שיטת הפוזיציה, המבנה העשורי ואלגוריתמים

רונית בסן צינצינטוס, ד״ר רונית קליין, ד״ר רותי שטיינברג, מלכה שפט, מכללת סמינר הקיבוצים

תחום תוכן מתמטי (בהתאמה לסילבוס) - ערך מקום, ייצוג על-ידי חזקות של 10, היכרות עם מודלים שונים, הקשר שבין המבנה העשורי לבין אלגוריתמים חישוביים, ארבע פעולות חשבון, אלגוריתמים אלטרנטיביים ואלגוריתמים מקובלים: היכרות והצדקה.

רשימת מושגים מתמטיים שנלמדים בפעילות - עיקרון ההקבצה, הבחנה בין ספרה ומספר, ערך מקום, פריטה והמרה.

רעיונות מתודיים - פעילות למורים ברמת לומד מבוגר, התנסות בכתיבת מספרים ובהבנת הכמות אותה הם מייצגים בשיטה המבוססת על ערך המקום – שיטת בסיס 6 כאשר אותיות יווניות משמשות כספרות, פריטה והמרה. התנסות בשימוש באמצעי המחשה והבנת היעילות היחסית של כל אחד מהם, אלגוריתמים מומצאים, אלגוריתמים מקובלים, שגיאות אופייניות של תלמידים בחיבור וחיסור, לוח חיבור, פעילויות חקר. תהליך העבודה על המשימה הינו דגם המדגיש אלמנטים דידקטיים. רפלקציה על מהלך הפעילות מעשירה את הידע הפדגוגי תוכני לו נדרש מורה מקצועי למתמטיקה.

זמן משוער לפעילות - 4 פגישות בנות 4 שעות כל אחת.

מטרות המפגשים - הבנת העקרונות של שיטה לכתיבת מספרים המבוססת על עיקרון ערך המקום, על-ידי התנסות בשיטת בסיס 6 הכתובה על-ידי אותיות יווניות. התנסות בשיטה שונה מהמקובל מאפשרת לדון בעקרונות כתיבת המספרים כנושא חדש ללא השפעה של ידע קודם (מודע או לא מודע, חלקי או מלא). התנסות זו מאפשרת להבין את קשיי התלמידים בנושא ואת חשיבות השימוש באמצעי המחשה.

הכרת אלגוריתמים שונים (מקובלים או מומצאים על-ידי התלמידים, חשיבותם בתהליך הלמידה של המבנה העשורי, מתן לגיטימציה לתלמיד להשתמש בהם.

היכרות עם אמצעי המחשה שונים, יתרונות וחסרונות של המודלים ככלי עזר ללמידת הנושא.

חומרי עזר - דפי עבודה , שקפים למורה, אמצעי המחשה.

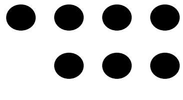
מהלך הפעילות וההסברים לפעילות

שלב 1: סיפור "בארץ גריקה"

המורות יענו על דף עבודה ״ארץ גריקה״ (**נספח 1**).

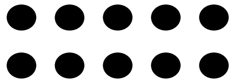
בתרגיל 1 המורות נדרשות להציג כתיבה בסימנים של ארץ גריקה של כמויות גדולות מ- 6.

בתום הפעילות המורות מציגות פתרונות שונים.

למשל: לכמות של שבע,  יציעו 3+4, כלומר, יפרקו אותה לשני מחוברים קטנים מ- 6 להם

יש ייצוג מתאים באות יוונית. לכן יציעו **δ γ** . ייתכן ויציעו גם **ε + β** (5+2) .

יש להעלות את הרעיון שכתיבת המספרים וקריאתם צריכה להיות אחידה, עקבית ויעילה. לא ייתכן שאחד יכתוב כך והשני אחרת. איך באופן כזה תיכתב כמות של אלף? האם נכתוב **ε** 200 פעמים? זה לא יעיל ולא קריא.

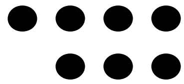
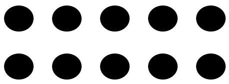
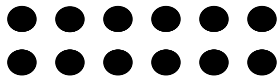
יש להניח כי לכמות של עשר  המורות יציעו לכתוב **φ α** .

אבל לפי ההצעה הקודמת, לשם הבנת הכמות שמספר זה מייצג יש לחבר את הכמויות שכל ספרה מציגה כלומר לחבר אפס + אחד (וזה כמובן אינו 10).

נשאלת שאלה נוספת - כיצד נדע מתי צריך לחבר ומתי לא צריך לחבר?

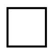
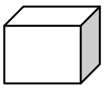
לאחר דיון והרגשה של דרך ללא מוצא, המורות יקבלו (בקבוצות) את "המתנות" שאנשי גריקה שלחו להן (כל "מתנה" היא מעטפה המכילה משבצונים. בכל מעטפה כ- 12ריבועים של משבצת אחת (ריבוע קטן), 6 רצועות של 6 משבצות מחוברות לאורך (מקל) וריבוע אחד של 36 משבצות (לוח). ראה **נספח 2**). יש לערוך דיון מהן המתנות ומה היחסים בין ריבוע קטן, מקל ולוח.

בעזרת המשבצונים המורות יציגו כל כמות נתונה כאשר הן מבצעות את כל ההמרות האפשריות. בכל פעם שיש 6 מהריבועים הקטנים מקבצים אותם למקל, ו- 6 מקלות מקובצים ללוח.

את הכמות  מייצגים על-ידי ריבוע ומקל, את  מייצגים על-ידי 4 ריבועים ומקל, ואת  מייצגים על-ידי 2 מקלות.

הערה: עד כה לא עסקו המורות בכתיבת המספרים אלא רק בייצוג הכמות.

כשלב ביניים לפני כתיבת המספרים, מציגים בטבלת העזר (**נספח 3**) את הכמויות כפי שיוצגו על-ידי המודל.

צורה **כמות**				
7	**α**	**α**		
35	**ε**	**ε**		
40	**δ**		**α**	

מציגים את שיטת כתיבת המספרים על-פי ערך המקום ומדגישים את נחיצות האפס כשומר מקום.

בכל פעם שיש 6 מהריבועים הקטנים מקבצים אותם וכותבים 1 במקום משמאל. ערך הספרה נקבע על פי מיקומה.

נציג את המספר **γ β δ** שבו יש **γ** (3) לוחות, **β** (2) מקלות ו- **δ** (4) ריבועים קטנים שביחד הם $3\times 36+2\times 6+4=124$.

הוספנו את הקובייה בעמודה הרביעית בטבלה, אף על פי שלא ניתנו בדוגמאות מספרים גדולים. הדבר נחוץ לצורך הרחבת הבנת עקרון ההקבצה והיחס הקבוע בין המקומות. הקובייה נותנת אופציה למרצים המעוניינים להרחיב את הדיון בעקרונות לכתיבת מספרים בשיטת גריקה.

תרגיל 2 :

המורות משלימות את לוח החיבור. בסעיף זה הן עובדות עם המודל ומתרגמות לכתיבה במספרים (בספרות היווניות). הפתרון :

	φ	α	β	γ	δ	ε
φ	φ	α	Β	γ	δ	ε
α	α	β	Γ	δ	ε	α φ
β	β	γ	Δ	ε	α φ	α α
γ	γ	δ	ε	α φ	α α	α β
δ	δ	ε	α φ	α α	α β	α γ
ε	ε	α φ	α α	α β	α γ	α δ

תרגיל 3 :

לשם פתרון התרגילים המורות ייעזרו במודלים ואת התשובה יכתבו במספרים.

