בעיות מתקדמות בנושא האחוז

ד״ר איליה סיניצקי, מכללת גורדון לחינוך

תחום תוכן מתמטי (בהתאמה לסילבוס): מושגים מתקדמים בנושא האחוז.

רשימת מושגים מתמטיים הנלמדים בפעילות: תמורת האחוז, הגדלה והקטנה באחוזים, אלגוריתמים לחישוב באחוזים.

קישור לנושאים נוספים: השוואת מספרים, שבר כחלק מהכמות, פעולות חשבון במספרים עשרוניים, שטח והיקף, קנה מידה, שמורות.

זמן משוער ללימוד הנושא: 4 ש״ל.

חומרים ועזרים דרושים: 6 דפים למשתלם (נמצאים בנספח שבסוף היחידה).

הרציונל: החומר המתמטי המוצג ביחידה מבוסס על מושגי יסוד בנושא יחס ואחוזים שנלמד במסגרת יחידות קודמות של המודולה ״יחס ואחוזים״. הבעיות המתמטיות המוצגות ביחידה אמורות לחזק את הבנת מושג האחוז. מסיבה זו, הושם דגש על משימות עם תוצאות ״מפתיעות״ בתחום האחוזים. הסברים לתשובות המתקבלות מביאים את המתמקצעים להבנת תפקיד האחוז כמושג יחסי - חלק מהשלם, כאשר השלם עצמו יכול לעבור שינוי במסגרת הבעיה. פעולות באחוזים מקושרות בפעולות שינוי המספר הנתון (כולל דיון על אסימטריות של פעולות הגדלה והקטנה בשפת האחוזים), ונדונים אלגוריתמים חישוביים שונים לחישוב השינוי.

תוכן המפגש:

א. השוואת כמויות במספרים ובאחוזים,

ב. הגדלה והקטנה בשפת האחוזים,

ג. השוואת ההפרש בין המספרים באחוזים של מספר גדול ומספר קטן,

ד. שינוי חוזר מול שינוי חד-פעמי באחוזים,

ה. חילופיות תהליכי שינוי באחוזים,

ו. המחשות/יישומים גיאומטריים: על שטח והיקף מלבנים.

דפי הנחיות למרצה

מהלך המפגש:

השוואה, הגדלה והקטנה בשפת האחוזים

א. השוואת כמויות במספרים ובאחוזים

במהלך הדיון על משמעות מושג האחוז ותוך כדי התמודדות עם בעיות חישוביות פשוטות בנושא, הודגש כי אחוז הוא מדד יחסי, המתייחס לכמות מסוימת. למרות הבנת עובדה זאת "באופן כללי", התשובות המתקבלות כפתרון בעיות בשפת האחוזים, נראות לפעמים "מפתיעות" ו"לא הגיוניות".

דף למשתלם מס' 1 מלמד לראות את ההבדל בהצגת שוני בין כמויות בדרכים שונות. מתמקצעים מכירים, כמובן, שתי אופציות להצגת השוני בין כמויות - בשפה של חיסור או חילוק. הצגת שוני זה בשפת האחוזים מהווה את האופציה השלישית שאינה טריוויאלית, בגלל תלות ההתבטאות בבחירת מדד להשוואה.

הערות ל- **דף למשתלם מס' 1:**

- יש לשים לב בבעיה לכינוי התוצאה ("אגוזים") בתרגיל חיסור, ולהדגיש כי השוני בין הכמויות בוטא ביחידות של אגוזים ("ב- 100 אגוזים"). הצגת התוצאה היא בתבנית סימטרית:

  בשקית הראשונה יש ב- 150 אגוזים יותר מאשר בשנייה.

  בשקית השנייה יש ב- 150 אגוזים פחות מאשר בראשונה.

- דרך נוספת להשוואת כמויות מבוססת על מציאת יחס ביניהן, ולכן הפעולה לביצוע ההשוואה היא פעולת חילוק. חשוב לשים לב, כי הכינוי המתאים לתשובה הוא "פעמים" (ייתכן גם כי מתמקצעים ימלאו "אין כינוי"). השוני בין כמויות בוטא כאן במילים "פי כמה". גם הפעם, הצגת התוצאה היא בתבנית סימטרית:

  בשקית הראשונה יש פי 4 אגוזים יותר מאשר בשנייה.

