2.1 מהי חבורה למדריך

- הכרות עם המושג "חבורה".
- יצירת קשרים בין תכונות מוכרות של קבוצות המספרים הטבעיים וקבוצות אחרות.
- הכרות עם חשבון מודולרי.
- הרחבת המושג פעולת חשבון.
- הרחבה והעמקה של הבנת תכונות היסוד של פעולות חשבון.

דפי פעילות לתלמיד (5 עמודים).

שני שיעורים.

1. פעולות חיבור וחיסור בשעון (שאלות 1–7).
2. הגדרות המושגים הנכללים בתכונות של חבורה כמו סגירות, ואיבר נייטרלי (שאלות 8–16).
3. על סגירות (שאלות 17–21).

1. פעולות חיבור וחיסור בשעון (שאלות 1–7)

קוראים את הסיפור, ועונים על השאלות 1–7.

הפעילות מזמנת אפשרות להכיר פעולה לא סטנדרטית, אבל כזו שיש לה קשר לחיי יום-יום, כי מצב שבו צריך לחבר שעות הוא מצב שכיח. נשאלות שאלות חישוב ישירות, שנעשות על-ידי ספירה או חישוב רגיל או חיבור והפחתה של 12. כמו כן נשאלות שאלות הפוכות, הדורשות השלמה לחיבור, שאינו חיסור רגיל. בודקים תכונת החילופיות של הפעולה, ומגדירים פעולה הפוכה לחיבור בשעון.

נקודות אפשריות להתייחסות בדיון

- דנים על המשמעות של פעולה בינארית (משני איברים מתקבל איבר שלישי יחיד על-ידי פעולה מסויימת).

במקרה שלנו איברי הקבוצה הם מספרים, אבל אינם חייבים להיות כאלה. על השעון אפשר לרשום אותיות a, b, c, ... ליד השנתות, ולקבל אות כתוצאה מן הפעולה בין שתי האותיות.
מבקשים מן המשתלמים לתת דוגמאות נוספות של פעולות בינאריות, רצוי לא שגרתיות.

- דיון בתופעות כלליות שהתגלו בחישובים הפרטיים.

מתייחסים לתופעות כמו:

- תפקיד המספר 12 בחיבור בשעון.
- אם התשובה לתרגיל b= ___ ⊕ a היא c ,

אז התשובה לתרגיל a= ___ ⊕ b היא 12 – c

- דיון ברעיון של עיסוק בשאלות הפוכות במתמטיקה.

היכולת לפתור שאלות כאלה, מראה כי הכיוון הישר "יושב טוב". במקרה שלנו, השאלות ההפוכות מוליכות אל החיסור, שהיא הפעולה הבאה המטופלת בדף זה. מבקשים מן המשתלמים לתת רעיונות מנושאים אחרים שבהם אפשר לעסוק בשאלות הפוכות.

- דיון בתכונות ההגדרה.

מתייחסים לכך שהגדרה היא שרירותית מצד אחד, אבל רצוי שתתאים להגדרות הקודמות מצד שני. כדי שחיסור בשעון יתאים למושג חיסור רגיל, הוא צריך להיות פעולה הפוכה לחיבור.

בכיתות הניסוי חלק מן המשתלמים הגדירו את החיסור באותו אופן שמוגדר החיבור במסגרת, רק שינו את כיוון הסיבוב של המחוג ל-נגד כיוון השעון.

- דיון בסיבה לכך שהחיבור בשעון הוא פעולה חילופית.

בכיתות הניסוי חלק מהמשתלמים חישבו חלק מתרגילי החיבור על-ידי ספירת רווחים בשעון, וחלקם על-ידי השלמה ל- 12.

החילוף בחיבור רגיל הוא אינטואיטיבי למשתלמים, ולכן לא תמיד מובן להם מדוע לדבר על חילוף אם הוא ברור מאליו. בפעולת החיבור בשעון המשתלמים קרובים קצת יותר למצב שבו נמצאים תלמידי כיתה א כאשר הם לומדים חיבור רגיל. כאשר סופרים רווחים על השעון, יש הבדל בין התרגיל 5 + 8 לבין התרגיל 8 + 5. לכן יש טעם לדבר על תכונת החילוף כחוק. ספירת תחנות שונה עבור המשתלמים מחיבור רגיל של מספרים, במיוחד במקרים בהם התוצאה קטנה מאחד המחוברים.

