

פעילות "הפירמידה"

רונית בסן צינצינטוס, ד"ר רונית קליין, מלכה שפט - מכללת סמינר הקיבוצים

תחום תוכן מתמטי (בהתאמה לסילבוס) - **הכללות ו"הוכחות" אלגבריות לכל הנושאים**

הנושא - המספרים הטבעיים.

רשימת מושגים מתמטיים הנלמדים בפעילות - קבוצת המספרים הטבעיים, אקסיומות פיאנו, מספרים עוקבים, סדרות, פעולות חשבון, הכללות והצדקות.

רשימת רעיונות מתודיים - משימת חקר, תיעוד בכתב, שיח מתמטי, מגוון אסטרטגיות, רפלקציה, שימוש באמצעי המחשה, התאמת הפעילות לכיתות שונות.

זמן משוער - ארבעה מפגשים בני שעה וחצי.

מטרות המפגש - הצגת הנושא המתמטי בדרך של חקר, התנסות ברמת לומד מבוגר, התאמת הפעילות לרמות תלמידים שונות.

חומרי עזר - דף עבודה, שקף למורה, שקפים ריקים, טושים לשקפים, דיסקיות.

מבוא - בפעילות זו מוצגת משימה מתמטית המהווה אתגר למורים. בתהליך הפתרון של המשימה באים לידי ביטוי היבטים שונים התורמים לפיתוח הידע המתמטי. תהליך העבודה על המשימה הינו דגם המדגיש אלמנטים דידיקטיים. רפלקציה על מהלך הפעילות מעשירה את הידע הפדגוגי תכני הדרוש למורה מקצועי למתמטיקה.

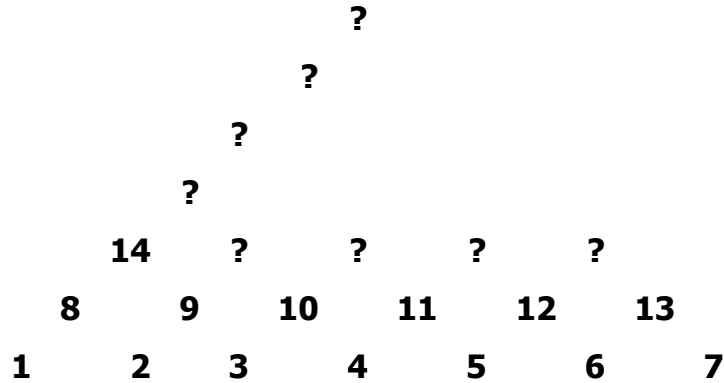
הערה: השימוש במילה "פירמידה" נעשה כאזכור לצורת הפירמידה למרות שהפעילות עוסקת במשולשי מספרים.

מהלך הפעילות

1. דף עבודה "הפירמידה" (עבודה בקבוצות).
2. בכל קבוצה, תיעוד אחד הפתרונות של המשתלמים על שקף.
3. דיווח הפתרונות עם התמקדות בסעיפים א-ג בדף העבודה (הצגת השקפים של תשובות המשתלמים).
4. דיון "מהו תיעוד טוב" ומהן מטרותיו.
5. הרחבה מתמטית: קבוצת המספרים הטבעיים, הצגת אקסיומות פיאנו.
6. דיון במאפיינים של פעילות חקר.
7. רפלקציה על מהלך הפעילות עד כה, לאור מאפייני פעילות חקר.
8. התאמת המשימה לכיתות שונות (חלוקה לקבוצות עבודה על-פי הכיתות אותן מלמדים המורים).
9. משימת המשך הפעילות (העברת הפעילות המותאמת בכיתות המורים).
10. הצגת תיעוד פתרונות של תלמידי המורים.
11. דיון בפתרונות שגויים של התלמידים.
12. דיון בהכללות והצדקות, התמקדות בסעיפים ד,ה.
13. סדרות שונות, העמקה וביסוס ידע מתמטי.
14. הרחבות ל"פירמידות" נוספות, התמקדות בסעיף ו.

דף עבודה "הפירמידה"

א. לפניך "פירמידה" של מספרים.



– איזה מספר יופיע בראש הפירמידה?

– כמה קומות יהיו לפירמידה?

ב. נתונה פירמידה אשר בבסיסה המספרים 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

– איזה מספר יופיע בראש הפירמידה?

– כמה קומות יהיו לפירמידה?

– נסו לפתור בשתי דרכים שונות.

– תעדו אחד הפתרונות, כרצונכם.