  בשקית השנייה יש פי 4 אגוזים פחות מאשר בראשונה.

- במקרה השני, השוני בין הכמויות בוטא באמצעות המילה "פעם" שמשמעותה במקרה זה היא כמות האגוזים באחת מהשקיות (הכמות הקטנה). כאן ניתן גם לציין, כי כדי להגיע למספר האגוזים שיש בשקית הראשונה, צריך להוסיף לשקית השנייה **שלוש פעמים** את כמות האגוזים הנמצאים בשקית זאת.

  אגב, אם נחלק את מספר האגוזים בשקית השנייה במספר האגוזים שבשקית הראשונה, נקבל את המספר רבע, שמשמעותו – רבע מהכמות הגדולה.

- נתרכז בהשוואה של הכמות הגדולה עם הכמות הקטנה ונגיע לשאלה הבאה, שאלה ג, ב- **דף למשתלם מס' 1.** מסקנה חשובה מהפעילות שבדף היא שהשוואה באחוזים מאפשרת לשלב את שתי הדרכים הידועות להשוואת כמויות. במובן מסוים, זאת תשובה על השאלה "בכמה פעמים?" (להשוואת הכמויות יש להוסיף כמות כפולה מכמות האגוזים בשקית השנייה, כלומר, יש להגדיל אותה "בשתי פעמים", אך בשפת האחוזים – ב- 300%).

בגלל קושי קוגניטיבי מסוים בהבנת התוצאה (75% ולא 300% "הצפויים"), ב- **דף למשתלם מס' 1** בסעיף ד לא נשאלת שאלה דואלית ("כמה אחוזים מכמות האגוזים שבשקית הראשונה צריך לקחת ממנה, כדי לקבל את כמות האגוזים שבשקית השנייה?"). נושא זה מטופל בהמשך ב- **דף למשתלם מס' 3.**

ב. הגדלה והקטנה בשפת האחוזים

אחרי דיון על המושג 100% כיחידת מדידה ("פעם אחת"), ניתן לעבור אל **דף למשתלם מס' 2** המטפל בשינוי המספר בשפת האחוזים ובקשר בין שינוי המספר "בכמה" ו- "פי כמה".

הטיפול מתחיל ממקרה ספציפי, כדי לתת את תחושת הביטחון להתמודד עם "תשובה מוזרה": מספר גדל פי 3, אך ב- 200%. כמובן, התשובה אינה תלויה בגודל המספר הנבחר, אלא במקדם ההגדלה.

אחרי טיפול במספר דוגמאות, מתמקצעים פותרים בעיות דומות די בקלות ומגיעים לתשובות לשאלות בסעיף 3: אם נגדיל מספר פי 5, הוא יגדל ב- 400%; אם מספר גדל ב- 600% אחוזים, המספר החדש הוא פי 7 גדול מהנתון; מספר גדל ב- 100%, וזאת אומרת שהוא גדל פי 2 (הוכפל). מקרה אחד נוסח גם הפוך ב- 3ג.

מקרה של הגדלה פי מספר לא שלם מפורט יותר: אם נכפול מספר חיובי פי 2.5, נקבל 250% מהמספר הנתון, ובכך המספר גדל ב- % 150.

הנושא של הקטנת המספר טופל באופן דומה בשאלות 4-6 **בדף למשתלם מס' 2**. הודגש במיוחד כי הקטנת המספר ב- 50% שקולה לחילוקו ב- 2, והקטנה באחוזים גדולים יותר היא הקטנה "רצינית מאד": הקטנה ב-90% היא הקטנה פי 10, והקטנה ב- 99% גורמת להקטנה פי 100. בהקשר זה, כדאי להזכיר את ירידות המניות בבורסה ולתת הרגשה, עד כמה גדול ההפסד.

ברור כי בהקטנה ב- 100% כל הכמות נעלמת (נשאר 0% מהמספר), והקטנה באחוז גדול יותר מ-100% היא בלתי אפשרית.

