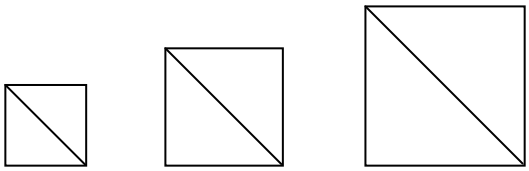
היחס בין היקף לאורך האלכסון

נמצא יחסים בין היקף לאורך אלכסון עבור ריבועים ומשושים.

1. ריבועים – יחס בין היקף ואלכסון



א. השערות.

- האם, לדעתכם, היחס תלוי בגודל הריבוע?

(כלומר, בריבועים בעלי מידות שונות, היחס שונה)

- אם לדעתכם היחס קבוע לכל הריבועים, שערו מהו יחס זה, והקיפו את המספר הקרוב לו ביותר.

1 , 1.5 , 2 , 2.5 , 3 , 3.5 , 4

ב. בדיקה ב- Excel

פתחו את הקובץ *PI* והשלימו את העמודות המתאימות לריבוע.

שימו לב!

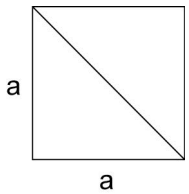
- לפני תבנית יש לרשום [=] .
- תזכורת: אורך האלכסון בריבוע הוא פי $\sqrt{2}$ מאורך הצלע. כדי לרשום $\sqrt{2}$ רשמו [Sqrt(2)]

נקודת הכפל נמצאת מעל המספר 8 . הקלידו [Shift 8]

ג. השוו בין ממצאיכם בסעיף ב להשערותיכם בסעיף א.

ד. מצאתם בפעילות ה- Excel כי היחס בין היקף הריבוע לאורך אלכסונו הוא בערך 2.828.

הראו בעזרת השלבים הבאים כיצד למצוא את המספר הזה באופן אלגברי.

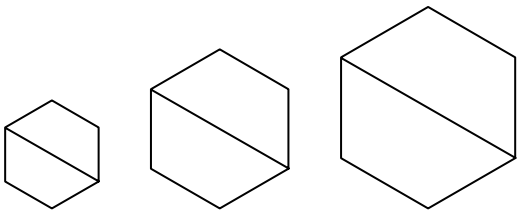


נסמן את צלע הריבוע ב- a.

- רשמו תבנית להיקף הריבוע.
- רשמו תבנית לאורך האלכסון.
- רשמו תבנית ליחס בין היקף הריבוע לאורך אלכסונו.
- הרחיבו את השבר ב- $\sqrt{2}$ כפלו וצמצמו. (שימו לב! $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$)
- הסבירו מדוע מתקבל מספר קבוע עבור היחס.

2. משושים – יחס בין היקף ואלכסון

א. השערות.



- האם, לדעתכם, היחס תלוי בגודל המשושה? (כלומר, במשושים בעלי מידות שונות, היחס שונה)
- אם לדעתכם היחס קבוע לכל המשושים, שערו מהו יחס זה, והקיפו את המספר הקרוב לו ביותר.

1 , 1.5 , 2 , 2.5 , 3 , 3.5 , 4

ב. בדיקה ב- Excel

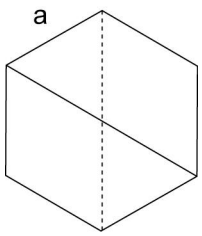
פתחו את הקובץ *3.6 Appendix* והשלימו את העמודות המתאימות למשושה.

ג. השוו בין ממצאיכם בסעיף ב להשערותיכם בסעיף א.

ד. מצאתם בפעילות ה- Excel כי היחס בין היקף המשושה לאורך אלכסונו הוא 3.

הראו בעזרת השלבים הבאים כיצד למצוא את המספר הזה באופן אלגברי.

נסמן את צלע המשושה ב- a.

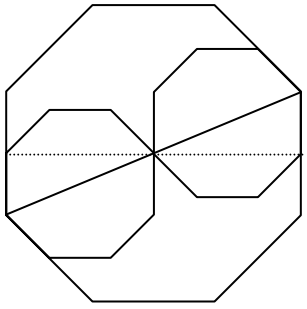


- רשמו תבנית להיקף המשושה.
- רשמו תבנית לאורך האלכסון.
- רשמו תבנית ליחס בין היקף המשושה לאורך אלכסונו.
- הסבירו מדוע מתקבל מספר קבוע עבור היחס.

