# 3.5 היכן גרים המספרים האירציונליים למדריך

## מטרות

- שימוש במשפט פיתגורס ליצירת קטעים בעלי אורך של מספר אירציונלי של יחידות.
- מציאת מקומם של מספרים אירציונליים על ציר המספרים.
- ביצוע פעולות חשבון בין מספרים ממשיים.
- היכרות עם ייצוגים גיאומטריים של מספרים אירציונליים.
- מציאת קשרים בין אורכי צלעות, אורכי אלכסונים, אורכי היקפים, ושטחים של אותו מצולע משוכלל, או של מצולעים משוכללים הולכים וגדלים.

## חומרים

דפי פעילות לתלמיד (8 עמודים כולל משחק).

## זמן משוער

שניים עד שלושה שיעורים.

## מבנה הפעילות

1. המקום על הציר של מספרים אירציונליים (שאלות 1–7)
2. קטעים שאורכם מספרים אירציונליים בריבוע ובקובייה (שאלות 8–12)
3 קטעים שאורכם מספרים אירציונליים במשולש ובמשושה (שאלות 13–16)

מהלך הפעילות

## 1. המקום על הציר של מספרים אירציונליים (שאלות 1–7)

בחלק זה של הפעילות מסמנים את מקומם של מספרים אירציונליים מסוימים על הציר. תחילה בקירוב ואחר-כך במדויק. הפעילות מתמקדת במספרים שהם שורשים של מספרים טבעיים. מחשבים את הקירוב בעל-פה, ומסמנים בקירוב את המקום על הציר. לצורך הסימון ה"מדויק" עדיף לעבוד בייצוג הגיאומטרי (מציאת קטע שאורכו מתאים), מאשר בייצוג המספרי העשרוני (מציאת מספר עשרוני אינסופי שאינו מחזורי).

הערה: משחקים במשחק "מלחמה" ואפשר לשחק גם במשחק "משימות אירציונליים" אם המשתלמים לא שחקו בו בפעילות 3.2.

נקודות אפשריות להתייחסות בדיון

- דנים בנושא של קירוב ודיוק.

מתייחסים לרעיון שכל חישוב של מספר אירציונלי, אפילו אם הוא נעשה בעזרת מחשבון, הוא בעצם חישוב מקורב, כי המספר המופיע על הצג הוא קירוב למספר עשרוני בעל מספר ספרות סופי, ולכן רציונלי.

מתייחסים לרעיון שכל מדידה של קטע נותנת מספר רציונלי, כי מדידה של קטע פירושה מציאת מספר הפעמים שיחידת המידה או חלק רציונלי שלה נכללים בקטע. ואמנם יש למספר האירציונלי מקום מדויק על הציר, ואפשר למצוא אותו בייצוג גיאומטרי, אבל דיוק מדידתו תלוי בדיוק של כלי המדידה.

מבררים יתרונות וחסרונות של חישוב מקורב וחישוב מדויק, ומביאים דוגמאות למקרים שבהם מספיק החישוב המקורב, לעומת מקרים שחשוב בהם החישוב המדויק.

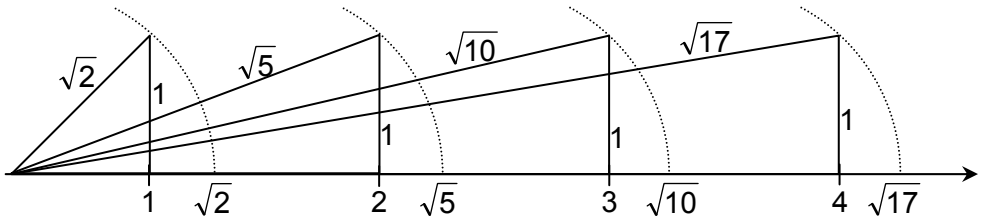
מתייחסים לכך שיכולת למצוא קירוב טוב, מעידה על הבנת הענין והתמצאות בו, לעומת מציאת חישוב מדויק, שלפעמים נובעת מידיעת טכניקת העבודה ללא הבנה.

אם המשתלמים שיחקו במשחק *מלחמה*, מתייחסים לנושא של קירוב ודיוק במסגרת המשחק, ומבררים באילו מקרים מספיק להתייחס לקירוב ובאילו יש צורך בדיוק.

- דנים באופן מציאת מקום המספרים על הציר בשאלה 5.

אפשר למצוא כל מספר בדרכים שונות.