דיון בנושא מסתיים בהצגת האי-סימטריות של הגדלות והקטנות בשפת האחוזים. (למשל, הגדלה פי 2 היא הגדלה ב- 100%, אך הקטנה פי אותו מספר היא הקטנה ב- 50% בלבד.)

ג. השוואת מספרים באחוזים "משני הצדדים"

המחשה נוספת של משמעות האחוז כחלק מכמות מסוימת, ניתן לראות בהשוואת שני מספרים ביחידות הקשורות בגודלם - באחוזים מכל אחד מהם. עבודת הכנה לבעיות מסוג זה כבר נעשתה ב**דפים למשתלם מס' 1, 2**. בעצם, **דף למשתלם מס' 3** מעבד בגרסה אחרת (ועם מספרים אחרים) את המסקנות שהתקבלו בדף הקודם. בפתיחה כדאי לציין כי אחת מהשאלות המהוות את הכותרת ללא המילה "אחוזים" היא חסרה משמעות, כי התשובות על שתי השאלות הן, בהחלט, זהות. בדיון על התוצאות המתקבלות חשוב שוב להדגיש את הסיבה לאי-סימטריות בתשובות: אותו אחוז כאן מחושב מכמויות שונות. בכך אין הפתעה, כי 25% שווים ל- 20% (**ממספר** אחר, **גדול יותר**).

צריך לציין, כי ההפרש הקבוע בין המספרים a ו- b **תמיד** מתבטא באחוזים שונים, כי אחוזים צריך לחשב דרך **יחס** בין ההפרש והמספר (a או b). יותר מזה, ההפרש תמיד מהווה אחוז גדול יותר מהמספר הקטן מאשר אחוזו מהמספר הגדול (ראו בהקשר זה את בעיה מס' 5).

שינוי חוזר באחוזים

ד. שינוי חוזר מול שינוי חד-פעמי באחוזים

הפרק טופל ב- **דף למשתלם מס' 4**. הדף נפתח בשאלות "הקלאסיות" על השוואה: הקטנה (הגדלה) חד-פעמית מול הקטנה (הגדלה) חוזרת "באותו האחוז". רוב המתמקצעים, כמובן, מכירים בעובדת השוני בין התוצאות. לכן כדאי להתמקד דווקא בשלושה דברים פחות ברורים:

- דרכי המחשה של התוצאה במודל המלבן;
- אי-תלות של תוצאת ההשוואה במספר המקורי;
- אי-תלות של תוצאת ההשוואה באחוזים המהווים את השינוי, כאשר אחוז השינוי החד-פעמי הוא סכום אחוזי השינויים החוזרים;
- הדומה והשונה בהשוואת התוצאות של הגדלה והקטנה חוזרת - הדומה והשונה בין שני תהליכים אלה (שינוי חוזר אינו שקול לשינוי חד-פעמי, תוצאת השינוי החוזר גדולה יותר בהשוואה לתוצאת השינוי החד-פעמי, ואחוז השינוי החוזר גדול יותר בהשוואה לאחוז השינוי החד-פעמי).

ה. חילופיות תהליכי שינוי באחוזים

כהמשך טבעי לטיפול בנושא שינוי חוזר, ב- **דף למשתלם מס' 5** נשאלת שאלה על השפעת סדר השינוי על התוצאה הסופית. "תחושת הבטן" לגבי הנושא היא כי סדר הפעולות הגדלה/הקטנה כן אמור להשפיע על התוצאה המתקבלת. כאשר בודקים את התהליכים בדוגמאות ספציפיות, השוויון בין התוצאות נראה כמקרי.

הדרך היעילה להוכחת החילופיות של פעולות שינוי באחוזים מבוססת אל אסטרטגיה חישובית המבטאת את השינוי באחוזים באמצעות פעולת כפל. בדרך כלל, מתמקצעים מחשבים את השינוי באחוזים באמצעות חיבור/חיסור. למשל, להקטנת המספר הנתון ב- 10%, הם מחפשים 10% ממנו ("תמורת האחוז") ומחסרים את התמורה מהמספר הנתון. להקניית שיטה נוספת לחישוב, נשאלת סדרת השאלות:

- איזה אחוז מהמספר המקורי מהווה המספר המוקטן?
- איזה חלק מהמספר הנתון מהווים 90% ממנו?
- כיצד למצוא את החלק (0.90) מהמספר הנתון a?