לדוגמה :

α δ

+

δ δ

כדי לבצע **δ + δ** יקחו 4 ריבועים קטנים ועוד 4 ריבועים קטנים, יקבלו 8 ריבועים קטנים. 6 מתוכם ימירו ויקבלו מקל אחד ושני ריבועים. ירשמו **β** (**α** רושמים בעמודת המקלות למעלה). כרגע בעמודת המקלות יש לחבר **δ + α + α**. לכן יקחו 4 מקלות, מקל ומקל ויקבלו 6 מקלות אותם ימירו ללוח.
יש לרשום **α** בעמודת הלוחות**.** קיבלנו 2 ריבועים קטנים, אף לא מקל אחד ולוח אחד. לכן יש לרשום **φ** בעמודת המקלות. פתרון התרגיל הוא: **α φ β**.
ניתן לפתור את התרגיל בעזרת לוח החיבור.

תרגיל זה מדגים את עיקרון ההקבצה מחד, ומאידך מעמיד בפני המורות אותם הקשיים בהם נתקלים תלמידים בהמרה ובפריטה בתרגילי חיבור וחיסור.

$$\begin{array}{r} \alpha\varphi\varphi \\ -\quad\delta \\ \hline \varepsilon\beta \end{array} \qquad \begin{array}{r} \beta\alpha \\ -\quad\beta \\ \hline \alpha\varepsilon \end{array} \qquad \begin{array}{r} \alpha\delta \\ +\ \delta\delta \\ \hline \alpha\varphi\beta \end{array} \qquad \begin{array}{r} \alpha\gamma \\ +\ \beta\alpha \\ \hline \gamma\delta \end{array}$$

תרגיל 4:

בתרגיל זה נדרשות המורות להשוות בין זוגות מספרים. התרגיל מזמן השוואה על-פי ערך המקום.

$$\alpha\delta \quad < \quad \delta\alpha$$

$$\alpha\varphi\varphi \quad > \quad \varepsilon\varepsilon$$

$$\gamma\gamma \quad < \quad \gamma\varepsilon$$

תרגיל 5:

ראה **נספח 4**. בתרגיל זה נעשה מעבר לשיטה העשורית שהיא שיטת הפוזיציה המוכרת לנו

תרגיל 6:

ראה **נספח 5**.
אמצעי ההמחשה נותנים לנו בסיס מוחשי לייצג רעיונות מתמטיים ומאפשרים לבצע את המשימה.
רצוי להפנות את תשומת לב המורות לכך שרק בעזרת אמצעי ההמחשה עדיין לא יכלו לכתוב את המספרים. כלומר, שיש צורך לבצע העברה מאמצעי ההמחשה לשפה הפורמלית המתמטית. דיון מעמיק באמצעי המחשה ייעשה בשלב 3.
תפקיד המורה לגשר, להוביל ולתווך בין ביצוע התלמיד עם אמצעי ההמחשה לבין השפה המתמטית הפורמלית.

שלב 2

בשלב זה נרחיב ונעמיק את הבנת ערך המקום של הספרה, כולל - פריטה, על-ידי התנסות בתרגיל חילוק ארוך המתבצע עם לבני דינס. השימוש באמצעי ההמחשה מדגיש את חשיבותם בתהליך ההבנה של התוכן המתמטי המופשט .

המורות יתבקשו להדגים את פתרון תרגיל החילוק $= 165:3$ באמצעות לבני דינס.

165 מיוצג על-ידי לוח (מאה) , 6 מקלות (עשרות) ו- 5 ריבועים קטנים (אחדות).

לא ניתן לחלק יחידת לוח שלמה של 100 ל- 3. לכן, יש לפרוט את הלוח ל- 10 מקלות (עשרות). יחד עם 6 המקלות הקיימים, מתקבלים 16 מקלות. חילוק 16 (מקלות) ב- 3 נותן 5 (מקלות) ונשאר מקל אחד.

כדי להמשיך את תהליך החילוק, יש לפרוט מקל זה ל- 10 ריבועים קטנים (אחדות). קיבלנו עתה, יחד עם 5 הריבועים הקיימים, 15 ריבועים קטנים. בחלוקה ב- 3 מקבלים 5 (ריבועים קטנים). לפיכך, תשובת ה"תרגיל" היא: 5 מקלות ו- 5 ריבועים קטנים, כלומר, 55.

בתהליך החילוק נוהגים לעתים להסביר:

"היות ואחד אינו מתחלק ב- 3, מוסיפים את ה- 6 ומקבלים 16, ו- 16 ניתן לחלק ל- 3". אמירה זו אינה מדויקת. למעשה מאה אחת אינה מתחלקת ב- 3 ויש צורך לפרוט אותה לעשרות כך שיתקבל מספר עשרות גדול או שווה ל- 3 (במקרה זה 16) כדי שאפשר יהיה לבצע את החילוק.

בהמשך, המורות יתבקשו לפתור שלא באלגוריתם החילוק הארוך המקובל את התרגיל =165:3.

לדוגמה: לפלג את 165 ל- 150 ו- 15 ומתקבל 50 =150:3 ו- 5 =15:3. תוצאת התרגיל - 55.

למורות יוצגו דוגמאות של ילדים מכיתות ב-ד שפתרו בעיות חילוק במספרים מעבר ללוח הכפל. המורות יתבקשו לנתח את הדוגמאות.

הדוגמאות נבנו בסדר כזה המראה התפתחות של אסטרטגיות פתרון עם הגיל וההתנסות. הדוגמאות מובאות מתוך פתרון של בעיות מילוליות, העוזרות לילדים להבין את הקונטקסט של הסיטואציה. דבר זה עוזר להם להבין איך לפתור ואיך להתגבר על קשיים שנוצרים בדרך, והתוצאות משמעותיות בהקשר שלהן. הבעיות שהילדים פותרים כאן ניתנות פעמים רבות בגילאים מאוחרים יותר. אפשר לראות כאן שגם ילדים צעירים בכיתה ב מוצאים דרכים משמעותיות ויצירתיות לפתור בעיות חילוק במספרים גדולים.

אפשר לראות **בנספח 7** שאסטרטגיות הילדים מתקדמות מייצוג המספרים הגדולים בחפצים אחד אחד (או בציור) (דוגמה 1), לייצוג הכמות בעשרות ויחידות וחילוק מספר עשרות שלמות ומה שנשאר ביחידות (דוגמאות 2 ו- 3). ייצוג כזה יכול להיעשות עם אמצעי המחשה או רק רישום במספרים שבו הילד, לדוגמה, רושם 10 10 וכן הלאה. בהמשך, הילדים פותרים כבר ללא אמצעי המחשה, תוך פילוג למספרים בעשרות או במאות המוכרים להם כמספרים שמתחלקים. בדוגמה 4, כדי לפתור 164:4 הילד מתחיל לחלק 40 ל- 4, מספר פעמים ו- 20 לחלק ל- 4 וכן הלאה. בסוף הוא אוסף את התוצאות החלקיות. בדוגמה 5 הילדה פותרת את התרגיל 156:3 (156 נורות ששמים ברמזורים, כמה רמזורים יהיו?) בעזרת פילוג 156 למאות, עשרות ויחידות וחלוקת כל אחד מהם. בדרך זו נשארות שאריות שהילדה אוספת ומשתמשת בהם שוב ליצירת קבוצה נוספת. גם כאן התוכן של הסיפור וההקשר עוזרים לילדה לדעת מה לעשות עם השאריות. השאריות כאן הן נורות בודדות נוספות שאפשר להרכיב אותן ברמזור נוסף. בשלב המתקדם יותר הילד מפלג את המספר ההתחלתי למספרים במאות או בעשרות שמתחלקים בקלות. בדוגמה 6, הילד שצריך לחלק 384 ב- 8, מחלק קודם 240 ל- 8, ואת מה שנשאר - 144, הוא מפלג שוב ל- 80 לחלק ל- 8 ול- 64 לחלק ל- 8. בסוף הוא אוסף את התוצאות החלקיות.

