מודל תהליכי לפתרון בעיות מילוליות

ד"ר ברוריה מרגולין, מכללת לוינסקי, וד"ר בת שבע אילני, מכללת בית-ברל

תחום תוכן מתמטי (בהתאמה לסילבוס) - סיטואציות בעיה.

זמן משוער ללימוד הנושא: 1.5 ש"ל.

קישור לנושאים: דיאגראמות וון.

חומרים ועזרים דרושים: דף עבודה: "ומה הבעיה בבעיה?" ושקף: "תרשים המודל לפתרון בעיה מילולית במתמטיקה". (נמצאים בנספח שבסוף המודולה.)

מבנה הפרק:

א. מבוא

ב. תיאור המודל

1. השפה הטבעית ושפת המתמטיקה
2. ההבדלים בין השפה הטבעית לבין השפה המתמטית
3. תרגום מהשפה הטבעית לשפה המתמטית בבעיות מילוליות במתמטיקה
4. לקראת הגישור בין השפה הטבעית לשפה המתמטית
5. חשיבות הצגת המודל

ג. מהלך הפעילות

א. מבוא

בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה יש צורך לגשר בין השפה המתמטית, המחייבת את ראיית הרכיבים המתמטיים, לבין השפה הטבעית המחייבת התייחסות אוריינית לטקסט השלם. נציג דוגמות לבעיות מילוליות במתמטיקה, שבהן פתרון הבעיות תלוי במעבר מהסיטואציה הלשונית למודל המתמטי ונציע מודל בן עשרה שלבים המקשר בין "שתי הפנים" של השפה המתמטית: הסיטואציה הלשונית מצד אחד והמבנים המתמטיים האבסטרקטיים מצד שני. המודל מציע תהליך אינטראקטיבי ורב שלבי המאפשר את פענוח הטקסט המתמטי והפקת המשמעות ממנו באמצעות פענוח סמלים גראפיים, הבנת התוכן הגלוי, הבנת הסיטואציה הלשונית, מעבר למודל מתמטי והתאמה בין הסיטואציה הלשונית והמודל המתמטי המתאים. אנו ממליצות להשתמש במודל זה הן לתלמידים בכיתות הגבוהות של בית הספר היסודי, הן לתלמידים בחטיבת הביניים ובחטיבה העליונה. כמו כן השימוש במודל מומלץ למורים ולסטודנטים בהכשרתם להוראה כדגם להוראת פתרון בעיות מילוליות. עבודה הדרגתית על דרכי פתרון בעיות מילוליות בעזרת סכמות מובנות כבר מהלימוד של הבעיות המילוליות הפשוטות, תאפשר לתלמיד להתמודד גם עם בעיות מורכבות יותר.

ביחידה זו מופיע רקע תיאורטי למורי המורים שבו נמצאות שאלות שונות שאפשר להפנות למתמקצעים (**דף עבודה – מה הבעיה בבעיה?**).

ב. תיאור המודל

1. השפה הטבעית ושפת המתמטיקה

אחת ממגבלות השפה הטבעית היא העובדה שהיא פועלת באופן דיאכרוני, דהיינו המשמעויות שהיא מציגה נפרשות על פני רצף הזמן. אלא שתפיסת העולם, ולמעשה משמעות העולם, תלויה בסינכרוניות השדה, כלומר בהקשר וביחסי הגומלין עם הסביבה. זאת ועוד, השדה כשלם מעניק משמעות לרכיביו, ורכיבי השדה תורמים מצדם למשמעות השלם. לשון אחר: כדי לקרוא בעיה מילולית במתמטיקה ולהעניק לה משמעות יש לתפוס אותה כיחידת טקסט אחת, ולא רק כאוסף של נתונים.

יחידת טקסט היא יחידה לשונית הגדולה מן המשפט. זו יחידה הדוקה מבחינה עניינית ולשונית בעלת גבולות ברורים (Dijk Van, 1980; Widdowson, 1979; Halliday & Hassan, 1976) (רבין, תשמ״ב; לנדאו, תשמ״ג), המשמשת לצורכי תקשורת (Brown & Yule, 1983; שראל, 1991). זיהוי הרכיבים בטקסט תלוי במודעות המטא-לשונית לתפקידה של הצורה, לתפקידה של המילה או לתפקידו של המשפט בטקסט, ובמיוחד במודעות לסמלים ובמודעות התחבירית (Herriman,1991 בתוך: MacGregor, 1999). שאלות כמו חיבור וחיסור או כפל וחילוק הן שאלות חשובות להבנת השפה המתמטית, אולם תפיסת מבנה הטקסט היא תהליך אינטואיטיבי, שבאמצעותו מזהים רכיבים טקסטואליים ומבצעים פעילויות לוגיות שונות.

השפה המתמטית היא שפה מסוג מיוחד, השונה מן השפה הטבעית. ״זוהי שפה כה מושלמת ומיוחדת וכה מופשטת, עד שניתן לקוות כי כל היצורים האינטלגנטיים ביקום יכולים להבין אותה (...) הדקדוק של שפה זו, כלומר הדרכים הנכונות לשימוש בה - נקבע על-ידי כללי ההיגיון. אוצר המילים שלה מורכב מסמלים, כמו: ספרות המייצגות מספרים, אותיות המבטאות מספרים לא ידועים, משוואות המתארות יחסי גומלין בין המספרים (...) כל הסמלים הללו מסייעים למדען לקצר את תהליכי החשיבה שלו במידה ניכרת. לגבי ההדיוטות, מכל מקום הם הופכים את המתמטיקה משפה אוניברסלית למחסום בלשני מוצק החוצץ בין ״שתי תרבויות״ של החברה המודרנית - בין המדעים לבין המקצועות ההומניסטיים.״ (ברגמיני והעורכים של לייף, 1970).

השפה המתמטית היא שפה של סמלים, מושגים, הגדרות ומשפטים. זו שפה שצריכה להילמד ואינה מתפתחת באופן טבעי כמו השפה הטבעית של הילד. בשפה המתמטית לומד הילד להכיר למשל, את המספרים כאובייקטים, אחד אחד, על תכונותיהם הדומות והשונות. המספרים הם סמלים שבאמצעותם אפשר לחשב חישובים ולעשות מניפולציות שונות.
הסינטקס, באופן כללי, עוסק בכללי התצורה לפיהם מורכבים משפטים ומילים. הסינטקס של השפה המתמטית כולל רשימת סימנים, כללי תצורה ליצירת תבניות השפה, אקסיומות, מערכת היסק ומשפטים. המונחים המתמטיים והסימונים המתמטיים חייבים להיות מוגדרים באופן חד-משמעי. כמו כן גם כל טענה בשפה המתמטית היא חד משמעית - לכל תבנית מתמטית יש מבנה עומק אחד הנקבע על-ידי כללי הפעולות והסוגריים.

