מרחיבים כדי לקבל חבורה

קבוצת מספרים נקראת **חבורה לגבי פעולה מסוימת** (נסמן אותה ב- $*$) אם היא מקיימת את ארבע התכונות הבאות:

1. הקבוצה סגורה לגבי הפעולה, כלומר, תוצאת הפעולה בין כל שני איברים נמצאת בקבוצה.
2. לקבוצה יש איבר נייטרלי (נסמן אותו ב- e) לגבי הפעולה, כלומר, מתקיים $a * e = e * a = a$
3. לכל איבר בקבוצה יש איבר הופכי (נסמן אותו ב- a^{-1}), כלומר, מתקיים $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$
4. הפעולה מקיימת את חוק הקיבוץ: $(a * b) * c = a * (b * c)$

אם הפעולה היא גם חילופית, כלומר $a * b = b * a$

קוראים לקבוצה **חבורה חילופית לגבי הפעולה**.

1. לפניכם קבוצות עם פעולות.

סמנו √ בטבלה עבור כל תכונה המתקיימת.

	1 סגירות	2 איבר נייטרלי	3 איבר הופכי	4 חוק קיבוץ
קבוצת הטבעיים עם פעולת החיבור				
קבוצת הטבעיים ואפס עם פעולת החיבור				
קבוצת המספרים השלמים עם פעולת החיבור				
קבוצת הזוגיים (כולל 0 ושליליים) עם פעולת החיבור				
הקבוצה: . . . 9 , 6 , 3 , 0 , -3 , -6 , -9 . . . עם פעולת החיבור.				
קבוצת הזוגיים עם פעולת הממוצע				
קבוצת הטבעיים עם פעולת הכפל				
קבוצת הטבעיים ואפס עם פעולת הכפל				
קבוצת המספרים השלמים עם פעולת הכפל				

2. ראינו שקבוצת המספרים השלמים אינה חבורה לגבי הכפל, כי אין איבר הופכי לכל מספר.
נצרף לקבוצה את שברי היחידה (השברים שהמונה שלהם 1).

א. האם בקבוצה החדשה יש איבר הופכי לכל מספר?

ב. האם הקבוצה החדשה היא חבורה לגבי הכפל?

שימו לב! בכל הרחבה של עולם המספרים יש לבדוק מחדש את כל התנאים לקיום חבורה, כי אולי ההרחבה ביטלה תכונה שהייתה קיימת בקבוצה המקורית.

מספר רציונלי הוא מספר שאפשר לכתוב אותו כמנה ($\frac{a}{b}$) של שני מספרים שלמים, ($b \neq 0$).

3. א. האם קבוצת המספרים הרציונליים היא חבורה לגבי החיבור?

ב. האם קבוצת המספרים הרציונליים היא חבורה לגבי הכפל?

בדרך כלל מרחיבים קבוצת מספרים כדי שבקבוצה המורחבת יתקיימו תכונות שלא התקיימו בקבוצה המקורית. ההרחבה גורמת לפעמים גם לאיבוד תכונות, למרות שעושים מאמצים שזה לא יקרה (למשל, הגדרת פעולות החשבון נעשית כך שהתכונות ישמרו).

4. סמנו √ עבור תכונה המתקיימת. נמקו בעל-פה, אם אפשר.

	הטבעיים	הזוגיים החיוביים	השלמים	השלמים השליליים	הרציונליים	הרציונליים החיוביים	שברי היחידה
בקבוצה יש מספר שהוא הקטן ביותר							
בקבוצה יש מספר שהוא הגדול ביותר							
לכל מספר בקבוצה יש "עוקב"							
לכל מספר בקבוצה יש "קודם"							
בין כל שני מספרים יש מספר נוסף ששייך לקבוצה (צפיפות)							
יש סדר גודל בין כל שני מספרים בקבוצה							
אפשר למנות את המספרים בקבוצה כפי שהם מסודרים							
לכל מספר בקבוצה יש מקום על ציר המספרים.							

צפיפות המספרים הרציונליים.

