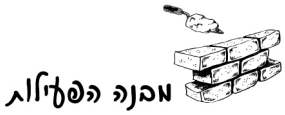
2.3 לוחות פעולה למדריך

- הכרת אפשרויות מגוונות להגדרת פעולות וחקירת תכונותיהן.
- חידוד המושגים הקשורים לתכונות וחוקי פעולות החשבון בעזרת פעולות לא שגרתיות.
- שימוש באלגברה ככלי להוכחה.
- הגדרת פעולות בין איברים שאינם מספרים.

דפי פעילות לתלמיד (3 עמודים).

שני שיעורים.



1. פעולות לא סטנדרטיות המשלבות פעולות חשבון רגילות- אנלוגיה בין חיבור וכפל (שאלות 1–2)
2. שימוש באלגברה להכללה ולהצדקה של פעולות חשבון (שאלות 3–4)
3. פעולות על עצמים שאינם מספרים (שאלה 5)

1. פעולות לא סטנדרטיות המשלבות פעולות חשבון רגילות- אנלוגיה בין חיבור וכפל (שאלות 1–2)

משלימים את הלוח, ולומדים ממנו את קיום חוק החילוף ואיבר מאפס. לומדים מן הפעולה עצמה, על-ידי שיקול או בדרך אלגברית, את קיומו של איבר נייטרלי. אפשר לראות כי 0.1 הוא האיבר הנייטרלי גם מן הלוח שבסעיף ו. חוזרים על התרגיל עם פעולה דומה, אבל בחיבור ולא בכפל.

נקודות אפשריות להתייחסות בדיון

- דנים על חוקים שניתן ללמדם מן הלוח, וחוקים שאינם כאלה.

ניתן ללמוד מן הלוח אם מתקיים חוק החילוף, בתנאי שהמספרים שבשולי הלוח בנויים באופן סימטרי. ניתן ללמוד מן הלוח אם קיימים איבר נייטרלי ואיבר מאפס, בתנאי שאיברים אלו נמצאים בין המספרים שבשולי הלוח. למשל, בתרגיל 1 האיבר הנייטרלי 0.1 לא נמצא בשולי הלוח בסעיף א, אבל כן נמצא בסעיף ו. דנים על כך ששימוש בלוח מאפשר רק לשער, וכדי להוכיח שאכן ההשערה נכונה יש להשתמש בהגדרה האלגברית או המכלילה של הפעולה. למשל, כדי להראות ש- 0.1 הוא אכן איבר נייטרלי, יש להציב 0.1 במקום אחד המספרים בהגדרת הפעולה, או ליצור משוואה:

$$a \Theta b = a$$
$$10ab = a$$
$$10b = 1$$
$$b = 0.1$$

לעומת זאת, אי אפשר ללמוד מן הלוח על קיום חוק הקיבוץ, כי הלוח נותן רק תוצאות הפעולה על שני איברים.

- דנים על האנלוגיה בין הפעולות שבשאלות 1 ו- 2 לחיבור ולכפל רגילים.

שתי הפעולות מקיימות את חוק החילוף כי פעולות חיבור וכפל המרכיבות את הגדרתן מקיימות חוק זה.

לשתי הפעולות יש איבר נייטרלי. האיבר הנייטרלי של הפעולה הראשונה הוא ההופכי ל- 10, ושל הפעולה השנייה הוא הנגדי ל- 10.

לפעולה Θ יש איבר מאפס שהוא 0 (כמו בכפל הרגיל).

לפעולה # אין איבר מאפס (כמו בחיבור הרגיל).

בשתי הפעולות קיים חוק הקיבוץ, הנובע מחוק הקיבוץ ומחוק החילוף בכפל ובחיבור הרגילים.

2. שימוש באלגברה להכללה ולהצדקה של פעולות חשבון (שאלות 3–4)

הפעולה $ בשאלה 3 משלבת חיבור וכפל, ומוגדרת באופן מילולי ובאופן אלגברי. בשאלה זו מתיידדים עם הפעולה בעזרת דוגמאות פשוטות, בעזרת תרגילים הפוכים, שבהם נתון מספר אחד והתוצאה, ויש למצוא את המספר השני, בעזרת שיקולים או פתרון משוואה. לאחר שרואים בעזרת דוגמה נגדית, כי הפעולה אינה חילופית, משערים באילו מקרים שינוי מקום המספרים לא ישנה את התוצאה.

בכיתות הניסוי המשתלמים שיערו שאם המספרים שווים התוצאה לא תשתנה. הם לא מצאו את התנאי הנוסף – סכום המספרים 1, הגורם לתוצאה לא להשתנות. אולם אחרי עבודה על הדוגמאות, שיפרו את השערתם, וזו אכן הייתה מטרת הדוגמאות.