2. הגדרות המושגים הקשורים לחבורה – כמו סגירות, ואיבר נייטרלי (שאלות 8–16)

עובדים על שאלות 8–16. הגדרת המושג "חבורה" באה בסוף, לאחר שלבי ביניים, שבהם מתייחסים למושגים הבונים את ההגדרה, כל מושג בנפרד. חלק מן המושגים אינם מוכרים למשתלמים. בודקים את הבנת כל אחד מן המושגים המוגדרים על-ידי בקשה ליישום המושג בתחום המוכר למשתלמים. חשוב להדגיש כי המושג חבורה כולל **קבוצה** (אצלנו קבוצת מספרים) **עם פעולה** המקיימת מספר תנאים.

נקודות אפשריות להתייחסות בדיון

- דיון ברעיון של המבנה – חבורה

היכולת ללמוד ממבנה אחד על מבנה דומה לו.

אוואריסט גלואה (1811-1832) מתמטיקאי צרפתי, המציא את תורת החבורות כאשר היה בן 20 בסה"כ, ונהרג שנה לאחר מכן בדו-קרב, עקב הסתבכות בפרשת אהבה. גלואה הוכיח שלא יכולה להיות דרך שיטתית כדי לפתור משוואה מהמעלה החמישית. לצורך ההוכחה הוא המציא את מושג החבורה, ופיתח את תורת החבורות. המשפטים של תורת החבורות, חלים על כל החבורות, ולכן הם חלים גם על חבורות המספרים שאנו עוסקים בהן.

- דיון על דרך הלימוד שהודגמה בשאלות 8–16

מטרת התרגילים הייתה הגדרת המושג חבורה. אפשר להתחיל עם ההגדרה של חבורה ולכלול בתוכה את כל המושגים. המהלך פה היה שונה. המושגים הוגדרו מראש, כל אחד בנפרד, ורק לבסוף נאספו להגדרה אחת. גם להגדרת כל מושג היה רצף קבוע.

תרגילים פרטיים להבנת המושג ← הגדרת המושג ← יישום ההגדרה- בדיקת המושג באופן כללי בקבוצת המספרים הטבעיים ובקבוצת המספרים על השעון עם הפעולות שהוגדרו.

דנים בשאלה האם טוב שההגדרה תבוא בפתיחה או בסיום, או שזה תלוי במצב.

בודקים לגבי הדוגמאות להגדרות שניתנו, אם הן ניתנות כפתיחה או כסיום של תהליך.

- דיון בשאלה: האם ניתן להוכיח טענה על סמך דוגמאות?

בהקשר של שאלה 14 שבה נבחרו שלושת המספרים כך שסדר הפעולות לא ישנה את התוצאה. האיבר השלישי בין שלושת המספרים הוא האיבר הנייטרלי, לכן, בעצם, התוצאה תלויה בשני המספרים הראשונים בלבד. מתייחסים לכך שדוגמה אחת עדיין אינה קובעת כלל, ואם רוצים להוכיח שחוק הקיבוץ קיים יש לתת נימוק כללי, או להראות את קיומו בכל המקרים הפרטיים. לעומת זאת מספיקה דוגמה נגדית אחת כדי להפריך טענה.

- דנים בהשוואה בין הפעולות ⊕ ו- Θ לפעולות "+" ו- "–" בקבוצת המספרים השלמים

לפעולה ⊕ בקבוצת המספרים על השעון, ולפעולה "+" בקבוצת השלמים, יש תכונות משותפות: סגירות, חילוף, איבר נייטרלי, איבר הופכי לכל איבר, וקיום חוק הקיבוץ. לכן שתי הקבוצות מהוות חבורה כל אחת לגבי הפעולה שלה.

גם לפעולה Θ בקבוצת המספרים על השעון, ולפעולה "–" בקבוצת השלמים יש תכונות משותפות: סגירות, איבר המקיים את תכונת האיבר הנייטרלי רק כאשר הוא מופיע מימין לסימן הפעולה, איבר הופכי לכל איבר, שתי הפעולות אינן חילופיות, ושתי הפעולות אינן מקיימות את חוק הקיבוץ. לכן שתי הקבוצות אינן מהוות חבורה, כל אחת לגבי הפעולה שלה.