3. מתומנים – יחס בין היקף לאלכסון

א. ניתן לחשב את היחס בין היקף המתומן הקטן לאלכסונו $\frac{8a}{d}$. יחס זה הוא בערך 3.06.

מהו, לדעתכם, היחס בין היקף המתומן הגדול לבין אלכסונו?



ב. הסתמכו על השרטוט והסבירו מדוע יחס זה במתומן הגדול הוא $\frac{16a}{2d}$

4. מעגלים – יחס בין היקף לאלכסון

על-פי המימצאים שראינו, סביר להניח כי היחס בין היקף כל מעגל לבין קוטרו ("האלכסון" הארוך ביותר) הוא מספר קבוע.

השלימו נתונים הידועים לכם אודות היחס הקבוע שבין היקף המעגל וקוטרו:

שם/סימון: _____

ערך מספרי: _____

סוג המספר: _____

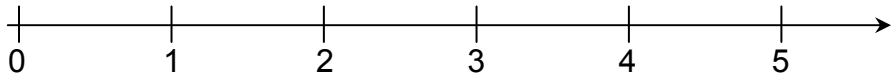
קירובים: _____

מקומו של π על ציר המספרים

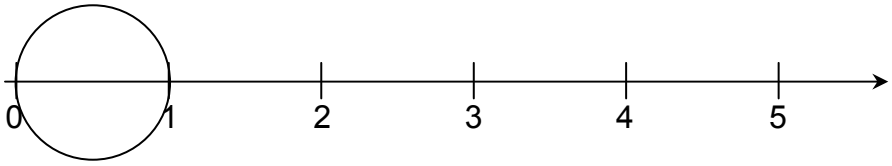
5. לפניכם ציר מספרים.

א. האם יש למספר π מקום מדויק על ציר המספרים? הסבירו.

ב. סמנו, בקירוב, את מקומו של π על הציר.



6. א. מהו היקף מעגל שקוטרו יחידה אחת?



ב. הציעו דרך להשתמש במעגל ובחוט, כדי למצוא את מקומו ה"מדויק" של π על ציר המספרים.

ג. פתחו את הקישורים הבאים לאתר של ויקיפדיה על π והתבוננו ביישומונים המוצגים בהם.

http://he.wikipedia.org/wiki/%D7%A4%D7%99%D7%99

http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Pi-unrolled.gif

הסבירו מה מדגימים היישומונים.

שימושים ותוצאות מפתיעות

היקף המעגל

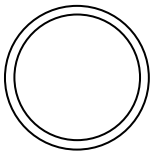
7. נתון מעגל שקוטרו d רדיוסו r והיקפו P.

   הסבירו מדוע הנוסחה להיקף המעגל היא $P = d\pi$ או $P = 2\pi r$

8. ידוע כי אורך רדיוס כדור הארץ הוא כ- 6,375 ק"מ.

   מהו אורך קו המשווה של כדור הארץ?

9. מקיפים את כדור הארץ בקו המשווה בחבל. אחר-כך מאריכים את החבל הזה ב- 10 מ', ומרימים אותו מעל פני האדמה במידה שווה לאורך כל קו המשווה. במבט מלמעלה זה נראה כך:



   א. שערו אילו מהיצורים הבאים יוכלו לעבור מתחת לחבל בלי להתכופף?
   נמלה, עכבר, חתול, אריה, ילד, אדם מבוגר, ג'ירפה.

   ב. חשבו את רדיוס מעגל החבל ואת רוחב הטבעת (הפרש רדיוסים).
   בדקו את השערתכם.

   ג. האם רוחב הטבעת תלוי ברדיוס העיגול המקורי? הסבירו.

10. שערו מה גדול יותר, *גובה הנער* או *היקף גלגל אופניו*.

מדדו ובדקו את השערתכם.

11. א. קבעו לגבי כל אחת מן הקופסאות הגליליות הבאות:

מה יותר ארוך -- *היקף בסיס הקופסה או גובהה*?

תחילה, עשו זאת באומדן – על-פי התרשמות,

לאחר מכן, עשו זאת במדידה.

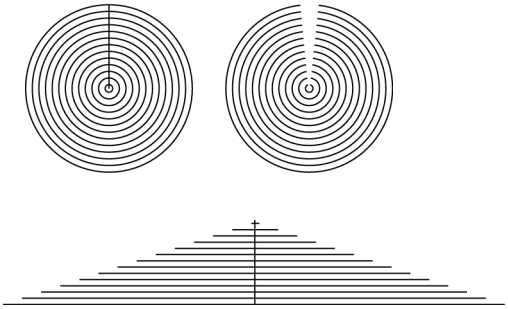
ב. מצאו קשר בין קוטר הבסיס ובין הגובה של ***כל*** הקופסאות הגליליות בעלות היקף בסיס השווה לגובהן.