חשוב להראות שהחילוק הארוך הסטנדרטי, דורש למעשה מהילדים לדעת מראש מהי החלוקה הטובה ביותר המקסימלית להתחיל ממנה, משימה מאוד לא פשוטה לילדים. **האלגוריתמים המומצאים** של הילדים עוזרים לילדים לפעול עם הבנה ומשמעות. הם בדרך כלל מתחילים מהכמות כולה (המחולק) או מכפולות מוכרות של המחלק. לעומת האלגוריתם הסטנדרטי בו מפרקים את המספר לחלקים שפעמים רבות מאבדים את משמעותם המקורית. מה זו הספרה ש"מורידים" למטה? מדוע לוקחים רק 2 ספרות, מה משמעותן?

בעזרת האלגוריתמים המומצאים הילדים ממשיכים לפתח את תחושת סדר הגודל של המספר ומשפרים את יכולתם לאמוד את התוצאה. זה ידע חשוב שעוזר בהבנת התהליך בבקרתו ובבדיקת סבירות התוצאה.

המורה בכיתה יכולה לעבוד עם התלמידים לאורך זמן על שכלול אסטרטגיות הפתרון שלהם, תוך שיתוף דרכים שונות לפתרון וקיום שיח על הרעיונות המתמטיים שעולים.

משימה למורות:

בשלב זה המורות יקבלו משימה: להעביר בכיתתן דף בעיות (**נספח 6**) ולהביא דוגמאות של פתרונות שונים של התלמידים לעוד שבועיים.

כמו כן יקבלו המורות דף עבודה (**נספח 8**).

שלב 3: אמצעי המחשה

בפני המורות יוצג מגוון אמצעי המחשה: לבני דינס, לבני די. ג'י., שרוך חרוזים (100 חרוזים מושחלים על שרוך בתבנית של 5 חרוזים בצבע אחד, ו- 5 חרוזים בצבע שונה, ואחר-כך 10 חרוזים בצבע אחד ו- 10 בצבע אחר, וחוזר חלילה), כסף, תבניות לגו, חשבוניית מט"ח, חשבוניית חרוזים של ילדים, וחשבוניית קשתות.

המורות יתבקשו לפעול לפי דף עבודה (**נספח 5**) בכל פעם עם אמצעי המחשה אחר. המורות יתבקשו לבצע צעד באמצעי ההמחשה למול רישומו הפורמלי בתרגיל.

המטרה של פעילות זו היא להראות למורות את החשיבות לקשר את הידע המוחשי עם הרישום בתרגיל, בעבודה עם ילדים. פעמים רבות עובדים עם ילדים באופן מוחשי לאורך זמן ואחר-כך עוברים לתרגילים בהנחה שהילדים יכלילו וירחיבו את ידיעותיהם מהעבודה המוחשית. פעמים רבות הילדים אינם מקשרים בין שני סוגי הידע, לכן יש חשיבות להראות קשר זה בדרך ישירה יותר.

אפשר כאן להזכיר למורות את הקשיים בהם נתקלו בפעילות "ארץ גריקה" במעבר מהעבודה עם אמצעי המחשה (ייצוג הכמויות) לכתיבה הפורמלית של המספרים.

המורות מקבלות 2 דפים מהספר "בא בחשבון", כיתה ג', של הטלוויזיה הלימודית, כדי להדגים איך אפשר לבצע צעד באמצעי ההמחשה ואת אותו צעד לרשום בתרגיל. בדפים מודגם איך נעשה תהליך כזה והמורות מתבקשות לעקוב אחריו ולנסות לבצע זאת עם אמצעי המחשה. בעוד הציורים וההסברים על הדף יכולים להיות מסורבלים, חשוב שהילדים יתנסו בעצמם בייצוג צעד באמצעי המחשה ואת אותו צעד ברישום בתרגיל. (ראו "בא בחשבון" - הטלוויזיה הלימודית, כיתה ג', ספר 2, עמודים 68, 69 ו- 81).

בסיום ההתנסות באמצעי ההמחשה יתבקשו המורות למיין את המודלים לסוגים שונים וייערך דיון:
1. חלוקה למודלים כמותיים - המדגישים את הכמות שהם באים להדגים, כמו: לבני דינס או לבני די.ג'י; ומודלים סמליים - הכמות שהם מציגים היא, תלויית הסכם, כמו: חשבוניית מט"ח חשבוניית קשתות.
2. יתרונות וחסרונות של כל מודל בתהליך ההוראה. המודלים הכמותיים ברורים יותר לתלמיד אך אינם שומרים על ערך המקום. לעומתם המודלים הסמליים - אינם ברורים לתלמידים משום שאינם מציגים את הגידול בכמויות, אך הם עונים על הדרישות המתמטיות של המבנה העשורי.
הערה: הכסף הנו מודל סימלי, אם רוצים לעבוד בו לשם הדגמת המבנה העשורי, יש צורך להוציא מהמודל את כל ההקבצות ל- 5 (5 ₪, 50 ₪) וההקבצות ל- 2 (20 ₪, 200 ₪).