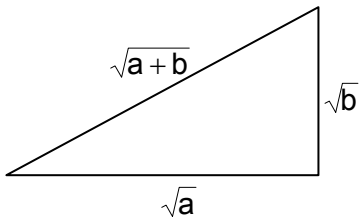
הדרך הפשוטה ביותר היא בהמשך לחישוב האורכים על הקונכיה:




ויש גם דרכים אחרות. למשל $\sqrt{5}$ הוא אורך היתר של משולש ישר זווית שאורכי ניצביו הם 1 יח' ו- 2 יח', אבל גם אורך היתר של משולש ישר זווית שאורכי ניצביו הם $\sqrt{2}$ יח' ו- $\sqrt{3}$ יח'.

מובן שיש למצוא קודם את אורך הקטע $\sqrt{3}$ יח'.

מכלילים ומבהירים בעזרת ההכללה כי כדי למצוא מקומו של שורש של מספר על הציר, מספיק לפרק אותו לשני מחוברים שמקומות השורשים שלהם על הציר ידועים.




כדי למנוע טעות נפוצה אפשר להתייחס בהזדמנות זו לאי-שוויון $\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$

## 2. קטעים שאורכם מספרים אירציונליים בריבוע ובקובייה (שאלות 8–12)

בחלק זה של הפעילות עוסקים בקטעים שונים שאורכיהם מספרים אירציונליים.

- אורכי אלכסונים בריבועים בעלי מידות אורך טבעיות.
  האורכים במקרה זה הם כפולות של $\sqrt{2}$.
- אורכי צלעות בריבועים בעלי מידות שטח טבעיות.
- אורכי אלכסונים בקוביות בעלי מידות אורך טבעיות.
  האורכים במקרה זה הם כפולות של $\sqrt{3}$

נקודות אפשריות להתייחסות בדיון

- דיון על דרכי פתרון מסוגים שונים.

בשאלות 8, 9 ו- 10 יש הזדמנות לפתור סעיפים שונים בדרכים שונות, חלקן בחישוב וחלקן לפי השרטוט. למשל, את אורך אלכסונו של ריבוע, אפשר לחשב בעזרת משפט פיתגורס, ואפשר למצוא על-ידי התבוננות ברשת הריבועים ואלכסוניהם, בהנחה שידוע שאורך אלכסון של ריבוע היחידה הוא $\sqrt{2}$.

דנים ביתרונות של כל דרך. מתייחסים לכך שאם שרטוט הרשת לא היה לפנינו, מציאת אורכי הקטעים בדרך החישוב היה הרבה יותר מהיר. לעומת זאת הרשת מאפשרת לראות את התשובה ללא חישוב. כמו כן הרשת מאפשרת הכללות – כמו למשל, אם אורך הצלע a אז אורך האלכסון $a\cdot\sqrt{2}$. אפשר, כמובן, להכליל גם בעזרת האלגברה.

דנים גם בפתרונות לשאלה 9ג. יש לפחות שלושה פתרונות חישוביים, ואחד לפי השרטוט.

- אפשר להעלות בריבוע את שני ההיקפים ולראות כי:

$$(8\sqrt{2})^2 = 128 \qquad 12^2 = 144$$

לכן, $8\sqrt{2} < 12$

- אפשר לפרק כל היקף לגורמים $8\sqrt{2} = 2\cdot 2\cdot 2\cdot\sqrt{2}$ $\qquad 12 = 2\cdot 2\cdot 3$, ידוע כי $\sqrt{2} < 1.5$, לכן $2\sqrt{2} < 3$.

- אפשר לחשב בעזרת מחשבון.

- ריבוע שהיקפו גדול יותר הוא גדול יותר.

הפעם הגישה הגרפית אינה מיידית, כי קשה לראות מי מהריבועים גדול יותר, אבל אפשר בקלות להשוות את השטחים שלהם על-ידי ספירת מספר המשולשים הקטנים שבכל ריבוע. בריבוע שהיקפו 12 יש 18 משולשים קטנים (או 9 ריבועים), ובריבוע השני יש 16 משולשים (או 8 ריבועים), ולכן הריבוע הראשון גדול יותר.

דנים בשאלה אם רצוי להציג דרכים רבות לפתרון אותה שאלה בבת אחת, או אפילו אם בכלל. מחקרים מראים כי מורים רבים אינם רואים יתרון להבאת דרכים שונות לפתרון אותה בעיה, והם סוברים כי הדבר רק "מבלבל" את תלמידיהם.

