פעילויות בנושא "סדר פעולות חשבון"

ד״ר איליה סיניצקי – מכללת גורדון לחינוך

תחום תוכן מתמטי (בהתאמה לסילבוס): **שיטת הפוזיציה המבנה העשורי והאלגוריתמים** - סדר פעולות החשבון וחוקי פעולות החשבון.

רשימת מושגים מתמטיים: חוקי פעולות החשבון, סדר פעולות החשבון, אומדן.

זמן משוער לפעילות - 1-2 שעות (חלק מהפעילויות אפשר לתת כשיעורי בית).

מטרות המפגש - שימוש בחוקי הפעולות ובסדר פעולות החשבון.
היכרות עם אסטרטגיות שונות בפתרון בעיות.

חומרים ועזרים דרושים - 5 דפי פעילות למשתלמים.

הרציונל: חוש למספרים הוא אחד מהמרכיבים העיקריים של חשיבה מתמטית. שימוש מושכל בחוקי פעולות החשבון, כולל סדר הפעולות, מהווה מיומנות חשובה בתהליך זה. הפעילויות המוצגות, בנוסף לתפקידן כחומר לימוד למשתלמים, מהוות גם דגמים לבניית פעילויות לפיתוח חשיבה מתמטית של התלמידים בנושאים הקשורים בסדר פעולות החשבון.
כל דף עבודה מלווה בהנחיות קצרות למנחה הסדנה. אך על סמך ניסיון בביצוע משימות אלו בקרב המשתלמים, ניתן לומר כי הן מזמינות דיון רחב בהיבטים מתמטיים, דידקטיים וארגוניים של הפעילויות, ויישום עקרונותיהן בכיתות ההוראה של המשתלמים.

דף פעילות מס' 1- למשתלם

קבלת אפס מהמספרים הטבעיים

1. בעזרת פעולות החשבון קבלו את התוצאה – המספר 0. אם יש צורך השתמשו בסוגריים:

$1 \quad 2 \quad 3 = 0$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 = 0$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 = 0$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 = 0$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 = 0$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 = 0$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 = 0$

2. התבוננו בפתרונות של חבריכם וענו על השאלות הבאות לגבי התרגילים שהרכבתם:
   א. האם יש פתרון לכל תרגיל?
   ב. האם הפתרון הוא יחיד?
   ג. האם ניתן לדעת מראש מהו מספר הפתרונות לכל תרגיל?
   ד. באילו אסטרטגיות לפתרון השתמשתם?

3. ענו על השאלות המתייחסות לנושאים המתמטיים הרלוונטיים לפעילות:

א. האם קיים תפקיד כלשהו (ומהו?) לסדר פעולות החשבון בתרגילים שהרכבתם?

ב. מהם החוקים המתמטיים הקשורים בפעילות?

ג. מה מאפיין את כל הפתרונות עם שרשרת המספרים 1, 2, 3, 4, 5 בהשוואה לפתרונות קודמים מבחינת פעולות החשבון? למה?

ד. אחד מהתלמידים הרכיב את התרגיל הבא כתשובה למשימה: $-1-2+3=0$. כיצד תתייחסו לתשובה זאת?

4. הרחבת הפעילות

נתונה המשימה: "הכניסו פעולות חשבון בין המספרים 3 2 1 כדי לקבל את התרגיל בעל התוצאה הגדולה ביותר האפשרית. אם יש צורך, השתמשו בסוגריים".

א. התמודדו עם המשימה. מהו הפתרון שקיבלתם?

ב. מדוע אתם בטוחים שהפתרון מספק באמת את התשובה המקסימלית?

ג. מהם השיקולים לבחירת הפעולות המסוימות בהרכבת התרגיל?

ד. חשבו על ווריאציות שונות של המשימה. למשל:
- מה יקרה, כאשר השרשרת תהיה ארוכה יותר?
- האם החלפת המשימה (התוצאה הקטנה ביותר) מגדירה את המטרה חד-משמעית לכל תלמיד?
- האם נוכחות של המספר 1 בין המספרים היא חשובה מבחינה דידקטית?

דף פעילות מס' 1 - הנחיות למנחה

א. פתרונות אפשריים ראשוניים הם, למשל:

$1 + 2 - 3 = 0$ $\quad$ $1 - 2 - 3 + 4 = 0$ $\quad$ $1 \times 2 - 3 - 4 + 5 = 0$

כמובן, יש פתרון לכל אחת מן השרשרות, וניתן לדבר על שתי אסטרטגיות בסיסיות:

- "איזון", כאשר מגיעים לתשובה הרצויה בעיקר באמצעות חיבור וחיסור;
- שימוש בכפל ב- 0 (כך, למשל, אפשר לצרף כפל ב- 4 כבר לשרשרת הראשונה): $(1 + 2 - 3) \times 4 = 0$.