ג. מצאו דרך לבניית קופסאות גליליות בעלות היקף בסיס השווה לגובהן?

שטח העיגול

הסבר עברי מקורי לנוסחה ל**שטח העיגול** מובא, כנראה, בפעם הראשונה בספר "חיבור המשיחה והתשבורת" שנכתב על-ידי ר' אברהם בר-חיא (המאה ה – 12). ההסבר מופיע גם בפירוש לתלמוד של בעלי התוספות (עירובין נ"ו, סוכה ח') והיה מקובל, כנראה, על חכמי ישראל.

נבנה עיגול ממעגלי חוטים צפופים בעלי מרכז משותף, ונחתוך בו חתך לאורך הרדיוס,



נפרוש את כל המעגלים
עד שיהפכו לקווים ישרים.
נקבל משולש שווה שוקיים.

לפניכם ההסבר בסגנונו ובלשונו של רבי אברהם בר-חייא. שורות אלו נכתבו לפני כ- 950 שנה.

"והאות על התשבורת הזאת ידענו: אם תפתח שטח העיגול מצד אחד ותיישר את כל הקווים הסובבים מקו החיצוני עד המרכז, יתפשטו המקיפים שטח העיגול ויחזרו לקווים ישרים מתמעטים והולכים, עד שחוזרים אל נקודה אחת והיא המרכז.
החיצון גדול מכולם, ואשר לפנים ממנו קטן ממנו וגדול מאשר לפנים ממנו, וכן הולכים עד הנקודה, ובזה נולדת לנו צורת המשולש; ותשבורת המשולש כבר בארנו, היא כדי העמוד בחצי התושבת, וזהו מחצית הקוטר במחצית הקו המקיף".

12 א. השלימו את ביאור המונחים:

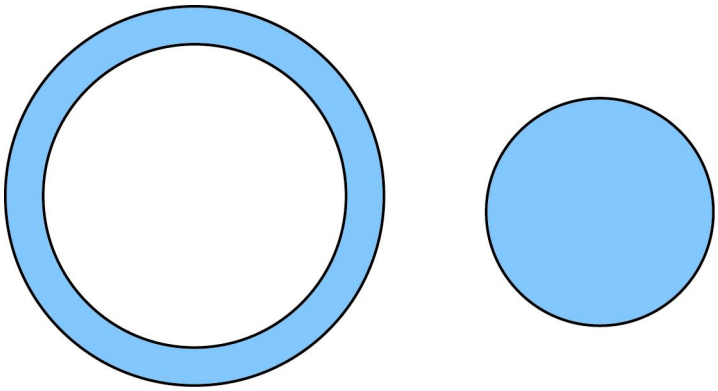
אות = הוכחה; תשבורת = מידת שטח;

עמוד = _____; תושבת = _____; קו מקיף = _____

ב. מהו בסיס המשולש? מהו גובהו? מהו שטחו?

ג. השתמשו בשיטתו של ר' אברהם בר-חייא כדי לפתח את הנוסחה לשטח העיגול.

13. לפניכם עיגול שרדיוסו 3 ס"מ וטבעת בין שני עיגולים. הפנימי ברדיוס 4 ס"מ והחיצוני ברדיוס 5 ס"מ.



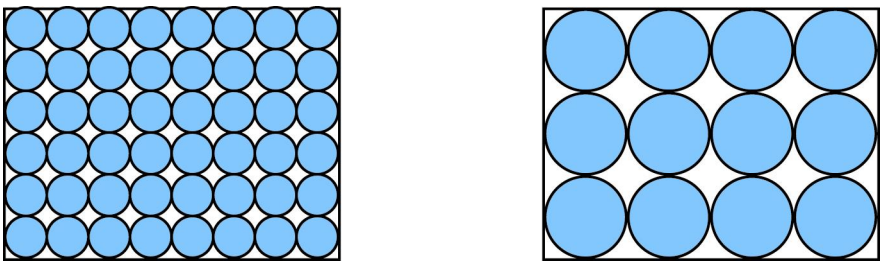
א. שערו: איזה שטח גדול יותר – שטח העיגול או שטח הטבעת?

ב. חשבו את השטחים ובדקו השערתכם.