שלב 4: אלגוריתמים מומצאים למול האלגוריתם המקובל

המורות יציגו דוגמאות לאלגוריתמים ש"המציאו" תלמידיהם (על-פי דף העבודה ב**נספח 6**). כדאי לדון בתובנות שהילדים מפתחים דרך פתרון הבעיות. אפשר לדבר על הייחודיות של האלגוריתמים המומצאים של הילדים ולהזכיר את הפתרונות שהמורות ראו בשיעור הקודם בהקשר של בעיות חילוק.
אפשר לחדד את ההבחנה והדמיון בין אלגוריתמים סטנדרטיים ואלגוריתמים מומצאים.
מהו אלגוריתם?
אלגוריתם הנו סדרה סופית של הוראות חד-משמעיות הניתנות לביצוע, שהוצאתן לפועל מובילה להשגת מטרה שהוגדרה מראש, תוך מספר סופי של צעדים.
דוגמה: מתכון להכנת עוגה. אם נבצע את כל השלבים המפורטים במתכון (קח 1 ק"ג קמח... וכו', כמובן שהדלקת החשמל בתנור, הכנסת העוגה לזמן קצוב וכו', חייבים להיות חלק מן המתכון) תושלם העוגה לשביעות רצוננו.
במתמטיקה מופעלת שורה של צעדים על קבוצה של מספרים. ביצוע הצעדים מבטיח הגעה לפתרון.
לדוגמה: חיסור מאונך, חילוק ארוך.
אלגוריתמים סטנדרטיים התפתחו והתייעלו במהלך השנים על-ידי מתמטיקאים.
אלגוריתמים מומצאים מתפתחים על-ידי תלמידים לצורך פתרון בעיות או תרגילים.
האלגוריתמים המומצאים מבוססים על התרגום שהתלמידים נותנים לבעיה, על הבנתם את הפעולות החשבוניות, ועל הדרך בה הם מייצגים ורושמים את הקשרים המספריים.
פיתוח האלגוריתמים על-ידי הילדים עוזר לפתח תובנה מתמטית והבנה משמעותית של התהליכים המתמטיים. הילדים אינם פועלים באופן טכני הם נותנים משמעות לצעדים. פעמים רבות מתפתחים האלגוריתמים מתוך ייצוג הבעיות בעזרת אמצעי המחשה ואחר-כך הכללה של הרעיונות בעל פה ובכתב. הילדים, בדרך כלל, אינם שוכחים את הפרוצדורות שפיתחו כי הן משמעותיות להם. דיון ושיח בכיתה על אלגוריתמים שונים של ילדים מקדמים את הילדים לדרכים משוכללות יותר. מהניסיון ומהמחקר החינוכי ידוע שכמעט כל הילדים יכולים לפתח אלגוריתמים מומצאים וזו אינה פעילות של יחידי סגולה. אפשר להיעזר בשקף ב**נספח 10**.
אפשר להשתמש גם בדוגמאות של אלגוריתמים מומצאים בחיבור ובחיסור המופיעות במאמר שנמצא באתר המרכז הארצי להוראת מתמטיקה באוניברסיטת חיפה: שטיינברג - הוראת המבנה העשורי, בכתובת: http://mathcenter-k6.haifa.ac.il/forums/misparim_and_peulot/mp5.doc

שלב 5: טעויות של תלמידים

המורות יתבקשו לפתור תרגיל חיסור עם פריטה בבסיס 6. בניגוד לשפת גריקה כאן המספרים כתובים בספרות רגילות. לאחר מכן ייערך דיון על קשיים בפתרון התרגיל.

התרגיל:

$$\begin{array}{r} 51 \\ -\ \underline{5} \\ 42 \end{array}$$

דרך פתרון אחת היא **בבסיס 6.** המספר 5 בעמודה השניה של המחוסר מציג 5 הקבצות של 6. פריטת אחת מהן נותנת 6 וביחד עם היחידה האחת מתקבל 7. ממנו נחסר 5 ומתקבלת התוצאה 2. בעמודה השנייה, מתוך 5 ההקבצות שהיו נשארות 4 הקבצות. את ה- 4 נעתיק לתוצאה.

קיימת דרך אחרת לפתרון בה **מתרגמים** את המספר הנתון בבסיס 6 **לבסיס 10** ומקבלים 31. מ- 31 מחסירים 5 ומקבלים 26. אותם מתרגמים לבסיס 6 ומקבלים 42.

כאן יש לדון בטעויות אלגוריתמיות אופייניות בארבע פעולות חשבון במספרים טבעיים.

דיון כזה ניתן למצוא בספר "מתמטיקה מחקר והוראה"[1] הוצאת מופ"ת עמ' 91-108.

שלב 6: פתרון דף עבודה (נספח 8)

פתרון תרגיל 1

א. הטענה אינה נכונה. המספר הראשון הוא בן 6 ספרות. לכן הוא גדול מ- 100,000 (למעשה, גדול או שווה ל- 102,100) ואילו המספר השני הוא בן 5 ספרות כך שהוא קטן מ- 99,999 שקטן מ- 100,000 (למעשה קטן או שווה ל- 98,999).

לכן אנחנו יודעים בוודאות שהמספר הראשון גדול יותר.

ב. הטענה נכונה. ראה הנמקות בטענה א.

ג. הטענה אינה נכונה.

פתרון תרגיל 2

5 7 _ _ < 7045

א. 4 עשרות 5 יחידות 7 אלפים

ב. אלף אחד 267 עשרות   **3670** < 2 7 7 0

267 עשרות הם 2670 יחידות, ועוד אלף אחד הם 3670 יחידות.

[1] תירוש, ד' (1996). **מתמטיקה מחקר והוראה**. מופ"ת- מחקר ופיתוח תכניות להכשרת מורים.

ג.

2080	>	2035
2080	<	2135
2080	<	2235
		.
		.
		.
2080	<	2935

רק אם נוסיף את הספרה 0 במקום החסר, המספר הימני יהיה קטן מן השמאלי, אחרת הוא יהיה גדול יותר.

ד.

לא חשוב איזו ספרה תופיע במספר השמאלי כספרת העשרות.	23_5	>	2035
כנ"ל	23_5	>	2135
כנ"ל	23_5	>	2235
	2305	<	2335
	2315	<	2335
	2325	<	2335
לא חשוב איזו ספרה תופיע במספר השמאלי כספרת העשרות.	2305	<	2435
	2395	<	2345

פתרון תרגיל 3

א. יש לחבר שתי ספרות X, Y כך שנקבל 17. האפשרות היחידה היא שהספרות הן 8 ו- 9.

עתה יש לחבר ל- Y את Z ולקבל 16, אם X=8 ו- Y=9 אזי Z=7. אם X=9 ו- Y=8 אזי Z=8.

שלב 7: פתרון דף בעיות חקר (נספח 9)

1.

א. הספרה 1 מופיעה 200 פעמים:

		אחדות	עשרות	מאות	
	בין 1 ל- 99	10	10	0	
	בין 100 ל- 199	10	10	100	
	בין 200 ל- 299	10	10	0	וכו'
כלומר,	סך הכל 200 פעמים	5×10 +	5×10 +	100	

ב. בספרה 6 השתמשו 100 פעמים.

ג. יש יותר 3 מ- 0 היות ואין 0 במאות.

2.

כאשר מחברים שלושה מספרים דו-ספרתיים תהיה התוצאה קטנה מ- 300. לכן B הנמצא במקום המאות בתוצאה יכול להיות 1 או 2 בלבד.

נניח B =1: מכאן

$$\begin{array}{r} AA \\ +\ 11 \\ +\ CC \\ \hline 1AC \end{array}$$

לכן A=9 (על-פי ספרת היחידות)

מכאן

$$\begin{array}{r} 99 \\ +\ 11 \\ +\ CC \\ C91 \end{array}$$

לכן C=9 . התרגיל הוא:

$$\begin{array}{r} 99 \\ +\ 11 \\ +\ 88 \\ 198 \end{array}$$

נניח B =2: מכאן

$$\begin{array}{r} AA \\ +\ 22 \\ +\ CC \\ \hline 2AC \end{array}$$

לכן A=8 (על-פי ספרת היחידות)

מכאן

$$\begin{array}{r} 88 \\ +\;22 \\ +\;CC \\ \hline 28C \end{array}$$

רק עבור C=9 נקבל במאות 2, אך לא מתקיים השיוויון

$$\begin{array}{r} 88 \\ +\;22 \\ +\;99 \\ \hline 298 \end{array}$$

ולכן לא יתכן B=2.

מסקנה : B=1.

3.

										מספרים מתאימים לתנאי
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	4
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	1
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	4
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	1
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	4
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	1
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	4
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	1
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	4
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	0
										24

כל המספרים בטורים האי-זוגיים אינם מתאימים לתנאי, נמחק אותם.

המספרים שנשארו בעשרת הראשונה, פרט למספר 10, מתאימים לתנאי, נמחק את 10.