לשרשרת הראשונה קיים הפתרון היחיד (הפתרון המוצג בשאלה 3ד' משתמש בסימן "-" לפני 1 לפעולת "מספר נגדי", שאינה אחת מארבע פעולות החשבון). ביתר המקרים מספר הפתרונות הוא גדול. שימוש בסוגריים, למשל, נותן מספר פתרונות לשרשרת השנייה המבוססים על איזון (שימו לב לפתרון האחרון – החישוב בו לא גולש למספרים שליליים):

$1 - (2 + 3) + 4 = 0$

$1 - 2 - (3 - 4) = 0$

$1 - (2 + 3 - 4) = 0$

אפשר לנצל את הפתרונות הנ"ל למשימות (גם לתלמידים): למקם את הסוגריים בשרשרות כדי לשנות את התשובה של תרגיל השרשרת ל- 0.

דיון נוסף ניתן לקיים דווקא על מושג "תרגיל השרשרת" כתרגיל שכל הפעולות בו מתבצעות "בסדר טבעי" משמאל לימין.

ב. בתגובה לשאלה 3 משתלמים מציינים בקלות את חוקי סדר הפעולות כמפתח לרוב התרגילים. יחד עם זאת, נזכיר מספר חוקים הקשורים ב- 0 הנמצאים, בדרך כלל, בפתרונות המוצגים על-ידי המשתלמים:

- הפרש של שני מספרים זהים שווה ל- 0;
- מכפלת מספר כלשהו ו- 0 שווה ל- 0;
- מנת החילוק של 0 במספר שונה מ- 0 שווה ל- 0 [נזכיר כאן את קבוצת הפתרונות היפים:

$(1 + 2 - 3) \pm (4 - 5 - 6 + 7) = 0$

$(1 + 2 - 3) \times (4 - 5 - 6 + 7) = 0$

אך, כמובן, לא $(1 + 2 - 3) : (4 - 5 - 6 + 7)$].

ג. נושא מעניין לדיון עולה מניתוח התכונות של כל הפתרונות לשרשרות 1, 2, 3, 4, 5 וגם 1, 2, 3, 4, 5, 6. אחרי הבירור שכל אחד מהפתרונות הרבים מכיל פעולת כפל או חילוק, ניתן לבקש מהמשתלמים למצוא פתרון באמצעות חיבור וחיסור בלבד (והפעם מותר לשנות את הסדר של המספרים). כדאי לבקש מהמשתלמים לדווח על ניסויים שבוצעו, גם אם לא הובילו לפתרון. עם

הצגת אפשרויות שונות על הלוח, קל לגלות שבמקרה של חיבור וחיסור בלבד כל התרגילים לשתי שרשראות אלו נותנים כתשובה רק מספרים אי-זוגיים.

יש כאן מקום לדיון שמוביל להבנת הסיבה המתמטית לתופעה: מספר אי-זוגי של מספרים אי-זוגיים בשרשרת. המסקנה החשובה היא, כי בתחום המספרים השלמים, **החלפת פעולת חיבור בפעולת חיסור, או שינוי סדר פעולות** אלו באמצעות סוגריים, יכולים לשנות את ערך התשובה, **אך זוגיותה נשמרת**.

ד. בקשר להרחבת הפעילות, התרגיל $(1 + 2) \times 3 = 9$ מספק את התשובה הגדולה ביותר. כדי לצמצם את הבדיקה של כל האפשרויות, ניתן לפסול את השימוש בפעולות חיסור וחילוק (שאינן מגדילות את התשובה בתחום המספרים הטבעיים). במקרה של שרשרות ארוכות יותר יש לזכור, כי מספר האפשרויות שצריך לבדוק, גדל מהר בגלל האופציות הרבות לשינוי סדר הפעולות באמצעות סוגריים. אך כאשר כל איברי השרשרת הם מספרים טבעיים הגדולים מ-1, הפתרון הוא טריוויאלי: מכפלת כל המספרים הנתונים נותנת את התשובה המקסימלית.

ה. שינוי פורמלי של המשימה (להגיע לתשובה קטנה ככל שאפשר) מזמין דיון על תחום התשובות האפשריות: בתחום המספרים הלא שליליים כבר קיימת התשובה (0), אך בתחום המספרים השלמים ניתן להרכיב את התרגיל הבא: $1 - 2 \times 3 = -5$ (שוב שימו לב לסדר הפעולות!).