לא נרחיב את הדיבור על הגדרות ומשפטים במתמטיקה, אבל כל הגדרה של מושג מתמטי היא תוצאה של תהליך מורכב , מכיוון שבכל הגדרה נכללים מושגים נוספים שצריכים להיות מוגדרים גם הם. כל אחד מהמשפטים המתמטיים בכל אחד מענפי המתמטיקה מאופיין בכך שהוא נובע בצורה לוגית, דדוקטיבית ועקבית ממערכת של משפטים ראשוניים - אקסיומות (וראה סקירה של הנושא אצל: תירוש, ברש, צמיר, וקליין, 2000).

טענתנו המרכזית היא כי יש לגשר בין השפה המתמטית, המחייבת את ראיית הרכיבים המתמטיים, לבין השפה הטבעית המחייבת התייחסות אוריינית לטקסט השלם. לשון אחר: יש ליצור יחסי "פיצוי" בין הרכיבים המתמטיים לבין הרכיבים האוריינים, שהרי כאשר פערי המידע בשפה המתמטית גדולים, על השפה הטבעית למלא את החסר ולהיות ברורה ומפורשת, ואילו כאשר פערי המידע בשפה המתמטית קטנים, השפה הטבעית אינה חייבת למלא את החסר.

2. ההבדלים בין השפה הטבעית לבין השפה המתמטית

בפתרון בעיות מילוליות נתקל התלמיד בשתי שפות שונות זו מזו המופיעות יחד בערבוביה: השפה הטבעית והשפה המתמטית (Kane, 1970 אצל נשר 1976, 1983). ההבדלים המהותיים בין השפה הטבעית לבין השפה המתמטית נובעים בראש ובראשונה מן העובדה שמבנה השפה המתמטית יותר מדויק ופחות גמיש מאשר מבנה השפה הטבעית. בשפה הטבעית יש הבדלים בין מבנה השטח לבין מבנה העומק של המבע, יש טענות דו-משמעיות הנובעות ממלים דו-משמעיות ויש עושר לשוני רב. העושר הלשוני הרב נובע מריבוי סוגים של שמות עצם, וריבוי מילים המבטאות יחס – כל הפעלים ושמות התואר. לעומת זאת בשפה המתמטית לכל מבנה שטח יש מבנה עומק אחד, כל הטענות הן חד-משמעיות ויש דלות לשונית הבאה לידי ביטוי בעובדה שיש שמות עצם מסוג אחד – מספרים, ויש שני סימני יחס: שוויון ואי-שוויון (בלודי-וינר, 1998).

מושגים שונים מתפרשים בשפות השונות: השפה הטבעית והשפה המתמטית, בדרך אחרת. ניקח לדוגמה את המושג "קבוצה". המושג מתפרש בשפה הטבעית כמהות בת יותר משני איברים. לעומת זאת, בשפה המתמטית הקבוצה יכולה להיות בת 0 איברים (קבוצה ריקה) בעלת איבר אחד, או כל כמות טבעית אחרת.

דוגמה נוספת היא המושג "סדרה". בשפה הטבעית הסדרה היא קבוצה מסודרת בעלת חוקיות מסוימת. בשפה המתמטית הסדרה היא אוסף של איברים שהסדר ביניהם ידוע, אך לא חייבת להיות חוקיות בסדר זה.
מבנה השפה המתמטית הוא יותר מדויק ופחות גמיש מאשר מבנה השפה הטבעית, ולכן נוצר מתח רב בשימוש בשפה הטבעית בבעיות מתמטיות. ניקח לדוגמה את מושג האלכסון. האלכסון בשפה המתמטית הוא קו המחבר בין שני קדקודים שאינם סמוכים בתוך מצולע. האלכסון יכול לחבר נקודות גם מחוץ למצולע וגם יכול להיות אופקי או מאונך. לעומת זאת בשפה הטבעית אין חלים חוקי המתמטיקה על האלכסון ולראייה אפשר לתת דוגמה את הפרסומת הבאה: לפי הפרסומת,

אסור לחצות את הכביש ב"אלכסון", כלומר בזווית שאינה בת 90 מעלות. האלכסון בפרסומת אינו אלכסון מתמטי, שכן אינו מחבר בין שני קדקודים בתוך מצולע.
כמו האלכסון, גם הקו הישר שונה בשפה המתמטית. בעוד שבשפה הטבעית קו ישר הוא קטע המתאפיין ב- 180 מעלות, והוא בעל התחלה וסוף, בשפה המתמטית הוא מושג יסוד ללא הגדרה, שאין לו התחלה ואין לו סוף. למעשה, הקו הישר בשפה הטבעית מתאים להגדרה של קטע , שהוא חלק מישר בעל התחלה וסוף.
הקובייה היא דוגמה נוספת לפער בין השפה הטבעית לבין השפה המתמטית. בשפת היום-יום נתפסת הקובייה כתיבה, גליל, חרוט או מנסרה, שבעזרתה ילדים בונים מגדלים, בתים וכיו"ב. אלא שבמתמטיקה הקובייה היא תיבה, שפאותיה ריבועים. גליל, או חרוט בשפה המתמטית לעולם לא יהיו קובייה.

3. תרגום מהשפה הטבעית לשפה המתמטית בבעיות מילוליות במתמטיקה

"בעיה מתמטית היא מצב שבו אדם או קבוצה של אנשים נקראים לבצע משימה שעבורה אין אלגוריתם מוכן ומיידי המגדיר באופן שלם את שיטת הפתרון. פתרון בעיות מתמטיות מצריך ביצוע סדרה של פעולות שבאמצעותן מגיעים למטרה מסוימת" (Lester, 1978).

בעיה מילולית במתמטיקה היא יחידת טקסט עצמאית, הכוללת משפט שאלה ומתארת אירוע (Nesher, 1988; Nesher & Katriel, 1977). לעיתים יחידת הטקסט מתארת אירוע מחיי היום-יום. מטרת התיאור היא מתן ביטוי למבנה לוגי המכתיב פעולה חשבונית מסוימת (נשר, 1980). הקושי בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה הוא הצורך לתרגם את האירוע המתואר בשפה הטבעית לפעילות החשבונית הנדרשת בשפה המתמטית באמצעות פעילויות לשוניות. הפעילויות הלשוניות כוללות הבנה תחבירית, סמנטית ופרגמטית של השיח.

קינטש (Kintsch, 1986) מבחין בין שני סוגים טקסטים: טקסטים עיוניים שבהם הטקסט הוא המטרה המרכזית, וטקסטים מפעילים-מדריכים שמטרתם היא להפעיל את הקורא. הקושי בטקסטים המפעילים הוא בהבנת הסיטואציה המתוארת בטקסט. בעיה מילולית במתמטיקה היא טקסט מפעיל, המחייבת את הקורא גם להבין את הסיטואציה המתוארת בטקסט וגם לענות על השאלה הנשאלת בבעיה.

להלן דוגמאות לבעיות מילוליות במתמטיקה, שבהן פתרון הבעיות תלוי בהמרה של הסיטואציה הלשונית למודל המתמטי.