בעשרת השנייה מתאים רק המספר 20.

המספרים שנשארו בעשרת השלישית, פרט למספר 30, מתאימים לתנאי, נמחק את 30.

בעשרת הרביעית מתאים רק המספר 40. וכן הלאה.

סך הכל קיבלנו 24 מספרים שספרותיהם זוגיות.

אינטואיטיבית נראה כי המספר זהה, אך יש 30 מספרים שספרותיהם איזוגיות (בידקו).

4.

כאשר מחברים מספר תלת-ספרתי ומספר חד-ספרתי, כדי שבסכום יהיו 4 ספרות יכול המספר התלת ספרתי להיות רק מספר בין 991 ל- 999, ואז יש בין 1 ל- 9 מספרים חד-ספרתיים בהתאמה.

למשל: $\begin{array}{r} 991 \\ +\ 9 \\ \hline 1000 \end{array}$ אפשרות 1.

$\begin{array}{r} 992 \\ +\ 8 \\ \hline 1000 \end{array}$ $\begin{array}{r} 992 \\ +\ 9 \\ \hline 1001 \end{array}$ 2 אפשרויות

$\begin{array}{r} 993 \\ +\ 7 \\ \hline 1000 \end{array}$ $\begin{array}{r} 993 \\ +\ 8 \\ \hline 1001 \end{array}$ $\begin{array}{r} 993 \\ +\ 9 \\ \hline 1002 \end{array}$ 3 אפשרויות.

וכך הלאה עד:

$\begin{array}{r} 999 \\ +\ 1 \\ \hline 1000 \end{array}$ $\begin{array}{r} 999 \\ +2 \\ \hline 1001 \end{array}$ $\begin{array}{r} 999 \\ +3 \\ \hline 1002 \end{array}$ . . . $\begin{array}{r} 999 \\ +\ 9 \\ \hline 1008 \end{array}$ 9 אפשרויות.

לכן, מספר האפשרויות הכללי: $1+2+\ldots+9 = 45$

5.

א. $864+753=1617$

ב. $876 - 345=531$ (מהמספר הגדול ביותר נפחית את המספר הקטן ביותר).

ג. $634-587=47$ נרצה פריטת עשרת, במחוסר דו-ספרתי קטן ביותר ובמחסר דו-ספרתי גדול ביותר.

ד. $348+657=1005$ או $468+537=1005$

נספח 1

"ארץ גריקה"- כתיבת מספרים בשיטת ערך המקום

1. בארץ גריקה משתמשים ב- 6 ספרות כל ספרה מייצגת כמות כלהלן[2]:

כמות	●●●●●	●●●●	●●●	●●	●	
הספרה	ε	δ	γ	β	α	φ

כיצד בארץ גריקה כותבים מספרים המייצגים את הכמויות הבאות:

●●●●
●●●

●●●●●
●●●●●

●●●●●●
●●●●●●

2. השלימו את לוח החיבור:

	φ	α	β	γ	δ	ε
φ						
α						
β						
γ						
δ						
ε						

[2] פעילות דומה ניתן למצוא באתר המצורף http://mathcenter-k6.haifa.ac.il/forums/geometry/geo5.doc

3. בעזרת לוח החיבור או המשבצונים פתרו את התרגילים הבאים :

$$\begin{array}{r} \alpha\,\varphi\,\varphi \\ -\quad\quad \delta \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \beta\,\alpha \\ -\quad \beta \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \alpha\;\delta \\ +\;\delta\;\delta \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \alpha\;\gamma \\ +\;\beta\;\alpha \\ \hline \end{array}$$

4. כתבו <, >, = בין זוגות המספרים הבאים :

$\delta\,\alpha$ ___ $\alpha\,\delta$

$\varepsilon\,\varepsilon$ ___ $\alpha\,\varphi\,\varphi$

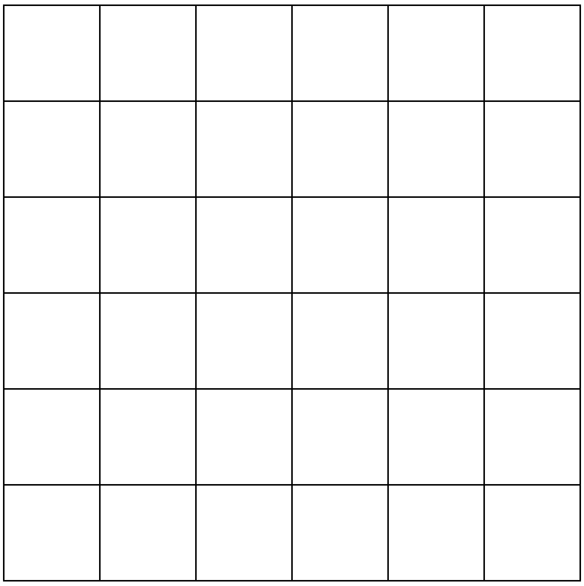
$\gamma\,\varepsilon$ ___ $\gamma\;\gamma$

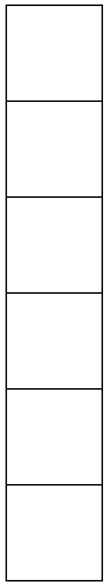
5. מהם העקרונות לכתיבת מספרים בשיטת גריקה?

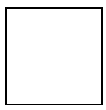
6. דיון : מה תפקיד אמצעי ההמחשה ?

מה תפקיד המורה?

נספח 2

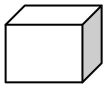






נספח 3

הצג את הכמויות שבטבלה בעזרת הצורות שברשותך.

צורה / כמות				
6		α		
7	α	α		
10	δ	α		
12		2		
20		γ		
35	ε	ε		
36			α	
40	δ		α	

נספח 4 - שקף

עקרונות השיטה העשורית לכתיבת מספרים

1. **קיים מספר קבוע של סימנים גרפיים (ספרות). כל סימן גרפי מייצג כמות נתונה.**

2. **ערכו של כל סימן גרפי (ספרה) נקבע על-פי מיקומו במספר.**

3. **קיים יחס קבוע בין כל שני מקומות סמוכים במספר. (ערך כל מקום גדול פי 10 מערך המקום הנמצא מימין לו - הסדרה היסודית.)**

4. **ערך המספר הוא סכום כל הערכים של הסימנים הגרפיים המרכיבים אותו.**

5. **כל מספר נכתב על-ידי צירוף אחד ויחיד של סימנים גרפיים.**

6. **בעזרת הסימנים הגרפיים ושיטת המקומות ניתן לייצג כל מספר.**

נספח 5

אמצעי המחשה

1. בעזרת אמצעי ההמחשה שבחרת פתור את התרגילים הבאים:

א. $173+48=$

ב. $103-17=$

ג. $3\times124=$

2. הראה ונמק בעזרת אמצעי ההמחשה איזה מספר גדול יותר.

