! להדגיש, כי דווקא a- הוא חיובי!)

ג. מהם המספרים שהערך המוחלט שלהם שווה ל- 5? המספר 5 והמספר 5-.

מהם המספרים שהערך המוחלט שלהם שווה ל- 8? המספר 8 והמספר 8-.

מהם המספרים שהערך המוחלט שלהם שווה ל- 0? המספר 0.

מהם המספרים שהערך המוחלט שלהם שווה ל- (5-)? לא קיימים מספרים כאלה: המרחק לא יכול להיות שלילי.

מסקנות:

- לכל מספר חיובי, קיימים שני מספרים שהערך המוחלט שלהם שווה למספר הנתון: **המספר עצמו והמספר הנגדי לו.**
- יש רק מספר אחד בעל ערך מוחלט 0 והוא המספר **אפס.**
- אין מספרים בעלי ערך מוחלט שלילי.

ד. בין שני מספרים שליליים, המספר הגדול יותר הוא בעל ערך מוחלט **קטן** יותר: הוא קרוב יותר ל- 0, ונמצא ימינה יותר על ציר המספרים.

ה. סכום של שני מספרים חיובים הוא תמיד מספר חיובי.

סכום של שני מספרים שליליים הוא מספר שלילי, **שהערך המוחלט שלו שווה לסכום של הערכים המוחלטים של המחוברים.**

כאשר מחברים מספר חיובי עם מספר שלילי, הסכום הוא:

- חיובי, כאשר המחובר החיובי יותר גדול מהערך המוחלט של המחובר השלילי;
- שלילי, כאשר הערך המוחלט של המחובר השלילי גדול יותר מהמחובר החיובי;
- שווה ל- 0, כאשר המחוברים הם מספרים נגדיים (הערכים המוחלטים שלהם שווים).

בקיצור: סכום של שני מחוברים בעלי סימנים שונים מקבל את הסימן של המספר **בעל הערך המוחלט הגדול יותר**. בשפה "גיאומטרית": הסכום מקבל את סימן המחובר הרחוק יותר מהמספר 0 על ציר המספרים.

דף למשתלמים מס' 3

תזכורת: כללי עבודה עם מספרים מכוונים

א. חיבור

סכום של שני מספרים **שליליים** הוא מספר שלילי שערכו המוחלט שווה לסכום הערכים המוחלטים של המחוברים.

לחיבור שני מספרים **בעלי סימנים נגדיים**, צריך למצוא את ההפרש בין הערכים המוחלטים שלהם. הסימן של הסכום זהה לסימן המחובר בעל הערך המוחלט הגדול יותר.

דוגמאות:

$$(-3) + (-5) = -8$$

$$(-7) + 5 = -(7-5) = -2$$

$$5 + (-3) = +(5-3) = 2$$

ב. חיסור

פעולת חיסור מספר זהה לחיבור המספר הנגדי לו.

דוגמאות:

$$(-3) - (-5) = (-3) + 5 = (5-3) = 2$$

$$7 - (-5) = 7 + 5 = 12$$

$$(-5) - 3 = (-5) + (-3) = -(5+3) = -8$$

ג. כפל וחילוק

- הערך המוחלט של מכפלה (מנה) של מספרים שווה למכפלת הערכים המוחלטים שלהם.
- המכפלה היא חיובית כאשר שני גורמים הם בעלי אותו סימן, ושלילית כאשר הם בעלי סימנים נגדיים.
- כאשר אחד מהגורמים שווה ל- 0, מכפלתם שווה ל- 0.

דוגמאות:

$$(-3) \cdot (-5) = 15$$

$$3 \cdot (-5) = -15$$

הכללה: סימן המכפלה תלוי במספר הגורמים השליליים:

- מכפלה היא שלילית כאשר מספר הגורמים השליליים הוא אי-זוגי.
- מכפלה היא חיובית כאשר מספר הגורמים השליליים הוא זוגי.

דף למשתלמים מס' 4

אומדן בתחום המספרים המכוונים

1. לכל אחד מהתרגילים הבאים, קיבעו, האם תוצאת החישוב תהיה חיובית, שלילית או שווה ל- 0.

א. $1438 + (-2543) - 2823$

ב. $-1957 - (-2004) + 196$

ג. $(-15) \cdot 97 \cdot 432 \cdot (-3 - 3)$

ד. $97 \cdot 18 \cdot (-3 + 3) \cdot (-7)$

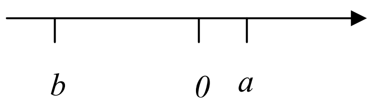
ה. $(100 - 1) \cdot (100 - 2) \cdot (100 - 3) \cdot \ldots \cdot (100 - 199) \cdot (100 - 200)$

2. בלי לחשב את התוצאות, כתבו סימן השוואה מתאים (<, >, =) בין זוגות הביטויים המספריים.