3.1 בעיית ההמבורגרים

תרגום מהשפה הטבעית לשפה המתמטית בבעיות מילוליות במתמטיקה בעייתי בשל ההבדל בין פתרון בעיות אותנטיות במציאות לבין פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה. דוגמה לכך היא בעיית ההמבורגרים (Gravermeijer, 1997):

מרקו ביקש מאמו שחברו יצטרף אליהם לארוחת ערב. אמו הסכימה אבל אמרה שיש לה רק חמישה המבורגרים ויש כרגע 6 אנשים לארוחה.

איך הייתם מחלקים את חמשת ההמבורגרים בין 6 אנשים?

פתרונות ריאליסטים במקרה שהסיטואציה היא מציאותית:

- מרקו יתחלק עם חברו בהמבורגר שלו.
- אביו ואמו של מרקו יתחלקו בהמבורגר אחד.
- מישהו ילך לקנות המבורגר נוסף.
- ההמבורגרים לא יתחלקו שווה בשווה בין כולם

פתרונות אלה אינם פתרונות מתמטיים, אבל סביר להניח שאלו יהיו הפתרונות שינקטו בהם כשהבעיה תהיה במציאות. במתמטיקה הפתרון צריך להיות כזה שכל אחד מהאורחים יאכל אותו גודל של המבורגר, כלומר, חמש שישיות המבורגר, וזה, כמובן, לא יתרחש במציאות.

3.2 בעיית החיילים והאוטובוסים

דוגמה נוספת לכך שפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה הוא תלוי סיטואציה לשונית היא הדוגמה הבאה:

אוטובוס צבאי מכיל 36 חיילים. 1,128 חיילים היו צריכים אוטובוסים כדי להגיע לאימון. לכמה אוטובוסים הם נזקקו?

התשובה החישובית לבעיה, 1128:36=31(12), אבל התשובה הנכונה לבעיה היא 32 אוטובוסים. 12 חיילים ייסעו באוטובוס ה- 32.

במחקר שנעשה בקרב תלמידים בגיל 13 (Johnson, 1998) התקבל שרק 23% ענו את התשובה הנכונה, 19% ענו 31 אוטובוסים, 29% נתנו את התשובה 31 ושארית 12. (Silver, Shapiro, & Deutsch, 1993).

בניגוד לבעיה הקודמת, שבה היה ניסיון לחבר את התשובה אל הסיטואציה הממשית, בבעיה זו אין ניסיון כזה, כנראה בשל העובדה שהפתרון החישובי הוא פתרון בהישג יד, ולכן אין צורך לחבר את הבעיה לסיטואציה הממשית. [1]

3.3 בעיית הכבשים והכלבים

תרגום מהשפה הטבעית לשפה המתמטית נעשה אוטומטית אצל תלמידים גם בבעיה שאין לה פתרון מתמטי, לדוגמה:

חמישה כלבים שומרים על 125 כבשים. בן כמה השומר? (Baruk, 1989)

כיוון שאין לבעיה פתרון אריתמטי, התלמידים מנסים לפתור את הבעיה בדרך של ניסוי וטעייה ומנסים לבדוק אפשרויות שונות לפתרון תוך חיבור לסיטואציה. הם מנסים פתרונות לפי פעולות החשבון מן הקל אל הכבד, כדלקמן:

א. על-ידי פעולת חיבור: 125+ 5 = 130

ב. כשנראה להם שהמספר גבוה מדיי מכדי לציין גילו של אדם, הם מנסים לפתור את הבעיה על-ידי פעולת חיסור: 5 – 125 = 120.

ג. כשנראה להם שגם המספר הזה גבוה מדיי, הם מנסים לפתור את הבעיה על-ידי חילוק: 5 : 125 = 25. תשובה זו נראית להם הגיונית.

3.4 בעיית הסטודנטים והפרופסור

דוגמה לבעיה מתמטית ולצורך בתרגומה מהשפה הטבעית היא "בעיית הסטודנטים והפרופסור" (Kaput & Clement, 1979). בעיה זו שחשפה את שגיאת ההיפוך בתרגום נחקרה במחקרים שונים (למשל: Clement 1982; Rosnick, 1981), והוסברה בדרכים שונות (בלודי-וינר, 1998).

"כתבו משוואה בעזרת המשתנים S ו- P שתייצג את הטענה הבאה: "באוניברסיטה זו גדול מספר הסטודנטים פי 6 ממספר הפרופסורים". השתמשו ב- S לסימון מספר הסטודנטים וב- P לסימון מספר הפרופסורים.

כשנתנו בעיה זו ל- 150 תלמידי שנה א בהנדסה ול- 47 תלמידי מדעי החברה, התברר ש- 37% מתלמידי ההנדסה ו- 57% ממדעי החברה שגו. שני שלישים מהשוגים כתבו משוואות הפוכות מהסוג: 6S=P במקום 6P=S. השגיאה נבעה מהעובדה שהשפה הטבעית היא שפה ליניארית, שבה סדר המילים הוא הקובע, ולא היחסים בין שמות העצם כמו בשפה המתמטית.

[1] בעיה זו ניתנה בארצות שונות ובאוכלוסיות שונות והתוצאות היו דומות, למשל: נורבגיה, יפן, אירלנד (Greer, 1997).

לפי השפה הטבעית: הסטודנטים היו מיוצגים ע"י S הפעולה החשבונית הייתה מיוצגת על-ידי פעולת הכפל, ולבסוף הפרופסורים היו מיוצגים ע"י P ומכאן 6S=P.

3.5 בעיית המספר שהוקטן

דוגמה נוספת לבעיה מתמטית שיש צורך בתרגום מן השפה הטבעית לשפה המתמטית היא בעיית "המספר שהוקטן".

"כתבו משוואה בעזרת המשתנה X שתייצג את הטענה הבאה: "במכללה זו רבע של מספר הסטודנטים שהוקטן ב- 5 הם הסטודנטים למתמטיקה".

כשבעיה זו ניתנה לסטודנטים להוראת המתמטיקה במכללה להכשרת מורים, התקבלו שתי משוואות:

1. $(X-5)/4$
2. $X/4 - 5$

שתי המשוואות הנ"ל הן משוואות נכונות. ההבדל ביניהן נובע מן העובדה שלמבנה השטח המיוצג בטענה יש שני מבני עומק: לכל מבנה עומק יש משוואה שונה. במשוואה הראשונה הרבע היה ממספר כל הסטודנטים במכללה שהוקטן ב- 5, ואילו במשוואה השנייה הרבע היה ממספר כל הסטודנטים במכללה, ורק לאחר מכן הייתה הקטנה של 5.

ההבדל בין השפה הטבעית לבין השפה המתמטית נוצר בשל העובדה שלמבנה השטח בשפה הטבעית יש שני משפטי עומק, המייצגים שתי הבנות שונות של הבעיה, כלומר, שני פתרונות שונים.

4. לקראת הגישור בין השפה הטבעית לשפה המתמטית

כפי שראינו לעיל, פערי המידע בין השפה המתמטית לבין השפה הטבעית חריפים במיוחד בפתרון בעיות מילוליות. פתרון הבעיות הוא מושג מקיף, הכולל תהליכים קוגניטיביים רבים ובין היתר עיבוד מילולי ותחבירי, שינוי ייצוג ועיבוד אלגוריתמי. ייצוג הוא תחום חשוב בפתרון בעיות ומעט ידוע על הקשר בין תובנות פנימיות וייצוגים, דהיינו: הקשר בין המידע הפנים טקסטואלי,לבין מקבילו החיצוני, דהיינו: המידע החוץ טקסטואלי.