א. 2004 231

ב. 24 עשרות ו- 12 יחידות 306

נספח 6

אלגוריתמים מומצאים של ילדים, התנסות עם ילדים

הנחיות להתנסות: במהלך השבועות הקרובים נסו את הבעיות עם קבוצות קטנות של ילדים בכיתתכן (5-6 בקבוצה, רצוי קבוצות הטרוגניות). לשיעור בעוד שבוע הבאנה בבקשה דוגמאות של פתרונות של ילדים (לפחות בעיה אחת עם קבוצה אחת שניסיתן). רצוי לצלם כמה מהדוגמאות על שקפים להדגמה. חשוב לכוון לאמצעי המחשה מתאימים למי שזקוק להם (המחשה של יחידות, עשרות, מאות ואלפים לפי הצורך). לילדים בכיתה א שאולי עוד לא נפגשו עם עזרים של עשרות ויחידות כדאי לערוך היכרות עם עזרים אלה במהלך הפתרון. אחרי שהילדים פותרים בדרך שלהם, כדאי לעודד אותם לתעד את פתרונם על הדף. התיעוד יכול להיות קרוב למה שהילדים ביצעו. אם פתרו באמצעי המחשה - לציירם, אם פתרו בספירה עם אצבעות, אפשר לצייר אצבעות ולרשום עליהן את המספרים של הספירה, אם פתרו בעל פה, אפשר לרשום תרגילים מתאימים. רישום תרגילים מתאים לכולם (אין לדרוש את התרגיל ה"קלאסי" לבעיה. לדוגמה, בבעיית כפל, יהיו ילדים שירשמו תרגיל שרשרת בחיבור. בשאלה של חיבור עם נעלם יהיו ילדים שירשמו תרגיל חיבור עם נעלם ואחרים יכתבו חיסור - חשוב לקבל את מגוון התרגילים.) חשוב שהילדים ידווחו על פתרונותיהם גם בעל פה בקבוצה הקטנה ובמליאה. חשוב לעודד שיחות מתמטיות בעקבות הרעיונות שעולים. השאלות המסומנות בכוכביות הן שאלות בחירה לשלב זה. רצוי מאוד להתנסות בכל הבעיות המוצגות כאן.

כיתה א

1) המורה קנתה 2 חוברות. כל חוברת עלתה 25 שקלים.
כמה שילמה המורה עבור החוברות?

2) למסיבה הגיעו 24 ילדים מכיתה א1 ו- 23 ילדים מכיתה א2.
כמה ילדים הגיעו למסיבה?

3) * לרינה 25 שקלים בקופה.
היא קיבלה עוד 15 שקלים דמי כיס.
כמה כסף יש לרינה בקופה?

4) * לגיל 24 קלפים. לגל 17 קלפים.
כמה קלפים לשניהם ביחד?

כיתה ב

1) המורה הביאה לכיתה קופסת גירים.
בקופסה היו 28 גירים צבעוניים ו- 35 גירים לבנים.
כמה גירים היו בקופסה?

2) לאלון יש 3 חבילות של מדבקות. בכל חבילה יש 24 מדבקות.
כמה מדבקות יש לאלון ביחד?

3) * לדן 24 שקלים. כמה כסף הוא צריך עוד לקבל כדי
לקנות ספר שמחירו 47 שקלים?

4) * בכיתה יש 32 תלמידים. 13 תלמידים הלכו לספריה.
כמה תלמידים נשארו בכיתה?

כיתה ג

1) אבא קנה 3 ילקוטים לילדים. כל ילקוט עלה 124 שקלים.
כמה עלו הילקוטים?

2) בקופת הכיתה 384 שקלים.
וועד הכיתה אסף עוד 127 שקלים,
כמה כסף יש עכשיו בקופת הכיתה?

3) * לרון יש 127 שקלים. כמה עוד כסף הוא צריך לקבל
כדי לקנות משחק מחשב שמחירו 220 שקלים?

4) * בבית ספר אביבים 432 תלמידים.
153 תלמידים יצאו לצפות בהצגה.
כמה תלמידים נותרו בבית הספר ?

5) * אמא קנתה 52 פרחים. היא חילקה את הפרחים ל- 3 אגרטלים,
שווה בשווה. כמה פרחים אמא שמה בכל אגרטל?

כיתה ד

1) המורה קנתה 12 חוברות. כל חוברת עלתה 24 שקלים.
כמה שילמה המורה עבור החוברות?

2) * מחיר הטיול לילד אחד הוא 170 שקלים. כמה שילמו 3 ילדים לטיול?

3) * עיריית תל אביב החליפה 510 נורות ברמזורים.
בכל רמזור שמו 3 נורות. לכמה רמזורים הספיקו הנורות?

כיתות ה-ו

1) עיריית תל אביב החליפה 1644 נורות ברמזורים.
בכל רמזור שמו 3 נורות. לכמה רמזורים הספיקו הנורות?

2) * 324 תלמידים יצאו לטיול. כל ילד שילם 12 שקלים כניסה לאתר.
כמה כסף שילמו כל הילדים יחד?

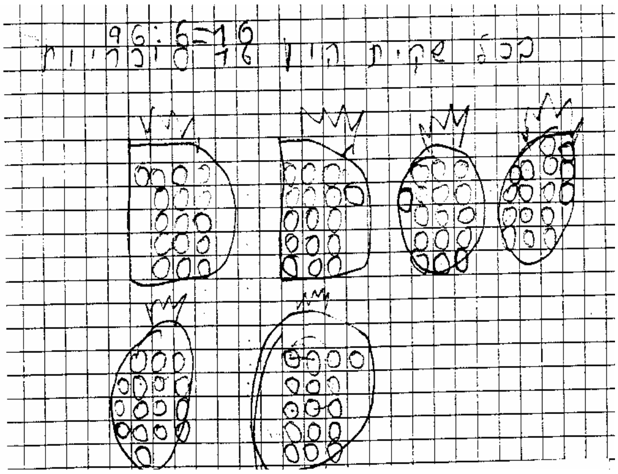
נספח 7

דוגמה 1

ליורם 96 סוכריות.

הוא רוצה לחלק אותן ל- 6 שקיות שווה בשווה.

כמה סוכריות יהיו בכל שקית?