בעקבות השאלות ניתן לנסח, כי כדי להקטין מספר ב- 10%, צריך לכפול אותו ב- 0.9. ההכללה בשפת האותיות: להקטנת המספר ב- k% יש לכפול אותו בגורם $(1-\frac{k}{100})$.

באופן דומה, הגדלת המספר ב- $k\%$ ניתן לפרש ככפל ב- $(1+\frac{k}{100})$. למשל, הגדלה ב- 10% היא הכפלת המספר הנתון פי 1.1.

טכניקה זאת מאפשרת לראות בקלות, כי:

- בגלל חוק הקיבוץ וחוק החילוף בכפל, סדר השינויים אינו משפיע על התוצאה. למשל, בהקטנת המספר ב- 20% ואחר-כך ב- 10% או בסדר הפוך, נקבל $0.9\cdot(0.8a)=(0.9\cdot0.8)\cdot a=(0.8\cdot0.9)\cdot a=0.8\cdot(0.9a)$
- הנ"ל נכון גם למקרה של שינוים "בכיוונים נגדיים" - שילוב הגדלה והקטנה.
- אחוז ההגדלה הסופית בתהליך הגדלה דו-שלבית גדול יותר מאחוז השינוי החד-פעמי השווה לסכום אחוזי השינויים. למשל, הגדלה ב- 10% ואחר כך בעוד 20% מתבטאת כמכפלת המספרים 1.1×1.2 . בעזרת חוק הפילוג ניתן לרשום, כי זה מגדיל את המספר הנתון **ביותר מ- 30%**: $1.1\times1.2=(1+0.1)\times(1+0.2)=1+0.1+0.2+0.1\times0.2>1+0.3$
- הגדלת המספר באחוז מסוים ולאחר מכן הקטנה באותו אחוז, גורמת להקטנת המספר המקורי. כך, הגדלה ב- 10% ואחר כך הקטנה באותו אחוז מקטינים את המספר המקורי (מכפלת המספרים 0.9 ו- 1.1 שווה ל- 0.99). באופן כללי, $(1+\frac{k}{100})\times(1-\frac{k}{100})<1$

מהנ"ל ניתן לראות גם את אחוז ההקטנה. למשל, הקטנת המספר ב-20% והגדלת התוצאה ב-20% מביאים להקטנת המספר המקורי ב- 4%.

את התופעה האחרונה כדאי לקשור גם בפעילויות 3, 5 ב- **דף למשתלם מס' 3**: ל"חזרה" ממספר שהוקטן למספר המקורי יש להגדיל את המספר שהוקטן באחוז גדול יותר מאשר האחוז בו הוקטן המספר המקורי, שינוי באחוז זהה "אינו מספיק".

ו. המחשות/יישומים גיאומטריים: על שטח והיקף מלבנים

שינויים דו-פעמיים באחוזים ניתן להמחיש במודל שטח מלבן. שינוי ראשון מתייחס לאורכי זוג אחד של צלעות נגדיות, והשני – לזוג האחר. בעיות מסוג זה מוצגות ב- **דף למשתלם מס' 6**. בין היתר, טופל כאן שינוי זהה של כל צלעות הריבוע והשפעתו על שטח הריבוע.

יש לציין כי שילוב של הקטנה של זוג צלעות נגדיות עם הגדלתו באותו אחוז של הזוג הנוסף של צלעות המלבן, **תמיד** גורמת **להקטנת שטחו**.

כאשר המלבן הנתון הוא ריבוע, פעולה זאת שומרת על היקף הצורה. זאת דרך נוספת להסביר כי בין כל המלבנים בעלי אותו היקף, לריבוע יש שטח מרבי.

הערות נוספות לסיכום

א. כל החומר המוצג בסדנה זאת מתייחס, בעיקר, לחקר השינוי במספרים בשפת האחוזים. צריך שוב ושוב לציין כי את כל "ההפתעות" ניתן להסביר מאותה הסיבה: שמירה או אי-שמירה על השלם המהווה את הבסיס לחישוב תמורת האחוז.