כדי לגשר בין השפה הטבעית לשפה המתמטית, יש לחנך לאוריינות לשונית-מתמטית הן ברמה של המוען והן ברמה של הנמען. מבחינת המוען עליו לדאוג לכך שכל האזכורים בטקסט ייוחסו לרפרנטים מתאימים, שהמבעים לא יהיו דו-משמעים, ושכל המונחים הבעייתיים יועמקו מבחינה

תוכנית. לשון אחר: על המוען לגלות התחשבות בנמען באמצעות הפקת מידע זמין ומקובל. המוען צריך לקחת בחשבון שמשמעו של הטקסט הוא תוצר של יחסי גומלין בין סכימת המוען וכוונותיו לבין סכימת הנמען והיסקיו, ולכן עליו לקבוע קדם-הנחות מדויקות בקשר לידע הנמען וליכולת הסקתו, להפיק טקסט מפורש ככל האפשר באמצעות מימוש לשוני לרעיונותיו, ולנבא מסיחים ומכשולים העלולים לפגום בהבנה ולנקוט פעולות למניעתם (פולמן, 2000).
אשר לנמען, כדי להפיק את מלוא המשמעות של הטקסט עליו להשלים פערי מידע, שאינם נמצאים בטקסט. לשון אחר: הוא חייב לזהות את המידע בטקסט, לקשר אותו קישור פנים טקסטואלי וחוץ טקסטואלי ולהוסיף עליו מידע מן המערך ההקשרי.

בחקר השיח מבחינים בשלושה מעגלים של הקשר: הקשר סמוך ומילולי, כלומר ההקשר הנוצר בתוך היחידות הלשוניות הסמוכות; הקשר נסיבתי-פרגמטי, הכולל מרכיבים שונים כמו: זהות המוען והנמען, זמנה של פעילות הדיבור ומקומה, כוונת המוען והמדיום התקשורתי (ניר, 1989); והקשר עולם השיח, הקשר הנוצר בין הטקסט לבין העולם (שראל, 1991), הקשר שהוא הסתמכות על הידע הקודם שלנו בתחום המדובר.

פערי המידע בפתרון בעיות הם בין יחידת הטקסט לבין המבנה המתמטי החבוי בה. היחידות הלשוניות בטקסט מתפקדות לא רק כסימנים שיש להם מסומנים בעולם החוץ-לשוני, אלא הן מתקשרות ליסודות אחרים בטקסט, כך שהמשמעויות שלהן עולות מאופן הארגון של האמצעים הלשוניים בטקסט. בפתרון בעיות יש לזהות את הזיקות בין המידע הפנים טקסטואלי לבין המידע החוץ טקסטואלי וליצור שלמות רעיונית אחת.

כדי לגשר על הפערים בין השפה הטבעית לבין השפה המתמטית יש לפתח את המודעות לפערים אלה באמצעות יחסי גומלין משמעותיים בין הלומד לבין הסביבה שלו בהקשר של פעילויות אותנטיות, שכן שפה מתפתחת באמצעות יחסי גומלין משמעותיים בין הפרט לסביבתו בהקשר של פעילויות אותנטיות (Gee, 1996). ההקשר של הפעילויות האותנטיות מאפשר חינוך לאוריינות לשונית-מתמטית, שכן האינטרפרטציה של השיח מבוססת על כמות גדולה של אנלוגיה למה שחווינו בעבר, כלומר מבוססת על הידע הסוציו-תרבותי שלנו (Brown & Yule, 1983).

גישור בין השפה הטבעית והשפה המתמטית מחייב מודל שיקשר בין "שתי הפנים" של השפה המתמטית: הסיטואציה הלשונית מצד אחד והמבנים המופשטים האבסטרקטיים מצד שני (Greer,1997). יצירת המודל יכולה להתבצע בשתי דרכים שונות: בדרך של תרגום של הסיטואציה הלשונית למושגים מתמטיים ((Polya cited in Reusser & Stebler, 1997 ובדרך של ארגון של יחידת התוכן המתמטי (Freudenthal, 1991).

לפי גריר, המושגים: הוספה, חיסור, כפל וחילוק יוצרים בכוח מודלים עבור סיטואציות לשוניות, ועל התלמיד להבחין בין המודל לבין הסיטואציה הלשונית ולהעריך אם המודל מתאים פחות או יותר לסיטואציה. תהליך יצירת המשמעות נעשה כתיהלוך רב רובדי המתבצע בכל רובדי הטקסט

ברמות שונות של התמקדות, בכל פעם מתמקד הנמען ברמה אחרת. האינטראקציה בין סכמות הקורא לבין סכמות הטקסט מחייבת מאמץ קומוניקטיבי-קוגניטיבי. המאמץ הקומוניקטיבי מתבטא בזיהוי הסיטואציה הלשונית והמאמץ הקוגניטיבי מתבטא בשחבור הבעיה מחדש תוך חיבור המודל המתמטי לתוכה. יש צורך בחקירת הבעיה בדרכים שונות לשם זיהוי הבעיה לפני שניגשים לפתרונה (Schoennfeld,1980).

קריאת הטקסט צריכה להיות, אפוא, תהליכית. אנו מציעות במאמר זה מודל בן עשרה שלבים לפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה (סכמת המודל מופיעה בשקף בהמשך).

שלבי המודל:

א. קריאת הבעיה

בשלב הראשון יש לקרוא את הבעיה "מלמטה למעלה" (bottom-up). פעולת הקריאה בשלב הזה היא חשיפת המשמעות כשמיקום המשמעות הוא בטקסט. תהליך הקריאה הוא תהליך מצטבר מן היחידות הקטנות ביותר (המילים) ועד היחידה הגדולה ביותר (הטקסט).

ב. הבנת הסיטואציה הלשונית

פעולת הקריאה בשלב הזה תכונה במאמר זה שלב "החימום": גישוש רב כיווני בדרך של "סיעור מוחות" (Brain storming). בשלב זה ישאל הקורא את עצמו את השאלות הבאות:

1. האם כל המילים ברורות?
2. האם כל המשפטים ברורים?
3. מהן מילות המפתח?
4. האם השאלה מובנת?
5. מה היחס שלי לנושא?
6. כיצד אוכל לתאר במילים שלי את הבעיה?

ג. הבנת הסיטואציה המתמטית

הבנת הסיטואציה המתמטית מחייבת ניתוח הבעיה המתמטית. הבעיה המתמטית מורכבת משני סוגים של מידע: נתונים ושאלה. הנתונים מתייחסים לכל הביטויים שאותם אנו מניחים כקיימים בעולם הבעיה. הם יכולים להופיע בצורה מפורשת או בצורה סמויה. הנתונים המפורשים הם אלה המוזכרים בגוף הבעיה, ואילו הנתונים הלא מפורשים הם האקסיומות, המשפטים והעובדות שבהם אפשר להשתמש בפתרון הבעיה. השאלה היא אותו ביטוי שאותו רוצים למצוא.