$15 \cdot (-8.2)$	$15 \cdot 3.2$
$0 \cdot (-13) \cdot 42$	$103 \cdot 0$
$103 \cdot (-6.4) \cdot (-14)$	$102 \cdot 14 \cdot 6.4$
$560 : (-1.4)$	$56 : (-1.4)$

3. בתרגילים א-ג המספרים a ו- b מסומנים על ציר המספרים. קבעו, אילו מהטענות הבאות הן נכונות תמיד, אילו תמיד לא נכונות, ואילו יכולות להיות נכונות.

א.



(1) $a > b$

(2) $a > 0$

(3) $b < 0$

(4) $|b| > 0$

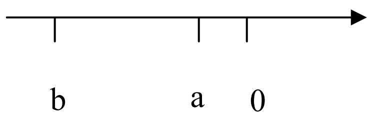
(5) $a + b > 0$

(6) $b - a < 0$

(7) $a - b > 0$

(8) $ab > 0$

ב.



(1) $a > b$

(2) $a > 0$

(3) $b < 0$

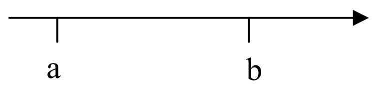
(4) $a + b < 0$

(5) $a - b > 0$

(6) $ab < 0$

דף למשתלמים מס' 4 - המשך

ג.



(1) $a > b$

(2) $b > 0$

(3) אם $a > 0$, אז $b > 0$

(4) אם $b > 0$, אז $a < 0$

(5) $a + b < 0$

(6) $b - a > 0$

(7) $ab < 0$

בתרגילים 4-8 בחרו את התשובה הנכונה

4. אם a הוא מספר חיובי ו- b הוא מספר שלילי, המכפלה ab היא:

א. תמיד שלילית.

ב. תמיד חיובית.

ג. שווה ל- 0.

ד. יכולה להיות חיובית, שלילית או שווה ל- 0.

5. אם a הוא מספר שלילי ו- b הוא מספר שלילי, המכפלה ab היא:

א. תמיד שלילית.

ב. תמיד חיובית.

ג. שווה ל- 0.

ד. יכולה להיות חיובית, שלילית או שווה ל- 0.

6. אם a הוא מספר חיובי ו- b הוא מספר שלילי, הסכום $a + b$ הוא:

א. תמיד שלילי.

ב. תמיד חיובי.

ג. תמיד שווה ל- 0.

ד. יכול להיות חיובי, שלילי או שווה ל- 0.

7. אם a הוא מספר חיובי ו- b הוא מספר שלילי, ההפרש $a - b$ הוא:

א. תמיד שלילי.

ב. תמיד חיובי.

ג. שווה ל-0.

ד. יכול להיות חיובי, שלילי או שווה ל-0.

8. אם a הוא מספר חיובי ו- b הוא מספר שלילי, ההפרש $a - b$ הוא:

א. תמיד גדול יותר מהסכום $a + b$.

ב. תמיד קטן יותר מהסכום $a + b$.

ג. יכול להיות קטן יותר מהמכפלה ab.

דף למשתלמים מס' 4 – פתרונות

אומדן בתחום המספרים המכוונים

1. א. $1438 + (-2543) - 2823 = 1438 - 2543 - 2823 < 0$

ב. $-1957 - (-2004) + 196 = -1957 + 2004 + 196 > 0$

ג. $(-15) \cdot 97 \cdot 432 \cdot (-3-3) > 0$

ד. $97 \cdot 18 \cdot (-3+3) \cdot (-7) = 0$

ה. $(100-1) \cdot (100-2) \cdot ... \cdot (100-200) = 0$, כי בין הגורמים יש גם (100-100).

2. $15 \cdot 3.2 > 15 \cdot (-8.2)$ (חיובי > שלילי)

$103 \cdot 0 = 0 \cdot (-13) \cdot 42 = 0$

$102 \cdot 14 \cdot 6.4 < 103 \cdot (-6.4) \cdot (-14)$

$56 : (-1.4) > 560 : (-1.4)$ (שימו לב לשינוי במחולק: הפתעה!)

3. א. הטענות (1) – (4) הן נכונות (ו- (1) גם נובעת מ- (2) ו- (3)); (6) נובעת מ- (1) ושקולה ל- (7).

ב. רק טענות (2) ו- (6) לא נכונות. טענה (4) מדגישה כי סכום של שני מספרים שליליים תמיד שלילי, וטענה (5) נובעת מ- (1) – ללא חשיבות של סימני המספרים הנתונים!

ג. שימו לב! ניתן להחליט לפעמים בלי לדעת, האם המספרים הנתונים הם חיובים או שליליים! טענה (1) לא נכונה, לגבי (2) לא ניתן לדעת; טענה (3) נכונה, כי $b > a$, לגבי (4) אין מספיק נתונים; טענות (5) ו- (7) **יכולות להיות** נכונות (אך לא בוודאות); טענה (6) נכונה, כי היא שקולה ל- $b > a$.

4. א

5. ב

6. ד (ושווה ל- 0 רק כאשר המחוברים הם מספרים נגדיים.)

7. ב

8. א