5. רשמו שלושה מספרים

א. בין $-1\frac{1}{2}$ ל- $1\frac{1}{2}$

ב. בין $1\frac{1}{3}$ ל- $1\frac{1}{2}$

ג. בין 1.5 ל- 1.6

ד. בין 1.5 ל- 1.51

6. הציעו דרכים שונות, רבות ככל שתוכלו, למציאת שבר בין $\frac{1}{6}$ ל- $\frac{1}{5}$

בבית ספר "רנסום" בפלורידה שבארצות הברית, בשיעור מתמטיקה בכיתה ח' עסקו בדרכים למצוא שבר הנמצא בין שני שברים נתונים. למשל שבר הנמצא בין $\frac{1}{6}$ ל- $\frac{1}{5}$.

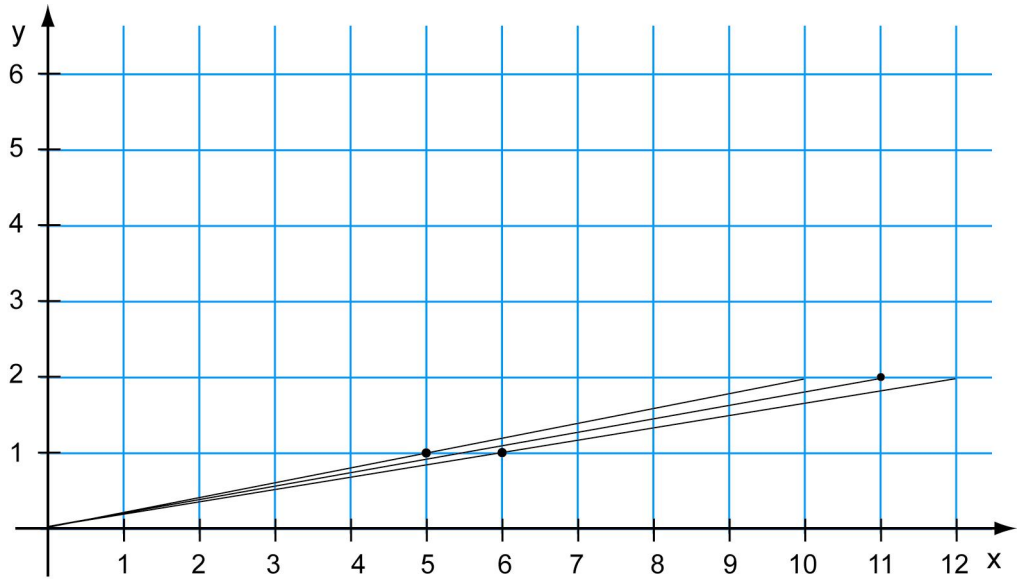
אחד התלמידים בכיתה, בשם מק-קיי, הציע: "אני מכיר שיטה פשוטה למצוא מספר בין שני שברים: מחברים מונה למונה ומכנה למכנה, ומקבלים שבר חדש שנמצא בין שני השברים.

במקרה שלנו $\frac{2}{11}$ נמצא בין $\frac{1}{6}$ ל- $\frac{1}{5}$".

7. מה הייתם עושים כמורים אילו נקלעתם לסיטואציה כזו?

8. ראינו כי אפשר להציג מספרים רציונליים כישרים במערכת הצירים.

ראינו גם כי ככל ששיפוע הישר יותר גדול, הוא מייצג מספר יותר גדול.



א. מיהם שלושת המספרים המיוצגים במערכת הצירים?

הסבירו כיצד השרטוט מראה כי מק-קיי צדק לגבי המקרה של $\frac{1}{6}$ ו- $\frac{1}{5}$.

מה תוכלו לומר על כל הישרים המייצגים מספרים שהם בין $\frac{1}{6}$ ל- $\frac{1}{5}$?