ג. האם תוכלו לדעת איזה מספר יופיע בראש הפירמידה אשר בבסיסה המספרים

9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 ? כמה קומות לפירמידה זו?

ד. האם תוכלו לדעת איזה מספר יופיע בראש הפירמידה אשר בבסיסה n מספרים :

$n \dots 3, 2, 1$? כמה קומות לפירמידה זו?

ה. מי מהמספרים הבאים יכול לעמוד בראש הפירמידה : 28 ? 32 ? 40 ? 30 ? 56 ? 91 ?

הסבירו מדוע.

מה מאפיין מספר היכול לעמוד בראש הפירמידה? הסבירו.

ו. חברו פירמידה משלכם.

פירוט מהלך הפעילות

1. פתרון המשימה

א. בראש הפירמידה יופיע המספר 28. דרך אפשרית: רישום כל המספרים העוקבים, תוך הקפדה על שמירת מספר האיברים בכל שורה בפירמידה.
לפירמידה 7 קומות.

ב. המספר שבראש הפירמידה הוא סכום המספרים בבסיס. בשורת הבסיס n איברים, בשורה השנייה $n-1$ איברים, בשלישית $n-2$ איברים וכו', בשורה הלפני אחרונה יש 2 איברים ובשורה העליונה יש איבר אחד בלבד.

$$\text{אם } n = 8 \text{ מספר האיברים הוא: } 1+2+\dots+7+8 = 36$$

מספר הקומות הוא 8.

4. תיעוד "טוב" מתאר באופן ברור את הפתרון תוך שימוש נכון בביטויים מתמטיים, לשוניים ופורמליים. מעלה הנמקות, הסברים והצדקות מתמטיות.
זוהי פעילות מטה קוגניטיבית המעלה למודעות תהליכי חשיבה.

5. האקסיומות של פאנו

א. קבוצת המספרים הטבעיים, שנקרא לה N , היא קבוצה אשר לכל איבר x שבה, יש בה איבר יחיד, שנשמנו x' , הנקרא העוקב של x .

ב. לאיברים שונים של N יש עוקבים שונים.

$$\text{בסימנים: אם } x, y \in N \text{ ואם } x \neq y \text{ אז } x' \neq y'$$

ג. בקבוצה N קיים איבר יחיד שאינו עוקב של אף איבר ב- N . מסמנים איבר זה ב- 1.

$$\text{בסימנים: קיים } 1 \in N \text{ כך שלכל } x \in N \text{ } 1 \neq x'$$

ד. כל קבוצה חלקית של N , המכילה את 1 והמכילה יחד עם כל איבר בה, גם את העוקב של האיבר, היא בהכרח N עצמה.

בסימנים: אם $A \subseteq N$ ואם A מקיימת את:

$$1 \in A$$

$$2. \text{ אם } x \in A \text{ וגם } x' \in A$$

$$\text{אז } A = N$$

שקף

עבודה כהמשך לפעילות הפירמידה

1. התאימו את הפעילות לרמת הכיתה שלכם.
2. העבירו את הפעילות בכיתתכם ודווחו:
 - א. מהן אסטרטגיות העבודה של התלמידים?
 - ב. הביאו 3 פתרונות נכונים.
 - ג. הביאו 3 פתרונות שגויים.
 - ד. הביאו את דרכי התייעוד של התלמידים.
 - ה. אילו היבטים מתכנית הלימודים החדשה באים לידי ביטוי בפעילות זו?
 - ו. האם הפעילות זימנה נושאים מתמטיים נוספים?