בודקים בעזרת דוגמה ורואים כי חוק הקיבוץ אינו מתקיים עבור הפעולה $.

שאלה 4 היא שאלה הדורשת יצירתיות, ואפשר לעבוד עליה בקבוצות. כל קבוצה תגדיר את הפעולה ולאחר שתעבוד עליה תעביר אותה לקבוצה אחרת.

נקודות אפשריות להתייחסות בדיון

- דנים על השערה

במקרה זה רואים כי אפילו אם מוצאים תנאי לגבי קיום החילוף עבור הפעולה $ (a $ b = b $ a), ההשערה יכולה להיות חלקית. כך למשל, אם משערים כי התנאי לחילופיות הפעולה $ הוא a = b, ההשערה יכולה להיות חלקית בלבד. בדיקת ההשערה החלקית באופן כללי, לא תועיל במקרה זה. (אפשר להכליל את המובן מאליו כי ניתן להחליף את מקום האיברים בכל פעולה במקרה שבו האיברים שווים. למשל, פעולת החזקה אינה חילופית אבל במקרה של זוג מספרים שווים, ניתן להחליף ביניהם.)

דנים בשאלה אם אכן נמצאו כל המקרים שבהם ניתן להחליף את האיברים ולקבל תוצאות שוות. חוזרים על השאלה גם אחרי שנמצא התנאי השני: a + b = 1 בעזרת הדוגמאות.

- דנים על העוצמה של האלגברה

מתייחסים לעוצמה של האלגברה, שבאמצעותה ניתן לא רק לאשש את ההשערה, אלא גם למצוא את כל התנאים שלגביהם מתקיים השיוויון.

$$a \$ b = b \$ a$$
$$a^2 + b = b^2 + a$$
$$a^2 - b^2 = a - b$$
$$(a - b)(a + b) = a - b$$

אם a = b השיוויון מתקיים.

אם $a \neq b$ מותר לחלק את שני האגפים ב- (a – b), ואז מקבלים את התנאי השני לקיום המשוואה, ולקיום החילוף: a + b = 1

כדי לברר אם המשתלמים מבינים שהוכחה אלגברית היא כללית שואלים את השאלה הבאה:

האם התנאי הזה קיים גם עבור מספרים מכוונים, למשל עבור $a = -4$ ו- $b = 5$, או שיש לבדוק דוגמאות נוספות?

- דוגמאות לפעולות שונות המקיימות קשר מספרי נתון

בדיון מתייחסים לכך שקשר מספרי אחד או אפילו מספר קשרים אינם קובעים את הגדרת הפעולה, ופעולות שונות יכולות לתת אותה תוצאה מאותם שני מספרים.

בדיון מביאים גם דוגמאות שאולי המשתלמים לא נחשפו אליהן.

למשל, פעולה שאינה מתחשבת באחד המספרים כמו: $a \cup b = b$ או $a \cup b = \frac{a}{2}$

ופעולה שאין בה פעולת חשבון כמו: $a \cup b = \min(a , b)$.

3. פעולות על עצמים שאינם מספרים (שאלה 5)

בחלק זה של הפעילות נחשפים לפעולות על עצמים שאינם מספרים. חשיפה כזו מחדדת את ההבנה לגבי המושגים איברים בקבוצה (בדוגמה שלנו אלה נקודות במישור), ופעולות על איברי הקבוצה (בדוגמה שלנו הפעולה היא גיאומטרית – גרפית, ואינה מספרית). הנקודות שהן איברי הקבוצה ממוקמות במערכת צירים, וזו הזדמנות לשילוב נושאים.

נקודות אפשריות להתייחסות בדיון

- הקשר בין חוק החילוף לחוק הקיבוץ

לגבי רוב פעולות החשבון הנפוצות, אם הן מקיימות את חוק החילוף, הן מקיימות גם את חוק הקיבוץ; ואם אינן מקיימות את חוק החילוף, הן אינן מקיימות גם את חוק הקיבוץ. כדי למנוע את הטעות הנפוצה שהחוקים תלויים זה בזה, מתייחסים לכך שיש פעולות המקיימות רק את אחד החוקים.

למשל, הפעולה "אמצע הקטע" מקיימת את חוק החילוף אבל איננה מקיימת את חוק הקיבוץ.

אפשר להתייחס גם אל הפעולה $a \cup b = b$ המקיימת את חוק הקיבוץ, אבל איננה חילופית.

- קישוריות

עיסוק בפעולה ~ אינו מחייב שימוש במערכת צירים. אולם מכיוון שעוסקים בסימון נקודות במישור, קיימת הזדמנות לקשר זאת עם מערכת צירים. דנים בשאלה האם כדאי "לערבב" נושאים שונים מוכרים, שאינם קשורים בהכרח לנושא הנלמד, כאשר לומדים דבר חדש.