ג. נסו למצוא אורכים אחרים לרדיוסים של עיגול ושל טבעת, כך שהשוואת שטחיהם תתן תוצאות דומות.

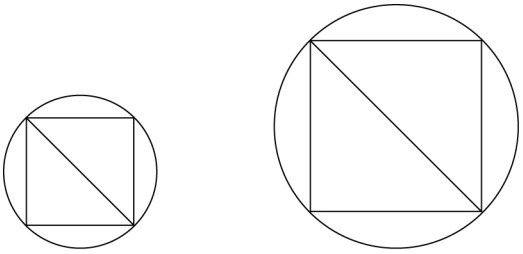
14. אמא אופה עוגיות. היא מחלקת עיסת בצק לשתי כמויות שוות, ומרדדת אותן באותו עובי, לשתי צורות מלבניות באותו גודל. לאחר רידוד הבצק, היא חותכת עוגיות בצורת עיגול – מכל מלבן היא יוצרת עוגיות בגודל אחר.

א. **שערו** באיזו מן התבניות (השוות בגודלן) כמות הבצק של העוגיות (לאחר הסרת הפחת) גדולה יותר?



ב. **חשבו** באיזו מן התבניות (השוות בגודלן) כמות הבצק של העוגיות העגולות גדולה יותר?

15. חוסמים ריבועים במעגלים שונים.



פתחו בקובץ *Appendix 3.6 גיליון 2* ב- Excel כדי לחשב את היחס בין שטחי עיגולים שונים לשטחי הריבועים החסומים בהם.

תזכורת! שטח של ריבוע הבנוי על האלכסון של ריבוע נתון, גדול פי שניים משטח הריבוע הנתון.

נסו לברר לעצמכם מיהו היחס שמצאתם.

הייצוג העשרוני של π

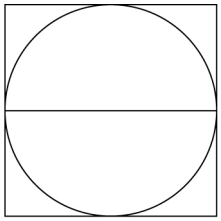
16. א. מצאו את π במחשבון. כמה ספרות אחרי הנקודה המחשבון נותן?

האם זהו הערך המדויק של π?

ב. בחישובים נהוג להשתמש ב- 3.14 או ב- $\frac{22}{7}$ כערך של π. האם אחד משני המספרים האלה משקף את ערכו המדויק?

אם לא, איזה משני המספרים קרוב יותר ל- π?

π הוא מספר אירציונלי, לכן יש לו אינסוף ספרות אחרי הנקודה ואין אפשרות למצוא את ערכו במדויק, אבל ניתן להתקרב אל ערכו. אחת הדרכים להתקרב אל π היא בעזרת מצולעים החוסמים את המעגל וחסומים בו.

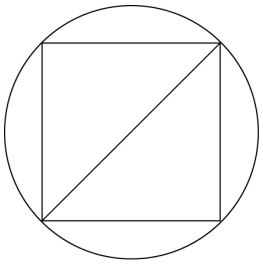


17. א. חוסמים את המעגל בריבוע.

מהו היחס בין היקף הריבוע לצלע הריבוע (קוטר המעגל החסום)?

הסבירו מדוע π **קטן** מן המספר שמצאתם.

ב. חוסמים ריבוע בתוך המעגל.

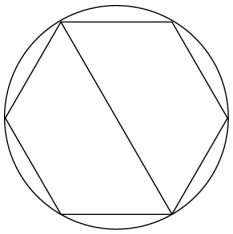


מהו היחס בין היקף הריבוע לאלכסונו (קוטר המעגל החוסם)?

הסבירו מדוע π **גדול** מן המספר שמצאתם.

עד כה התקרבנו אל המעגל עם ריבועים משני הצדדים, ומצאנו כי $2.8 < \pi < 4$

נתקרב אל המעגל יותר על-ידי משושים משוכללים.



18. חוסמים משושה בתוך המעגל

א. מהו היחס בין היקף המשושה לאלכסונו (קוטר המעגל החוסם)?

ב. סמנו $<$, $>$, $=$ והשלימו את היחס שמצאתם בסעיף א.

π ___ _____

אפשר להתקרב באופן זה, אל המעגל על-ידי מצולעים בעלי מספר צלעות הולך וגדל, ויצירת היחסים:

$$\frac{\text{היקף מצולע}}{\text{אלכסון מצולע (קוטר מעגל)}}$$

מכיוון שהיקפי המצולעים האלה הולכים ומתקרבים אל היקף המעגל, ערכי היחסים הולכים ומתקרבים אל π.