משתדלים להגיע למסקנה כי הדרכים השונות משלימות זו את זו, ומעמיקות את הבנת המושג הנלמד. כמו כן, תלמידים שונים מעדיפים ומבינים טוב יותר דרכים שונות, ובדרך כלל אין דרך אחת המתאימה לכל התלמידים.

- דנים על שאלות 10 ו- 11.

בדרך כלל, כאשר עוסקים בקשר בין אורך צלע ריבוע לשטחו, עולה הרעיון, כי בתהליך של צורה הולכת וגדלה, השטח גדל בקצב מהיר יותר מקצב גידול אורך הצלע. הרעיון מובע בדרכים שונות – למשל, בטענה האומרת שאם אורך הצלע גדל פי n, אז השטח גדל פי $n^2$, או בטענה האומרת כי אם ניקח את סדרת הריבועים שאורכי צלעותיהם הם סדרת המספרים הטבעיים העוקבים, אז הפרשי השטחים שלהם הם סדרת המספרים האי-זוגיים מ- 3 ואילך. בפעילות זו עוסקים בקשר ההפוך בין שטח הריבוע לאורך צלעו. כלומר, זו הזדמנות להראות כי אם שטחי הריבועים גדלים בקצב קבוע (מספרים טבעיים עוקבים), אורכי הצלעות המתאימות גדלים בקצב איטי יותר מן השטחים. רעיון זה מובע בשתי דרכים, אחת על-ידי שרטוט (תרגיל 10), ואחת על-ידי חישוב בגיליון ה- Excel (תרגיל 11). בשרטוט רואים כי אורכי הצלעות של ריבועים ששטחיהם 1, 2, 3, 4... הם יותר ויותר צפופים. למשל בין 3 ל- 4 צריכים להכנס 7 צלעות של ריבועים ששטחיהם בין 9 ל- 16 יחידות. כלומר, אם שטח הריבוע גדל ביחידה אחת בכל פעם, אורך צלע הריבוע גדל, אבל יותר ויותר לאט. גם בחישוב במחשב אפשר לראות כי קצב גידול אורכי הצלעות הולך ומתמתן. ניתן להדגיש את התופעה על-ידי חישוב ההפרשים בין האורכים של שתי צלעות סמוכות בסדרה.

בשרטוט אפשר לראות בו זמנית את שני הקשרים צלע ← שטח, ושטח ← צלע.

דנים בקשרים האלה, ובקשר שלהם אל המספרים האירציונליים.

בפעילות המחשב יש הזדמנות נוספת לדון בכך שכל מספר המוצג במחשב או במחשבון הוא בעצם קירוב למספר רציונלי, כי הוא מקוצץ למספר עשרוני סופי.

- דנים בשאלה 12.

עורכים אנלוגיה בין אורך אלכסון הריבוע במישור לבין אורך אלכסון הקובייה במרחב. ניתן למלא את המרחב בקוביות כמו שאפשר לרצף את המישור בריבועים, ולהסיק מאלכסוני הריבועים על אלכסוני הקוביות. השרטוט ממחיש את העקרון כי הגדלת הקוביה פי n, מגדילה את אורך האלכסון פי n. לפי עקרון זה, מכיוון שאורך האלכסון של קוביית היחידה הוא $\sqrt{3}$, אורך האלכסון של קובייה בכל גודל טבעי n, הוא $n\sqrt{3}$.

## 3 קטעים שאורכם מספרים אירציונליים במשולש ובמשושה (שאלות 13–16)

במשולש שווה צלעות שאורך צלעו מספר טבעי, אורך הגובה והשטח הם מספרים אירציונליים. פותרים את התרגילים ללא מחשבון, כדי לראות את התוצאה כמספר אירציונלי. משושה מורכב ממשולשים שווי צלעות ולכן קטעים דומים נמצאים גם במשושה. בחלק זה של הפעילות מראים כי אורכים אירציונליים נמצאים בצורות רבות.

## נקודות אפשריות להתייחסות בדיון

- דיון על פתרון שאלה 14.

בחישוב השאלה ושאלות דומות, יש "מוקשים" רבים בעיקר בעניין סדר פעולות החשבון וחוקי הפעולות. רצוי לדון בהם.

א. $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ הוא תרגיל מבלבל, כי יש נטיה לחשוב שהעלאה בריבוע נותנת תוצאה גדולה יותר.