כדי להבין את הסיטואציה המתמטית קיים צורך לבחון את הנתונים ואת השאלה ולהבין היטב במה המדובר. אפשר להיעזר במקרה הצורך בפירוק, בהדגמה, בתרגול ובהמחשה.
בשלב הראשון ניתן לפרק את הבעיה המתמטית לנתונים גלויים ולנתונים סמויים ולשאלה, ובשלב השני ניתן להדגים את הבעיה במקרים פרטיים ולפרש את הבעיה באמצעות ציור, טבלה, תרשים או גרף היכולים לעזור לפשט את הבעיה.

פותר הבעיה צריך לזהות את העובדות הידועות, ואת התנאים הלוגיים מתמטיים של הבעיה. כמו כן הוא צריך לנסות לשייך את הבעיה הנידונה לבעיה או בעיות שאת פתרונן הוא מכיר.

בשלב זה ישאל הקורא את עצמו את השאלות הבאות:

1. מה בדיוק היא הבעיה?
2. האם כל הנתונים ברורים?
3. האם יש נתונים סמויים, אם כן מהם?
4. האם אני מבין את הקשר בין הנתונים לשאלה?
5. האם יש לי מסגרת מושגית לבעיה?
6. האם הבחנתי בכל תכונותיה של הבעיה?

ד. התאמת הסיטואציה המתמטית לסיטואציה הלשונית

בשלב הזה יש לקרוא את הבעיה "מלמעלה למטה" (top-down). פעולת הקריאה בשלב זה היא החלת סכמות מתמטיות על הטקסט, כשמיקום המשמעות הוא סכמות הידע של הקורא. תהליך הקריאה בשלב זה הוא תהליך מצטבר מן החיבור של סכמות הידע במתמטיקה לסכמות של הטקסט.

בשלב זה נזקק הפותר לעיבוד האינפורמציה המילולית לצורך הפיכתה לתרגיל מתמטי או למשוואה אלגברית, תוך התמקדות במבנה הסינטקטי ובמבנה הסמנטי של הבעיה. בעיית עיבוד האינפורמציה הדרושה לשם פתרון בעיה מילולית היא אחד הקשיים העיקריים בפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה.

בשלב זה ישאל הפותר את השאלות הבאות:

1. האם שמות העצם בשאלה מופיעים בה שוב בתוך מחלקה מכלילה יותר? (למשל: נתונים "תפוחים" ואחר כך שואלים על "פרות").
2. האם האוגדים המופיעים בשאלה מתייחסים לגדלים מתמטיים שונים זה מזה? (למשל: אם מספר מסוים **הוא** 7 והמכפלה **היא** x מה **הוא** המספר הכופל?)
3. האם יש "רמזים מילוליים" בבעיה, כלומר, מילים מסוימות המסייעות כרמז לבחירת הפעולה החשבונית הדרושה לפתרון הבעיה?
4. האם יש פועל מסוים בבעיה הלקוח מן השפה היומיומית הרומז לסוג הפעולה החשבונית שיש לבצע?
5. האם יש מסיחים מילוליים לבעיה?

ה. התאמת הסכמות של הקורא לסכמות של הטקסט

בשלב הזה יש ליצור אינטגרציה בין סכמות הקורא לבין סכמות הטקסט המתמטי. מידת הקישוריות בין מרכיבי סכמות הקורא לבין סכמות הטקסט המתמטי קובעת את כוחן של הסכמות ואת נגישותן.

סכימה היא סוג של ייצוג מנטלי, המאופיין ברשת יחסים פנימית יציבה, הנוצרת ברמה גבוהה של הפשטה או הכללה ומשמשת כתבנית (template) שבה משתמשים לפרש מאורעות ספציפיים (Hiebert & Carpenter, 1992; Brown & Yule, 1983).

הסכימה היא תבנית של פעולה (Piaget, 1980) המאפשרת לבעליה לפעול באותם מצבים באופן עקבי כמתוך הרגל, ויחד עם זאת, יש לה אופי דינמי המאפשר לה להתרחב למצבים חדשים (Hershkovitz & Neseher, 1996, 2003).

במצב של רכישת סכימה פוגש הלומד מקרים חדשים ופועל עליהם לפי הסכמות הקודמות שלו, הקשורות לאותו העניין. הלומד מצפה להתרחשות או לתוצאה מסוימת. אם ההתרחשות תואמת את ציפיותיו, חלה הרחבה של הסכימה הקיימת אצלו, ואם לאו חלה הפרה היכולה לגרום לשינוי הסכימה ולרכישת סכימה חדשה.

ו. העלאת רעיונות לפתרון

לפתור בעיה פירושו למצוא סדרה של צעדים, החל מהמצב הנתון עד למטרה המיוחלת, כך שכל צעד מתקבל מקודמו על-ידי פעולה לוגית. התהליך המוביל לפתרון בעיות קשור בבחירה הולמת, כלומר, חיפוש אחר שיטה, רעיון, צעדים, דרך (ארבל, 1990).

כדי להפוך את החיפוש לשיטתי חייבים להכיר אסטרטגיות לפתרון בעיות. קיימות אסטרטגיות כלליות וקיימות אסטרטגיות המיוחדות לסוגים של בעיות.
בדרך כלל, התלמידים מקבלים בעיות שדומות לבעיות שפתרו בעבר. מכאן לפי פוליה, באה השאלה: המכיר אתה בעיה קרובה לזו שלך? על-פי רוב אין קושי לפי פוליה לעלות בעיות שנפתרו כבר והן קרובות במידת מה לבעיה שלפנינו.

בשלב הזה ישאל הלומד את השאלות הבאות:

1. האם הבעיה ייחודית?
2. האם נתקלתי בבעיות דומות?
3. האם אפשר לבנות סכימה לפתרון הבעיה על סמך הניסיון של העבר?

ז. ניפוי הרעיונות

לאחר העלאת הרעיונות השונים לפתרון הבעיה, יש לבדוק כל אחד מהם, אם הוא באמת עוזר לנו לפתור את הבעיה. יש לנפות ולהשאיר רעיונות רלוונטיים בלבד.

ח. בניית מודל מתמטי

"לפתור בעיה פירושו למצוא סדרה של צעדים, החל מהמצב הנתון (בבעיה) עד למטרה המיוחלת, כך שכל צעד מתקבל מקודמו על-ידי פעולה לוגית (המותרת בעולם הבעיה הנתונה)." (ארבל, 1990).

בשלב הזה ישאל הלומד את השאלות הבאות:

1. מה אעשה בשלב הראשון כדי לפתור את הבעיה?
2. האם אני יודע כיצד לפתור את הבעיה ולבנות מודל מתמטי מתאים?
3. באיזה מודל מתמטי אשתמש לפתרון הבעיה?