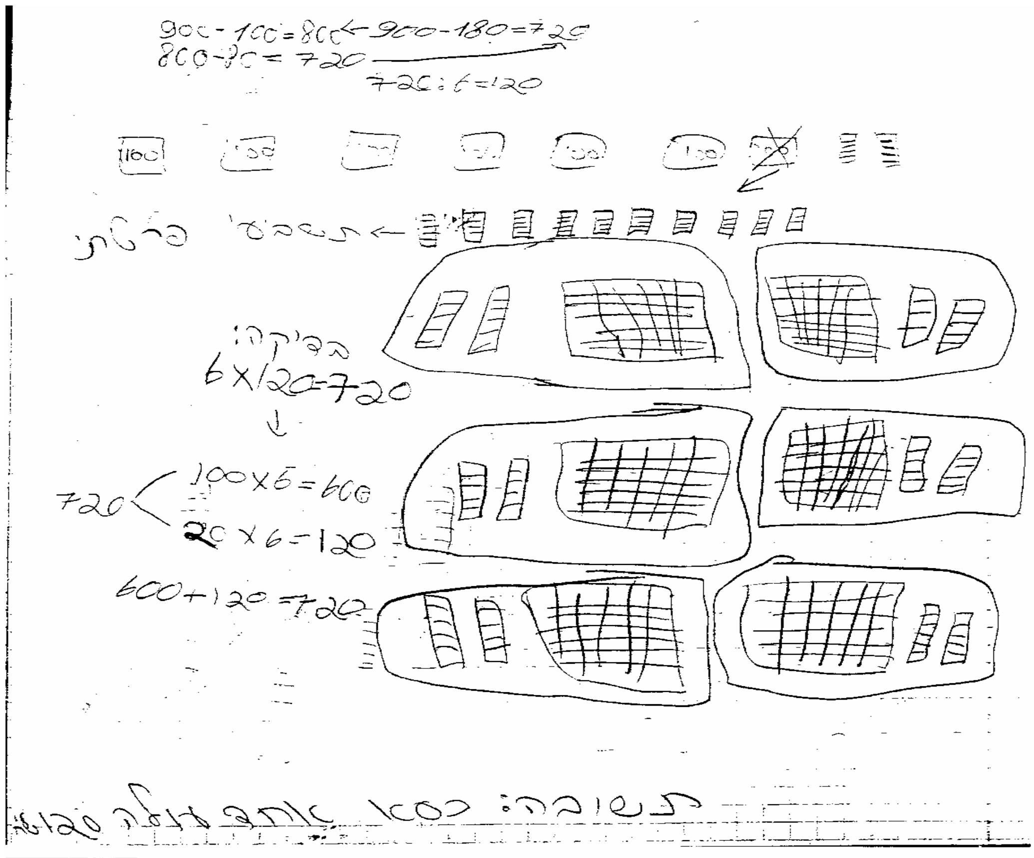


דוגמה 2

שולחן ו- 6 כיסאות עולים 900 ש״ח.

שולחן עולה 180 ש״ח.

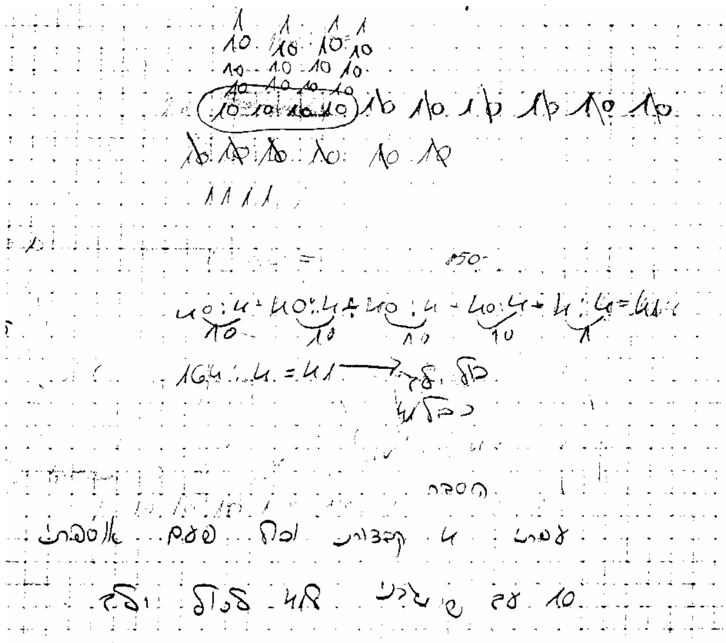
כמה עולה כל כיסא?



דוגמה 3

המורה חלקה 164 חרוזים ל- 4 תלמידים.

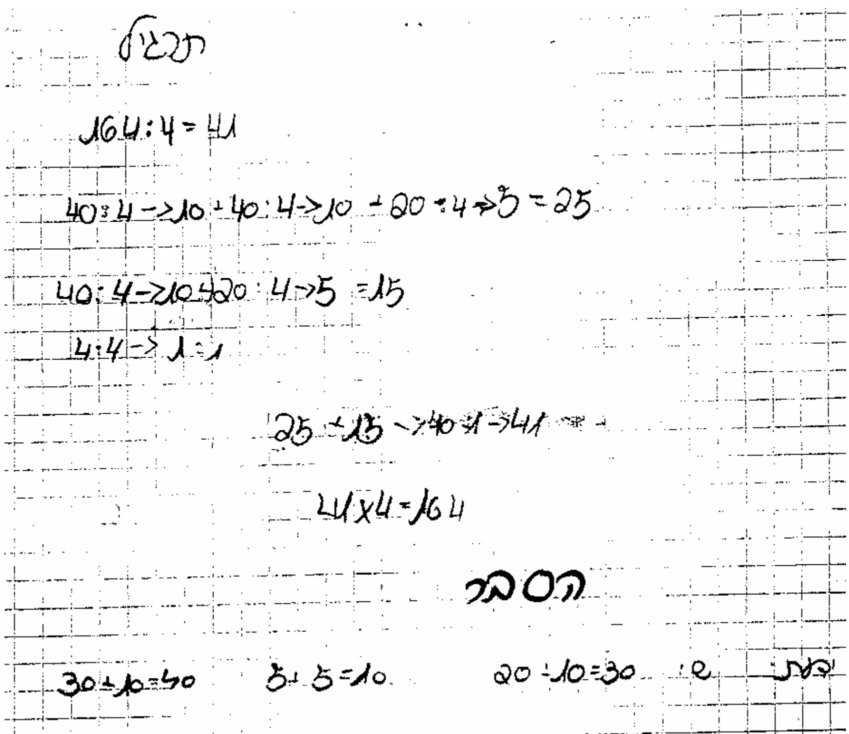
כמה חרוזים קיבל כל תלמיד?



דוגמה 4

המורה חלקה 164 חרוזים ל- 4 תלמידים שווה בשווה.

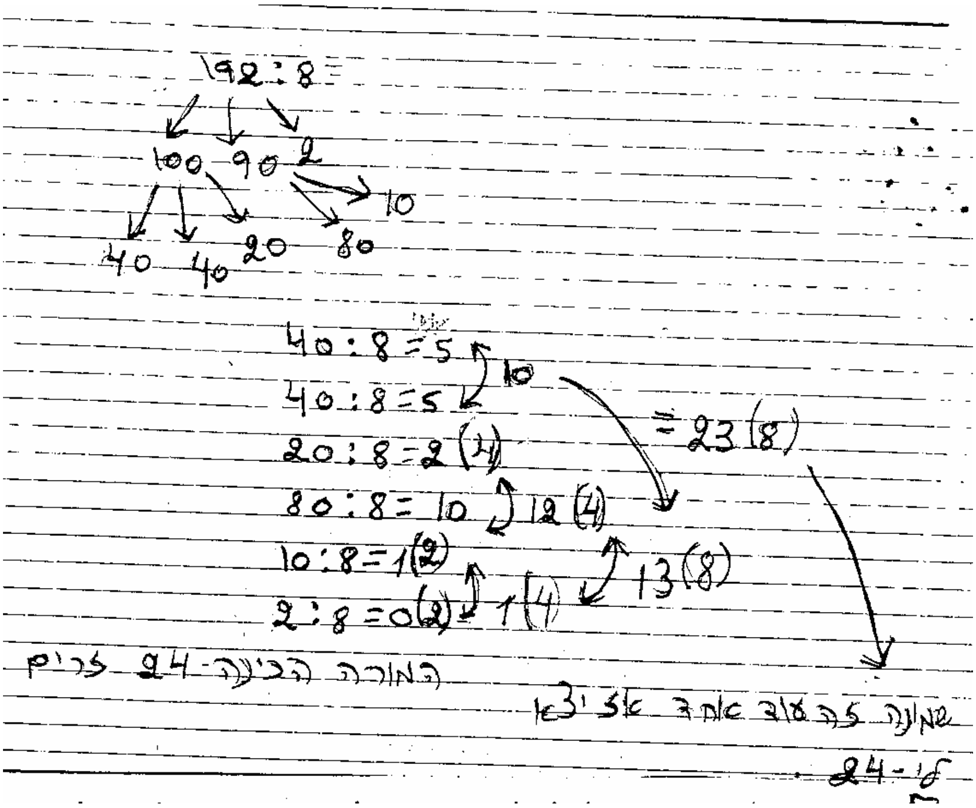
כמה חרוזים קיבל כל תלמיד?