הצעות לדפי פעילות נוספים

דף פעילות מס' 2 - למשתלם

מספר אחד מהמספרים הטבעיים

בעזרת פעולות החשבון קבלו את התוצאה – המספר 1. אם יש צורך השתמשו בסוגריים:

$1 \quad 2 \quad 3 = 1$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 = 1$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 = 1$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 = 1$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 = 1$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 = 1$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 = 1$

הערות למנחה לדף פעילות מס' 2

א. שימו לב, כי במשימה זאת השימוש בסדר פעולות החשבון נחוץ כבר לקבלת הפתרון לשרשרת הראשונה.

ב. בין הפתרונות של המשתלמים קיימים פתרונות המפתיעים. למשל: $(1 - 2) \times (3 - 4) = 1$ וגם "בניו" $1 \times (2 - 3) \times (3 - 4) = 1$ ואפילו $(1 - 2) \times (3 - 4) \times (5 - 6) \times (7 - 8) = 1$, אך לא מספר אי-זוגי של סוגריים: $(1 - 2) \times (3 - 4) \times (5 - 6) = -1$.
בנוסף נציין את "הרחבת השרשרת" $(1 + 2) : 3 = 1$ ל- $((1 + 2) : 3 + 4) : 5 = 1$ ובאותו הסגנון $(((1 + 2) : 3 + 4):5 + 6) : 7 = 1$ וההמשך ברור.

ג. ניתן לדון בפתרונות בסגנון הפעולות הקודמת. התכונות המתמטיות "המשחקות" כאן דומות לתכונות הרלוונטיות לפעילות הקודמת. יתרה מכך, ניתן לקבל את חלק מהפתרונות דרך "ההעתקה": $(1 + 2) - 3 = 0 \longrightarrow (1 + 2) : 3 = 1$.

דף פעילות מס' 3 - למשתלם

בעזרת פעולות החשבון וסוגריים (אם נחוץ) קבלו את התשובות הנדרשות בשרשרות הבאות:

$9 \quad 2 \quad 2 \quad 2 = 0$

$9 \quad 2 \quad 2 \quad 2 = 1$

$9 \quad 2 \quad 2 \quad 2 = 2$

$9 \quad 2 \quad 2 \quad 2 = 3$

$9 \quad 2 \quad 2 \quad 2 = 4$

$9 \quad 2 \quad 2 \quad 2 = 5$

$9 \quad 2 \quad 2 \quad 2 = 6$

$9 \quad 2 \quad 2 \quad 2 = 7$

$9 \quad 2 \quad 2 \quad 2 = 8$

$9 \quad 2 \quad 2 \quad 2 = 9$

$9 \quad 2 \quad 2 \quad 2 = 10$

$9 \quad 2 \quad 2 \quad 2 = 11$

$9 \quad 2 \quad 2 \quad 2 = 12$

הערות למנחה לדף פעילות מס' 3

א. בדיון ניתן גם כאן לדבר על פתרון באמצעות חיבור וחיסור בלבד, אך אפשרות עקרונית לקבלת תשובה אי-זוגית לא מבטיחה את קיום הפתרון (למשל, אי-אפשר להגיע ל- 1 רק דרך חיבור וחיסור).

ב. ניתן למצוא כאן פתרונות **שלא** משתנים למרות שינוי בסדר פעולות החשבון (באמצעות סוגריים). למשל, $7 = 2 : 2 \times (2 - 9)$, וגם $7 = 2 : 2 \times 2 - 9$. בהחלט, ישנן גם דוגמאות מסוג אחר: $10 = 2 \times (2 - 2 - 9)$, אך $3 = 2 \times 2 - 2 - 9$, ו- $9 = 2 \times (2 - 2) - 9$ וכו'.

ג. משימה זאת מספקת חומר לדיון על הערכת הקושי של תרגילים דומים, הכולל גם פן אישי.

דף פעילות מס' 4 - למשתלם

"בעיה הפוכה"

הכניסו את סימני פעולות החשבון המתאימות וקבלו את התוצאות השונות - הכל מספרה אחת.