באמצעות פעולה אינטראקטיבית של הפעילויות הבאות: הגדרת הבעיה והבנת הסיטואציה שלה, בניית מודל מתמטי של היסודות המתמטיים הרלוונטיים בבעיה, הבנת היחסים והתנאים הכרוכים בבעיה ושימוש במודל המתמטי, תיבנה על-ידי הלומד סכימה חדשה המציגה את מערכת הקשרים שבין הידע הקודם לבין הסכמות של הטקסט המתמטי.

ט. מציאת הפתרון

לאחר שמצאנו את המודל המתמטי, יש לפתור אותו ולהגיע אל הפתרון המיוחל. חשוב לבדוק האם זהו הפתרון היחיד, ייתכן ויש יותר מפתרון אחד, על כן יש למצוא את כל הפתרונות האפשריים לבעיה.

בשלב הזה ישאל הלומד את השאלות הבאות:
1. האם זהו הפתרון היחיד?
2. מהם כל הפתרונות האפשריים לבעיה?

י. בקרה

יש לבדוק אם פתרון הבעיה אכן מתאים לבעיה עצמה. כלומר, יש לחזור אל הבעיה המקורית, לקרוא אותה שוב ולבדוק:
1. האם הפתרון הוא הגיוני?
2. האם הפתרון מתאים לסיטואציה הלשונית?
3. האם הפתרון מתאים לסיטואציה המתמטית?
4. האם המודל המתמטי שבו השתמשתי התאים לבעיה?

שלב זה הוא חשוב ביותר, כי פעמים רבות נראה לנו שמצאנו את הפתרון, אך הפתרון אינו הגיוני (לדוגמה: קיבלנו 2.2 אנשים), ואז צריך לחזור על כל התהליך מחדש. כדאי לבחון את הפתרון ולבדוק את כל המהלכים שהובילו מהנתונים אל הפתרון.

5. חשיבות הצגת המודל

כדי לחנך לאוריינות מתמטית יש להעניק תשומת לב לא רק לתהליכים האינטואיטיביים, אלא גם לתהליכים הקוגניטיביים והמטא-קוגניטיביים. אלה ניתנים לשיפור באמצעות תרגול וארגון מחדש (למשל: Feuerstein & Others 1986; Sternberg, 1985) , ובאמצעות פיתוח אסטרטגיות של חשיבה כללית (למשל: Polya,1954)) ביניהן אסטרטגיות המארגנות תהליכים ומיומנויות המבטיחות את ביצוען השוטף. פיתוח אסטרטגיות חשיבה יאפשר ל"רסן" את התהליך האינטואיטיבי[2] של מיקוד המאמץ במציאת פתרונות "אוטומטיים", וידריך לחשוב על פתרונות אפשריים לפני שיורדים לעומקה של הבעיה. נטייה זו לחשוב על פתרונות "אוטומטיים" מהווה פעמים רבות מלכודת. הפתרונות העולים על הדעת משקפים הנחות סמויות המביאות להבנה לא נכונה של הבעיה וכתוצאה מכך לטעויות, ומוציאים מכלל אפשרות פתרונות אחרים, טובים יותר(Perkins, 1986).

ניסינו להראות כיצד ניתן לגשר על הפערים בין השפה הטבעית לבין השפה המתמטית בפתרון בעיות במתמטיקה באמצעות מודל, שבאמצעותו הנמען מעבד את הטקסט עיבוד קוגניטיבי כדי שיוכל להפיק ממנו את המשמעות הטמונה בו. תהליך עיבוד הטקסט המתמטי הוא רב-שלבי, והוא מחייב ביצוע מספר פעולות קוגניטיביות: פיענוח סמלים גרפיים, הבנת התוכן הגלוי, הבנת הסיטואציה הלשונית, המרה למודל מתמטי והתאמה בין הסיטואציה הלשונית והמודל המתמטי המתאים.

אנו ממליצות לרתום את השפה המתמטית לשפה הטבעית, להימנע מבעיות שאינן מתאימות למציאות, להימנע ממבעים דו-משמעיים, להסביר לתלמיד את ההבדלים בין השפה הטבעית למתמטית ואת אפשרות השילוב ביניהן.

תהליך יצירת המשמעות לפי המודל המוצע הוא תהליך של יצירת "עולם טקסט" הנסמך על הסכמות של הנמען. הוא נוצר באמצעות פעולה אינטראקטיבית מחזורית של המערכות הבאות: תכנון, גיוס סכמות, ניסוח, עריכה ושחבור. המשמעות אינה קבועה, אלא משתנה בתהליך יצירתה.
הצגת המודל בפני התלמיד חשובה ביותר להבנת העובדה, שהקונטקסט התרבותי והסוציולוגי חודרים לכיתה במתמטיקה, ושיש להתחשב בהם. ניתוח הקונטקסט התרבותי והסוציולוגי, כלומר, ניתוח "המציאות" של הטקסט, מאפשר לתלמיד להבין את ההיגיון של הבעיה, ובאמצעות הבנת ההיגיון של הבעיה ניתן יהיה לפתח נטייה מתמטית אצל ילדים.

---

[2] פישביין (Fischbein, 1987) המתאר בספרו שלושה סוגים של אינטואיציות, מתייחס אל אינטואיציות שניוניות כאל אינטואיציות המתהוות כתוצאה מתהליך הוראה סיסטמתי. אלו אמיתות הנלמדות והנרכשות על בסיס שיקולים מחשבתיים בהסתמכות על נתונים מסוימים, ולאחר שמשתמשים בהן זמן רב הן נעשות מובנות מאליהן. כלומר האימון והתרגול יכולים לשפר את האינטואיציות המקדימות והאמונתיות ולהפוך אותן לאינטואיציות שניוניות. פיתוח יכולת של פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה מחייב אפוא אימון ותרגול רב.

המודל שאנו מציעות מתאים הן לתלמידים בכיתות הגבוהות של בית הספר היסודי, הן לתלמידים בחטיבת הביניים ובחטיבה העליונה והן לסטודנטים המוכשרים להוראה. בבית הספר היסודי רוב הבעיות המזומנות לתלמידים ניתנות לפתרון נומרי בעל משמעות במציאות, ולכן חשוב להבין בהן את הסיטואציה הלשונית. בהמשך לימודיהם בחטיבת הביניים ובחטיבה העליונה יתמודדו התלמידים עם בעיות שאינן ניתנות לפתרון נומרי דווקא, וחייבים להשתמש באלגברה, כדי לפתור אותן.