כאשר מדובר בשבר, לא תמיד זוכרים לשים סוגריים ומעלים בריבוע רק את המונה (לאו דוקא במקרה של $\frac{1}{2}$).

ב. יש נטייה להשתמש בחוק הפילוג של השורש מעל לחיבור, במיוחד בתבניות – למשל, רבים סוברים כי $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

ג. לא תמיד ידוע הכלל $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

ד. בחישוב השטח יש שני קווי שבר: $\frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$, והדבר עלול ליצור קשיי חישוב. כדאי להמליץ שימוש בנוסחה $\frac{1}{2}ah$ עבור השטח (ולא $\frac{ah}{2}$).

- דיון על אנלוגיה בין רשת הריבועים לרשת המשולשים.

בשתי הצורות ניתן לרצף את המישור.

מבררים אם ניתן לרצף את המישור בכל מצולע משוכלל, ומהם התנאים שמצולע ירצף את המישור. מראים כי בשני המקרים סכום הזוויות סביב כל קודקוד הוא $360^0$, ולכן המשולש, הריבוע והמשושה, הם שלושת המצולעים המשוכללים היחידים המרצפים את המישור. מכיון שזוויות הריבוע והמשולש (להבדיל מן המשושה) הם גם מחלקים של $180^0$, הריצוף בצורות אלה יוצר קווים ישרים. לכן בתוך הרשתות של הריבועים והמשולשים אפשר לראות צורות דומות בגדלים שווים. אפשרות זו מאפשרת לעקוב אחרי היקפים, שטחים, אלכסונים (בריבועים), וגבהים (במשולשים), עבור צורות הולכות וגדלות.

- דיון על הכללה לחישוב גובה ושטח של משולש שווה צלעות שאורך צלעו a.

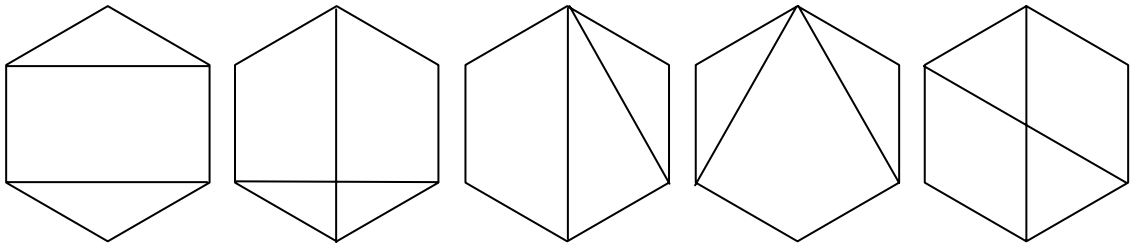
ההכללה יכולה להיעשות (כמו שנעשתה לגבי הריבועים), בעזרת הרשת. אורך הגובה של משולש שאורך צלעו יחידה אחת הוא $\frac{\sqrt{3}}{2}$, ושטחו $\frac{\sqrt{3}}{4}$. הגדלה של אורך הצלע פי n מגדילה את הגובה פי n, ואת השטח פי $n^2$.

לכן אורך הגובה של משולש שווה צלעות שאורך צלעו a, הוא $a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$, ושטחו $a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$

ההכללה יכולה להיעשות גם בדרך אלגברית, אבל אז נתקלים בכל ה"מוקשים" שהוזכרו בנקודה הקודמת.

- דיון על הדרכים לחלוקת משושים לחלקים וחישוב היקפיהם.

אלו כל האפשרויות לחלוקה של המשושים לחלקים על-ידי שני אלכסונים.



אם מתבוננים היטב, רואים כי יש בצורות אלו מספר קטן של צורות יסודיות. משולש שווה צלעות, "משולש יפה" (משולש שזוויותיו $30^0$, $60^0$, ו- $90^0$, שהוא מחצית ממשולש שווה צלעות), משולש שווה שוקיים שהוא פי 2 מ"משולש יפה", (ולכן ניתן לגזירה והרכבה למשולש שווה צלעות), צורות נוספות שניתנות לגזירה ולהרכבה מחדש לשלושת צורות אלו (כמו הדלתון הטרפזים והמעויינים), ומלבן. לכן יש צלעות רבות השוות באורכן, ואין צורך לחשב מחדש את אורכן בכל משושה. אפשר לבחור את כל אורכי הצלעות בעזרת המספרים הבאים:

$1$ , $\frac{1}{2}$ , $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , $1\frac{1}{2}$ , $\sqrt{3}$ , $2$ .