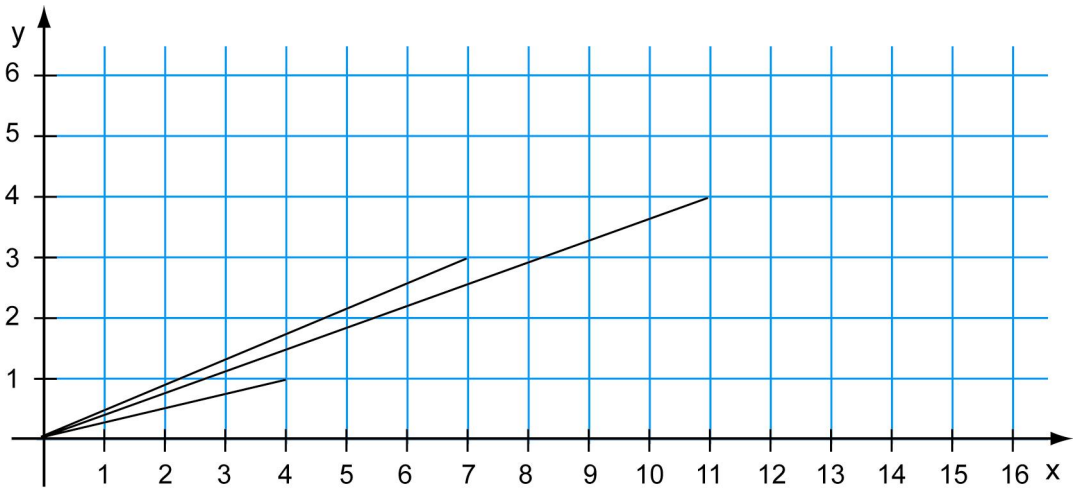
ב. בחרו זוג שברים נוסף, ומצאו עבורו מספר לפי שיטתו של מק-קיי.

בדקו בדרך חשבונית ובדרך גרפית, אם המספר שהתקבל אכן נמצא בין שני השברים.

ג. כמה זוגות שברים נוספים יש לבדוק כדי לוודא כי שיטתו של מק-קיי אכן פועלת?

בשאלה הבאה נשתמש בדוגמה כדי להציג את רעיון ההוכחה כי שיטתו של מק-קיי פועלת תמיד.

9. א. סמנו במערכת הצירים שלפניכם ב- A את הנקודה המתאימה לשבר $\frac{1}{4}$ וב- C את הנקודה המתאימה לשבר $\frac{3}{7}$.



סמנו ב- B את הנקודה המתאימה לשבר $\frac{1+3}{4+7}$ המתקבל לפי שיטת מק-קי.

היכן נמצא הישר המתאים לשבר המיוצג על-ידי הנקודה B ביחס לישרים של השברים הנתונים?

ב. חברו בקו ישר את הנקודות A ו- B ואת הנקודות C ו- B, וקראו את רעיון ההוכחה לגבי הדוגמה.

המרובע OABC הוא מקבילית, כי ניתן להראות שהשיפועים של OA ו- CB שווים, והשיפועים של AB ו- OC שווים.

הישר OB המייצג את השבר $\frac{1+3}{4+7}$ לפי שיטת מק-קיי הוא אלכסון במקבילית זו, ולכן הוא נמצא בין צלעות המקבילית. צלעות המקבילית הן חלק מן הישרים המייצגים את השברים $\frac{1}{4}$ ו- $\frac{3}{7}$.

לכן המספר $\frac{1+3}{4+7}$ נמצא בין $\frac{1}{4}$ ל- $\frac{3}{7}$, ושיטת מק-קי אכן פועלת בדוגמה זו.

כדי להוכיח את הטענה באופן כללי, יש להראות כי בשיטה זו תמיד מתקבלת מקבילית, וכי השבר הנוצר על-ידי סכום המונים וסכום המכנים, מיוצג תמיד על-ידי אלכסון המקבילית.

ג. יוסי אמר: "אם אפשר למצוא מספר רציונלי אחד בין שני מספרים רציונליים נתונים, אז אפשר למצוא אינסוף מספרים רציונליים בין כל שני מספרים רציונליים".

האם יוסי צודק? הסבירו.