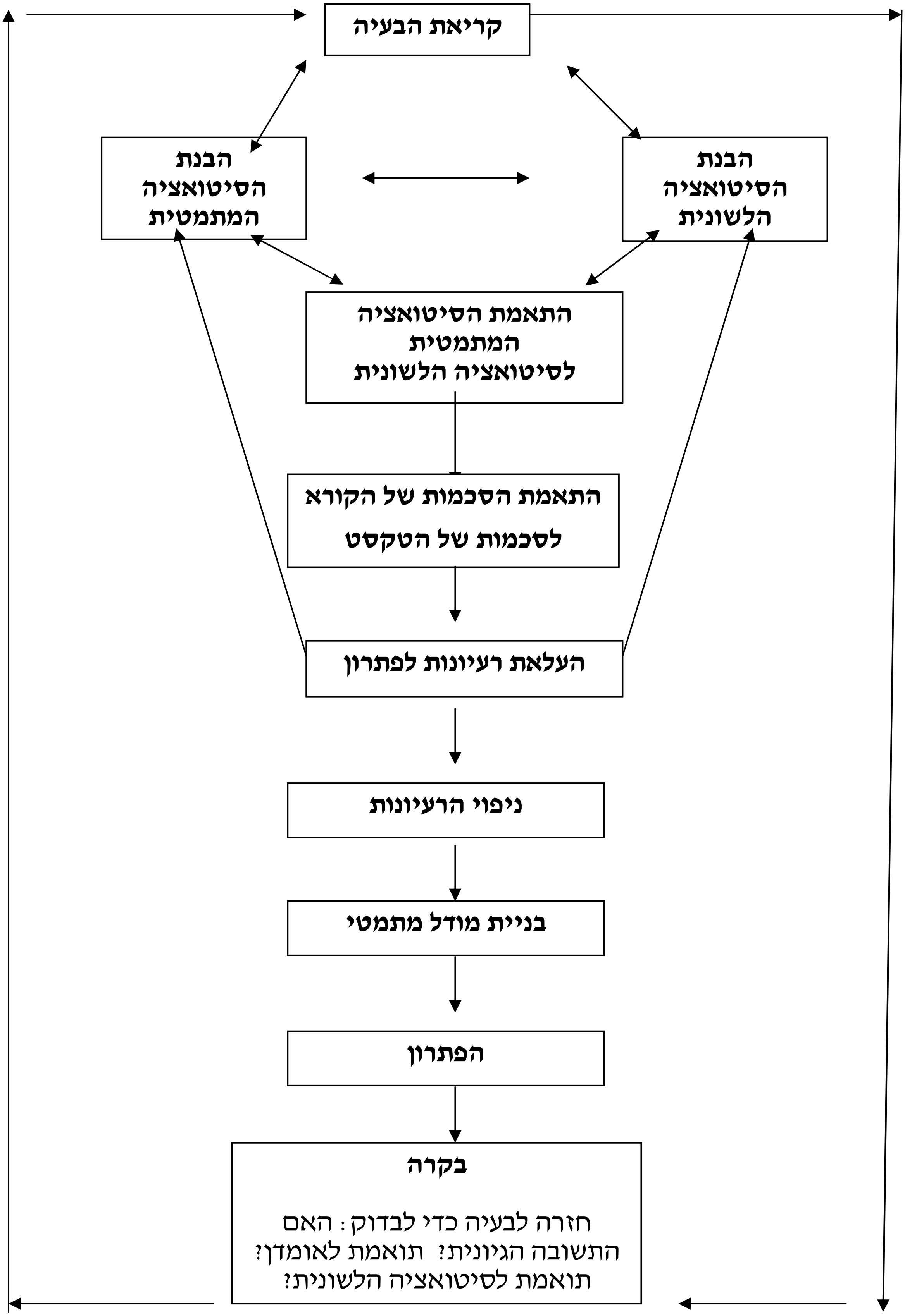
עבודה הדרגתית על דרכי פתרון בעיות מילוליות בעזרת סכמות מובנות כבר מהלימוד של הבעיות המילוליות הפשוטות, תאפשר לתלמיד להתמודד גם עם בעיות מורכבות יותר.

השימוש במודל יעזור גם להכשרתם של סטודנטים להוראה, הן בתהליך ההכשרה שלהם והן בהתנסות שלהם בהוראה. הבנת המודל תאפשר למורה המתחיל להבין שהמודעות המטא-לשונית, ובמיוחד המודעות התחבירית והמודעות לסמלים, הכרחית לפתרון בעיות במתמטיקה. זאת ועוד, דרך ניסוח הבעיה והתאמתה למציאות יכולה להשפיע באופן משמעותי על יכולת התלמידים לפתור את הבעיה - למשל, הוספת מילת מפתח הרומזת על האסטרטגיה המתאימה לפתרון, או אם הסיפור שבבעיה מכיל סיטואציה או פעולה המוכרת לילד.

להלן סקיצה של המודל המופיעה בשקף: "תרשים המודל לפתרון בעיה מילולית במתמטיקה".

שקף

תרשים המודל לפתרון בעיה מילולית במתמטיקה



ג. מהלך הפעילות

1. המורים יפתרו את דף הפעילות ***"מה הבעיה בבעיה?"***, שבו מופיעות בעיות שונות שההתייחסות אליהן היא בסעיף 3.
2. מתוך תשובות המורים המשתלמים, בדיון במליאה, ניתן לצאת לאסטרטגיות השונות לפתרון הבעיות תוך כדי גישור בין השפה הטבעית לשפת המתמטיקה.
3. המודל יוצג בעזרת השקף "תרשים המודל לפתרון בעיה מילולית במתמטיקה".
4. ייערך דיון בשימוש במודל בהוראה עם תלמידים.

דף למשתלמים

מה הבעיה בבעיה?

הציעו פתרונות שונים לבעיות הבאות:

1. **מרקו ביקש מאמו שחברו יצטרף אליהם לארוחת ערב. אמו הסכימה אבל אמרה שיש לה רק חמישה המבורגרים ויש כרגע 6 אנשים לארוחה.**
   איך הייתם מחלקים את חמשת ההמבורגרים בין 6 אנשים?

2. **אוטובוס צבאי מכיל 36 חיילים. 1,128 חיילים היו צריכים אוטובוסים כדי להגיע לאימון. לכמה אוטובוסים הם נזקקו?**

3. **חמישה כלבים שומרים על 125 כבשים. בן כמה השומר?**

4. **כתבו משוואה בעזרת המשתנים S ו- P שתייצג את הטענה הבאה: "באוניברסיטה זו גדול מספר הסטודנטים פי 6 ממספר הפרופסורים". השתמשו ב- S לסימון מספר הסטודנטים וב- P לסימון מספר הפרופסורים.**

5. **כתבו משוואה בעזרת המשתנה X שתייצג את הטענה הבאה: "במכללה זו רבע של מספר הסטודנטים שהוקטן ב- 5 הם הסטודנטים למתמטיקה".**

ביבליוגרפיה

ארבל, ב' (1990). **אסטרטגיות לפתרון בעיות**. אוניברסיטת תל-אביב, האוניברסיטה הפתוחה.

בלודי-וינר, ח' (1998). **בעיות בהבנת השפה האלגברית אצל תלמידי מכינה אוניברסיטאית**. חיבור לשם קבלת "דוקטור לפילוסופיה". האוניברסיטה העברית ירושלים.

בלום-קולקה, ש', ניר, ר' (1981). מבנה המבע של ידיעה בעיתון יומי: ניתוח השיח. **הספרות**, 30-31, 69-58.

ברגמיני והעורכים של לייף, (1970). **מתמטיקה**. הספרייה המדעית life. טיים לייף, אינטרנציונל: הולנד.