$1 = 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2$

$2 = 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2$

$3 = 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2$

$4 = 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2$

$5 = 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2$

$6 = 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2$

$7 = 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2$

$8 = 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2$

$9 = 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2$

$10 = 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2$

$11 =$

הערות למנחה לדף פעילות מס' 4

הפתרונות האפשריים הם:

$1 = 2 + 2 - 2 - 2 : 2$

$2 = 2 + 2 + 2 - 2 - 2$

$3 = 2 + 2 - 2 + 2 : 2$

$4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 - 2$

$5 = 2 + 2 + 2 - 2 : 2$

$6 = 2 + 2 + 2 + 2 - 2$

$7 = 2 + 2 + 2 + 2 : 2$

$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 - 2$

$9 = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 : 2$

$10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$

לקבלת התשובה 11 **חייבים** להשתמש בחמש ספרות של 2, אך צריך לצרף שתיים מהן כדי להרכיב את המספר 22. הטריק מאפשר להתקדם עד למספר 26:

$11 = 22 : 2 + 2 - 2$

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 + 2$

$13 = (22 + 2 + 2) : 2$

$14 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2$

$15 = 22 : 2 + 2 + 2$

$16 = (2 \cdot 2 + 2 + 2) \cdot 2$

$17 = (2 \cdot 2)^2 + 2 : 2$

$18 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2$

$19 = 22 - 2 - 2 : 2$

$20 = 22 + 2 - 2 - 2$

$21 = 22 - 2 + 2 : 2$

$22 = 22 \cdot 2 - 22$

$23 = 22 + 2 - 2 : 2$

$24 = 22 - 2 + 2 + 2$

$25 = 22 + 2 + 2 : 2$

$26 = 2 \cdot (22 : 2 + 2)$

דף פעילות מס' 5 - למשתלם

שימוש בחוקי פעולות החשבון באומדן

מבלי לחשב את ערכי הביטויים, ציינו למי מבין הביטויים הבאים יש ערך מספרי גדול, קטן או שווה לערך הביטוי הנתון:

$$147 \times 28 =$$

נמקו את דעתכם בכל אחד מהמקרים.

א. $28 \times 47 + 2800$

ב. $84 - 28 \times 150$

ג. 28×146

ד. 29×146

ה. 25×150

ו. 47×128

ז. 84×49

ח. $(4 + 10) \times (6 - 300)$

ט. $7^3 \times 5^0 \times 3^1 \times 2^2$

דף פעילות מס' 5 - הנחיות למנחה

כללי: רצוי לבקש מהמשתלמים הסבר מדויק להחלטתם, כולל שיום חוקי החשבון, עליהם מבוסס הפתרון.

א. $28 \times 147 = 28 \times (100 + 47) = 28 \times 100 + 28 \times 47 = 100 \times 28 + 47 \times 28 = 2800 + 47 \times 28$

ב. $28 \times 147 = 28 \times 150 - 28 \times 3 = 28 \times 150 - 84$

ג. $28 \times 147 > 28 \times (147 - 1) = 28 \times 146$

ד. תרגיל זה "רומז" על שמירת התוצאה כאשר קיים איזון בשינוי המחוברים. כאן כדאי להתחיל מקביעת העובדה שכשוויון הוא בלתי אפשרי בגלל השוני בספרות היחידות במכפלות. להלן שתי דרכי השוואה שהציעו המשתלמים:

דרך אחת: $28 \times 147 > 1 - 28 - 147 + 28 \times 147 = (1 - 147) \times (1 + 28) = 29 \times 146$;

דרך שניה: $28 + 28 \times 146 = 28 \times (1 + 146) = 28 \times 147$,

אך $146 + 28 \times 146 = (1 + 28) \times 146 = 29 \times 146$, וכך $28 \times 147 < 29 \times 146$.

ה. $28 \times 147 > (3 - 28) \times (3 + 147) = 25 \times 150$.

ו. שימו לב לזהות ספרות היחידות במכפלות. השיטות הקודמות להשוואה בהחלט תקיפות גם כאן, אך קל לראות את סדרי הגודל של המכפלות: $3000 \approx 28 \times 147 << 5000 \approx 47 \times 128$. שלושת התרגילים האחרונים מזמינים דיון על השוואת המכפלות, כאשר סכום הגורמים נשאר קבוע. עם הוספת דוגמאות נוספות, המשתלמים מגיעים למסקנה, כי המכפלה גדלה כאשר הגורמים מתקרבים בגודלם אחד לשני. זה המקום לדבר על המשמעות הגיאומטרית של התוצאה: אם כל אחד מהגורמים מבטא את אורך הצלע של המלבן, סכומם הוא חצי-היקף של המלבן, ומכפלתם היא שטחו. במילים אחרות, בין המלבנים בעלי אותו (חצי) היקף, הריבוע הוא בעל השטח המרבי.

ז. $28 \times 147 = (3 \times 28) \times (3 : 147) = 84 \times 49$

ח. כמובן, $28 \times 147 = (2 : 28) \times (2 \times 147) = (4 + 10) \times (6 - 300)$. המעניין כאן שזאת דרך נוחה לחישוב המכפלה הנתונה.

ט. השוויון מתקיים, ויש רק להזכיר שוב כי $1 = 5^0$.