**ניתן ורצוי לצרף עבודות תלמידים
בנוסף לדיווח שלכם.**

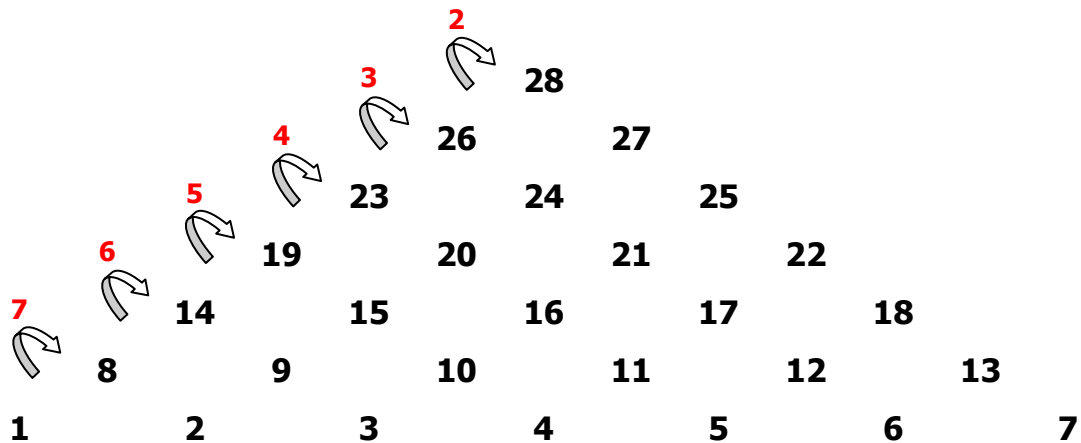
10, 11. הצגה ודיון בפתרונות תלמידים שהוצגו על-ידי מורים שונים.

12. המשך פתרון דף העבודה "הפירמידה":

ד. באופן כללי, מספר האיברים הוא : $1+2+\dots+(n-2)+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}$ (סכום סדרה

חשבונית).

גם אם נסתכל על המספר השמאלי ביותר (או המספר הימני ביותר) בכל שורה, ניתן לראות כי סדרת ההפרשים הנוצרת בין המספרים הקיצוניים בשורות היא שורת הבסיס.



ה. המספר העומד בראש הפירמידה מקיים את נוסחת גאוס $\frac{n(n+1)}{2}$ ולכן הוא שווה למחצית מכפלת

מספר כלשהוא במספר העוקב לו. במילים אחרות, אם קיים מספר כך שמכפלתו במספר העוקב לו שווה למספר נתון, המספר הנתון יכול לעמוד בראש הפירמידה.

למשל: $\frac{7 \cdot 8}{2} = 28$, $\frac{8 \cdot 9}{2} = 36$ ולכן 28 ו-36 יכולים לעמוד בראש הפירמידה, ואילו 32 אינו יכול לעמוד

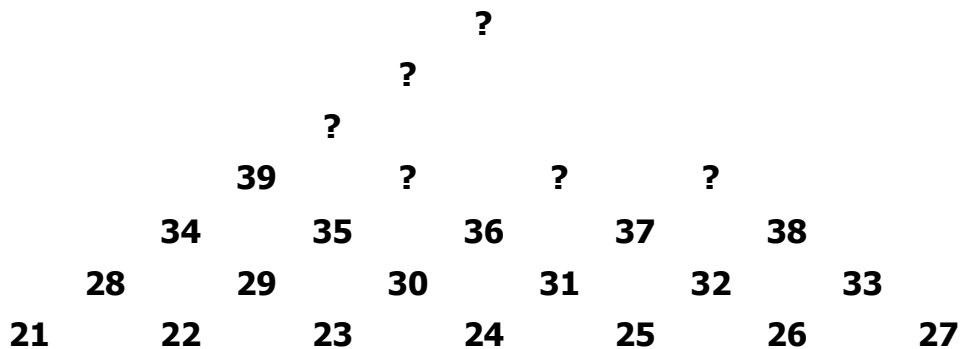
בראשה. באותו אופן, 30, 40, 56 אינם יכולים לעמוד בראש הפירמידה אך 91 יכול ($\frac{13 \cdot 14}{2} = 91$).

13. סדרות

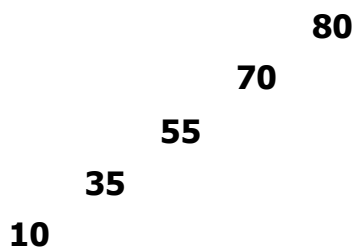
הרחבה נושא הסדרה החשבונית: סימון אלגברי של האיבר ה- n, סכום סדרה חשבונית.

14. פירמידה - הכללות

א. "מה היה קורה אם היינו מתחילים במספר 21 ולא ב- 1?"
 לדוגמה:



ב. השלם את הפירמידה הבאה:



ביבליוגרפיה לפעילות

ארצי, א', ליבוביץ, ד', דכטר, ר', טאומן, י', ויעקבי, ד' (1976). **אשנב למתמטיקה**. יחידות 1-12, תל אביב: האוניברסיטה הפתוחה.

אתר פיאנו: <http://www.thoralf.uwaterloo.ca/htdocs/scav/peano/peano.html>

ביבליוגרפיה נוספת

אילני, ב', אלמוג נ' (2000). המספרים הטבעיים. **מספר חזק**, 19. בית ברל.