לנדאו, ר' (תשמ"ג). בין חקר השיח לחקר הסגנון. **בלשנות עברית חפ"שית**, 20, 77-61.

ניר, ר' (1984). **לשון מדיום ומסר**. ירושלים: פוזנר ובניו.

ניר, ר' (1989). **סמנטיקה עברית משמעות ותקשורת, יחידה 8**. תל-אביב: האוניברסיטה הפתוחה.

נשר, פ' (1976). שלושה מרכיבי קושי של שאלה מילוליות במתמטיקה. **עיונים בחינוך: כתב עת לעיון ולמחקר בחינוך**, 10. בית ספר לחינוך, אוניברסיטת חיפה.

נשר, פ' (1983). תהליכים קוגניטיביים הקשורים בפתרון בעיות מילוליות באריתמטיקה. בתוך: מ', ניסן וא', לסט [עורכים], **בין חינוך לפסיכולוגיה** (עמ' 407-425)**.** ירושלים: הוצאת מאגנס - האוניברסיטה העברית.

פוליה, ג' (1961). **כיצד פותרין?** תל-אביב: אוצר המורה. (תרגום מאנגלית, ראה מקור באנגלית, 1954).

פולמן, ש' (2000). **הפקת משמעות מטקסט: היבטים הכרתיים-תקשורתיים של ניתוח השיח**. תל-אביב: אוניברסיטת תל-אביב.

רבין, ח' (תשמ"ב). מבוא - חקר השיח. בתוך: ש', בלום-קולקה, י', טובין ור' ניר [עורכים], **עיונים בחקר השיח** (עמ' 1-15). ירושלים: אקדמון.

שראל, צ' (1991). **מבוא לניתוח השיח**. תל-אביב: אור-עם.

תירוש, ד', ברש, א', צמיר, פ' וקליין, ר' (2000). **היבטים פסיכולוגיים בהוראת המתמטיקה**. תל-אביב: מכון מופ"ת.

Anderson, J.A.(1980).*Cognitive Psychology and its Implications*. San Francisco: W. H. Freeman and Company.

Baruk, S. (1989). *Wie alt ist Kapitan? (How Old Is the Capitan? About the Error in Mathematics)*. Basel: Birkhauser.

Brown, G., & Yule, G. (1983). *Discourse Analysis*. Cambridge University Press.

Clement, J. (1982). Algebra Word Problem Solution: Thought Processes Underlying a Common Misconception. *Journal for Research in Mathematics Education*, *13*(1), 16-30.

Dijk Van, T.A. (1980). *Macrostructures: An Interdisciplinary Study of Global Structures in Discourse*. New-Jersy: Erlbaum.

Dijk Van, T.A. (1981). *Studies in the Pragmatics of Discourse*. The Netherlands: Mouton.

Eugene, G. J. (1998). *Linking the National Assessment of Educational Progress (NAEP) and The Third International Mathematics and Science Study (TIMSS): A Technical Report*, (pp.98-499). U.S. Department of Education Office of Educational Research and Improvement NCES.

Feuerstein, R., Hoffman, M.B., Rand, Y., Jensen, M.R., Tzuriel, D., & Hoffman, D.B. (1986). Learning to learn: Mediated learning experiences and instrumental enrichment. *Journal for Special Services in Schools*, *3*(1-2), 49-82.

Freudenthal, H. (1991). *Revising Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach*. Dordrecht, Holland: Reidel Pub.

Gee, J.P.(1996). Discourse Analysis: Status, Solidarity and Social Identity. In: J.P. Gee (Ed.), *Social Linguistics and Literacy: Ideology in Discourse*, (pp. 90-112). Bristol, PA: Taylor & Francis.

Greer, B. (1997). Modeling Reality in the Mathematics Classroom: The Case of Word Problems. *Learning and Instruction*, 7, 293-307.

Gravermeijer, K. (1997). Solving word problems: A case of modeling? *Learning and Instruction*, *7*(4), 389-397.

Halliday, M.A.K., & Hassan, R. (1976). *Cohesion in English*. London: Longman.

Hershkovitz, S., & Nesher, P. (1996). The Role of Schemes in Designing Computerized Environments. *Educational Studies in Mathematics*, *30*, 339-366.

Hershkovitz, S., & Nesher, P. (2003). The Role of Schemes in Solving Word Problems. *The Mathematics Educator,* 7(2), 1-24.

Hiebert, J., & Carpenter, T.P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. In: D.A. Grouns (Ed.), *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp.65-92). New York: Mcmillan.

Kane, R.B. (1970). The Readability of Mathematics Textbooks Revisited. *The Mathematics Teacher*, *63*, 579-581.

Kaput, J. J., & Clement, J. (1979). Letter to the editor of JCMB. *Journal of Children's Mathematical Behavior, 2*, 208.

Kintsch, W. (1986). Learning from text. *Cognitive and Instruction*, *3*(2), 87-108.

Lester, F.K. (1978). Mathematical Problem Solving in the Elementary School: Some Educational and Psychological Considerations. In: L. L. Hatfield, & D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical Problem Solving: Papers from a research workshop*. Columbus, Ohio: ERIC/SMET (ERIC Document Reproduction Service No. ED156446).

MacGregor, M., & Price E. (1999). An Exploration of Aspects of Language Proficiency and Algebra Learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(4), 449-467.

Nesher, P., Greeno J.G., & Riley, M.S. (1982). The Development of Semantic Categories for Addition and Subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, *13*, 373-394.

Nesher, P., & Katriel, T. (1977). A Semantic Analysis of addition and Subtraction word problem in arithmetic. *Educational Studies in Mathematics*, *8*, 251-269.

Nesher, P. (1988). Multiplicative School Word Problems: Theoretical Approaches and Empirical Findings. In: J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades,* (pp. 19-41). NJ: Lawrence Erlbaum Association.

Piaget, J. (1980). *Experiments in Contradiction*. Chicago and London: University of Chicago Press.

Perkins, D. (1986). Thinking Frames. *Educational Leadership,* (May), 4-10.

Polya, G. (1954). *How to Solve it?* Princeton University Press.

Reusser, K., & Stebler,R. (1997). Every word problem has a - solution - the social rationallity of mathematical modeling in school. *Learning and Instruction*, *7*, 309-327.

Rosnick, P. (1981). Some Misconceptions Concerning the Concept of Variable. Are You Careful about Defining your Variables? *Mathematics Teacher*, *74*(6), 418-420, continue p. 450.

Schoennfeld, A. H. (1980). Teaching Problem-Solving Skills. *American Mathematical Monthly*, *87*, 794-805.

Silver, E. A., Shapiro, L. J., & Deutsch, A. (1993). Sense Making and the Solution of Division Problems Involving Remainders: An Examination of Middle School Student's Solution Processes and their Interpretation of Solution. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*, 117-135.

Sternberg, R. J. (1985). *Beyond IQ*. New York: Cambridge University Press.

Widdowson, H.G. (1979). Rules and Procedures in Discourse Analysis. In: H. Widdowson (Ed.), *Explorations in Applied Linguistics* (pp.141-149). Oxford: University Press.