3. על סגירות (שאלות 17–21)

מבין המושגים הנכללים במושג חבורה, רק המושג "סגירות" הוא מושג חדש. כל שאר המושגים באים לידי ביטוי בבית הספר היסודי, גם אם אין קוראים להם בשמותיהם. לכן, מושג זה מטופל באופן מיוחד. למושג הסגירות יש, בכל זאת, השלכה להוראה בבית הספר היסודי, כי שם מורים רבים אומרים כי "5 – 3 אי אפשר". חשוב להבין כי זו אחת הסיבות להרחבת עולם המספרים. ההרחבה של חבורה מתבצעת על-ידי הגדלת קבוצת האיברים והגדרה מחדש של הפעולה, כך שתכונות החבורה יישמרו. התכונה שמונעת מקבוצה עם פעולה להיות חבורה היא פעמים רבות תכונת הסגירות.

נקודות אפשריות להתייחסות בדיון

- דיון בכל פעולה בנפרד

בודקים אילו מספרים עשויים להתקבל על-ידי ביצוע הפעולה בקבוצת הטבעיים. מתייחסים לחיוביים ושליליים, זוגיים ואי-זוגיים, שלמים ושברים, בהתאם לכל סעיף. מתייחסים לפעולה המוגדרת בשאלה 17 סעיף ו, ומבקשים דוגמאות לפעולות אחרות שתוצאתן מספר יחיד.

- בדיקת התשובות לשאלות

אוספים את הדוגמאות הנגדיות שמצאו המשתלמים במקרים שבהם הקבוצה אינה סגורה לגבי פעולה מסוימת, ומחפשים את הסיבה לאי סגירות.

בשאלה 17 סעיף ב הקבוצה אינה סגורה לגבי הפעולה, ואין דרך להוסיף מספר סופי של איברים כדי שתהיה סגורה. כל קבוצת מספרים שנרחיב על-ידי הוספת מספר סופי של איברים, תכיל מספר שהוא הקטן מכל המספרים האחרים בקבוצה. אם נבחר את הפעולה בינו לבין עצמו נקבל מספר קטן ממנו. זה מסביר גם מדוע הקבוצה סגורה לגבי הפעולה שבסעיף א. במקרה זה הקבוצה אינה מכילה מספר שהוא הגדול ביותר, ולכן נוכל תמיד להוסיף 2 ולקבל מספר חדש שנמצא בקבוצה.

בשאלה 17 סעיף ד, הקבוצה אינה סגורה לגבי הפעולה. בחירת ביצוע הפעולה על שני מספרים שווים נותנת 0, ומספר זה אינו שייך לקבוצת הטבעיים. תוספת של 0 לקבוצת הטבעיים תגרום לכך שקבוצה זו תהיה סגורה לגבי הפעולה.

בשאלה 17 סעיף ה הקבוצה אינה סגורה לגבי הפעולה. אם אחד המחוברים זוגי והשני אי-זוגי, הממוצע אינו מספר טבעי. הפעם אפשר לגרוע מספרים מן הקבוצה, ולהשאיר בה רק את הזוגיים או את האי-זוגיים. כל אחת משתי קבוצות אלה תהיה סגורה לגבי הפעולה.

- דיון בתשובה לשאלה 21

כדי שהקבוצה תהיה סגורה לגבי כל שש הפעולות, היא צריכה להיות אינסופית, והיא אינה יכולה להכיל מספר שהוא הקטן ביותר בקבוצה (בגלל הפעולה בסעיף ב), לכן קבוצת הטבעיים אינה מתאימה. נבדוק את קבוצת השלמים. הקבוצה אינה יכולה להכיל מספרים זוגיים ואי-זוגיים ביחד (בגלל הפעולה בסעיף ה), ואינה יכולה להכיל אי-זוגיים בלבד (בגלל הפעולה בסעיף ו) לכן נבחר את השלמים הזוגיים. עתה נבדוק ונגלה שההוספה והגריעה לא גרמו לשינויים שאינם רצויים לגבי שאר הפעולות.