דוגמה 5

המורה קנתה 192 פרחים כדי להכין זרים לכבוד חג השבועות.

בכל זר סידרה המורה באופן שווה 8 פרחים. כמה זרים הכינה המורה?



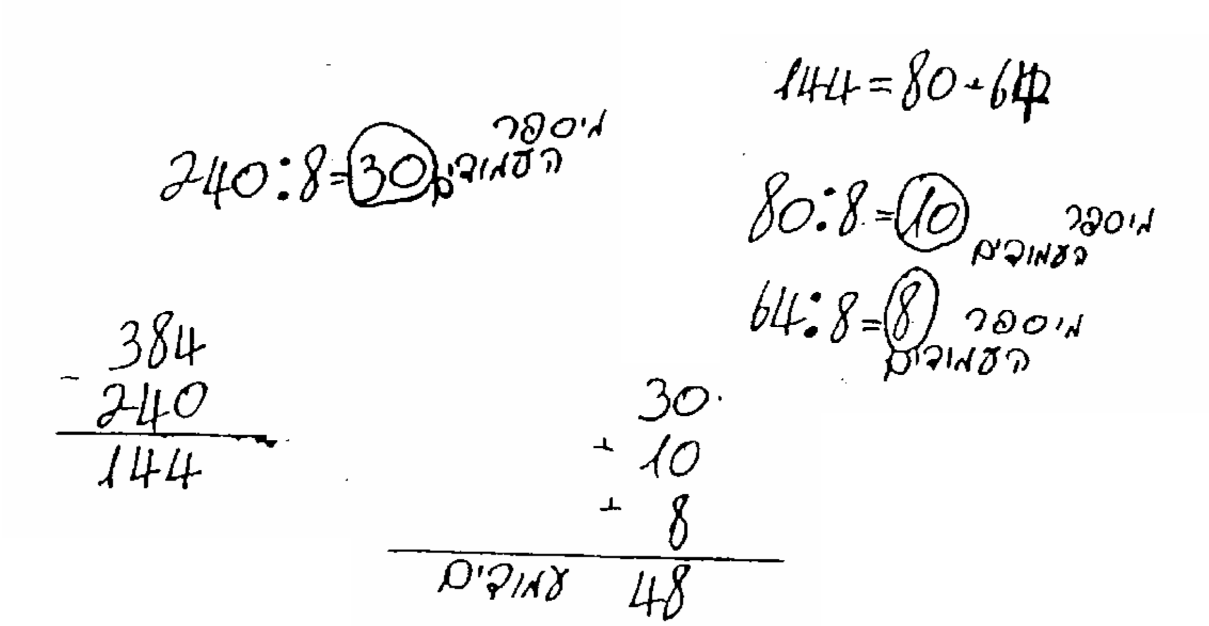
דוגמה 6:

באלבום של דני 384 מדבקות עם תמונות של שחקנים.

בכל עמוד מודבקות 8 תמונות.

כמה עמודים באלבום של דני?

384:8=48



נספח 8

דף עבודה מס' 1

1. לפניך שני מספרים שחלק מספרותיהם נמחק.

* * 2 1 * *

* 8 * * *

איזו טענה מהטענות הבאות נכונה?

א. בלי כל הספרות אי-אפשר להשוות בין המספרים.

ב. במספר א יש יותר מקומות, לכן הוא גדול יותר.

ג. במספר ב יש את הספרה 8 לכן הוא גדול יותר.

2. בחלק מהמספרים הבאים חסרות ספרות.

בכל זוג מספרים רשמו: >, <, =

א.	4 עשרות 5 יחידות 7 אלפים	______	5 7 _ _
ב.	אלף אחד 267 עשרות	______	2 7 7 0
ג.	2 _ 3 5	______	2 0 8 0
ד.	2 _ 3 5	______	2 3 _ 5

3. נתון: $\mathbf{Y} + \mathbf{X} = 17$

$\mathbf{Z} + \mathbf{Y} = 16$

אילו ספרות מייצגים $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$?

נספח 9

פעילויות חקר

1. מיספרו עמודים בספר מ- 1 עד 500.

א. כמה פעמים השתמשו בספרה 1?

ב. כמה פעמים השתמשו בספרה 6?

ג. האם השתמשו ביותר פעמים בספרה 0 מאשר בספרה 3?

2. איזו ספרה מייצגת כל אות בתרגיל הנתון:

$$\begin{array}{r} \mathbf{AA} \\ + \ \mathbf{BB} \\ \underline{\mathbf{CC}} \\ \mathbf{BAC} \end{array}$$

3. א. כמה מספרים הכתובים בספרות זוגיות מצויים בין 0 ל- 100?

ב. מבלי לחשב: מה יש יותר, מספרים הכתובים בספרות זוגיות או מספרים הכתובים בספרות פרטיות (אי-זוגיות) ?

4. נתון התרגיל הבא:

$$\begin{array}{r} * * * \\ + \quad \\ * \\ \hline * * * * \end{array}$$

כמה תשובות יש לתרגיל? הסבירו.

5. נתונות הספרות 3,4,5,6,7,8

א. כתבו תרגיל חיבור של שני מספרים תלת-ספרתיים שהסכום שלו הוא הגדול ביותר.

ב. כתבו תרגיל חיסור שהפרשו הוא הגדול ביותר.

ג. כתבו תרגיל חיסור שהפרשו הוא הקטן ביותר.

ד. כתבו תרגיל חיבור שתוצאתו הקרובה ביותר ל- **1000**.

נספח 10 - שקף

אלגוריתמים מומצאים

מהו אלגוריתם?

אלגוריתם הנו סדרה סופית של הוראות חד-משמעיות הניתנות לביצוע, שהוצאתן לפועל מובילה להשגת מטרה שהוגדרה מראש, תוך מספר סופי של צעדים.

דוגמה: מתכון להכנת עוגה.

במתמטיקה מופעלת שורה של צעדים על קבוצה של מספרים.

ביצוע הצעדים מבטיח הגעה לפתרון.

<u>אלגוריתמים סטנדרטיים</u> התפתחו והתייעלו במהלך השנים על-ידי מתמטיקאים. דוגמה: חיסור מאונך.

<u>אלגוריתמים מומצאים</u> מתפתחים על-ידי תלמידים בפתרון בעיות או תרגילים.

- **הם מתפתחים מהדרך בה התלמידים מפרשים בעיה, מבינים את הפעולות החשבוניות, ומייצגים ורושמים את התהליך.**
- **אלגוריתמים מומצאים עוזרים לפתח תובנה מתמטית והבנה משמעותית של התהליכים המתמטיים.**
- **פיתוח אלגוריתם מומצא יכול להתחיל משימוש באמצעי המחשה ולהגיע להכללה וחישובים בעל פה ובכתב.**
- **דיון ושיח בכיתה מקדמים ילדים לדרכים משוכללות יותר.**

מהניסיון ומהמחקר החינוכי ידוע שכמעט כל הילדים יכולים לפתח אלגוריתמים מומצאים.