ב. סוג נוסף של בעיות מתקדמות בנושא אחוזים קשור בחישובי ריכוז, אך בהן כדאי לטפל במסגרת הנושא "חקר נתונים" בפרק ממוצעים.

נספחים

דף למשתלם מס׳ 1

פחות או יותר: השוואת כמויות במספרים ובאחוזים

דף זה מתייחס לסיטואציה הבאה: **לרינה יש שתי שקיות עם אגוזים: בראשונה 200 אגוזים ובשנייה 50 אגוזים.**

א. באיזו שקית יש יותר אגוזים?

ב. רשמו שני תרגילים שונים המאפשרים לכמת את הקשר שציינתם בסעיף א בשתי דרכים שונות.

דרך א. סוג התרגיל: __________. התרגיל: ____________ כינוי התוצאה: ____________.

פירושי התוצאה: בשקית הראשונה יש ______________________________________.

בשקית השנייה יש ____.

דרך ב. סוג התרגיל: __________. התרגיל: ______________ כינוי התוצאה: __________.

פירושי התוצאה: בשקית הראשונה יש ______________________________________.

בשקית השנייה יש ______________________________________.

ג. אם נסמן את כמות האגוזים בשקית השנייה ב- 100%, מה ניתן לומר ללא חישוב על אחוז שמהווה כמות האגוזים בשקית הראשונה?

כמות האגוזים בשקית הראשונה מהווה (יותר, פחות) __________ מ- 100% של כמות האגוזים בשקית השנייה.

כמה אחוזים מהווה כמות האגוזים בשקית הראשונה מכמות האגוזים בשקית השנייה?

כמה אחוזים מכמות האגוזים שבשקית השנייה צריך להוסיף לשקית זאת, כדי לקבל את כמות האגוזים שבשקית הראשונה?

ד. אם נסמן את כמות האגוזים בשקית הראשונה ב- 100%, מה ניתן לומר ללא חישוב על האחוז שמהווה כמות האגוזים בשקית השנייה?

כמות האגוזים בשקית השנייה מהווה (יותר, פחות) __________ מ- 100% של כמות האגוזים בשקית הראשונה.

כמה אחוזים מהווה כמות האגוזים בשקית הראשונה מכמות האגוזים בשקית השנייה?

דף למשתלם מס' 2

"בכמה" ו- "פי כמה" באחוזים

1. הגדלה פי 3

א. נתון המספר 50. הוא הוגדל פי שלושה. איזה מספר מתקבל?

כמה אחוזים מהווה המספר החדש מהמספר 50?

בכמה אחוזים גדל המספר 50?

ב. בחרו במספר אחר וחזרו על הפעולות שבסעיף א. מה קיבלתם?

ג. האם השינוי באחוזים שקיבלתם תלוי בגודל המספר הנבחר?

מהי מסקנתכם?

הגדלת מספר מסוים פי 3 היא הגדלת מספר זה ב- ________________.

במילים אחרות, הגדלת מספר ב- %_____ גורמת ל-________________ פי _______.

2. חזרו על הפעילות שבסעיף 1 עם הגדלה פי מספר אחר (אך שונה מ- 2). נסחו את מסקנתכם.

3. השלימו את החסר בטענות הבאות:

א. אם נגדיל מספר פי 5, הוא יגדל ב- %_______.

ב. אם מספר גדל ב- 600% אחוזים, המספר החדש גדול פי_______ מהמספר מהנתון.

ב. מספר גדל ב- 100%, כלומר, הוא _________________.

ג. להגדיל מספר פי 2 זה אומר להגדיל אותו ב- %_____________.

ד. אם נכפול מספר חיובי פי 2.5, נקבל %_____ של המספר הנתון, ובכך המספר גדל ב- %_____.

ה. אם נוסיף למספר 50% ממנו, הוא יגדל פי- _____.

דף למשתלם מס' 2 - המשך

4. הקטנה פי 2

א. בחרו במספר מסוים והקטינו אותו פי שניים.

ב. כמה אחוזים מהווה המספר החדש מהמספר הנתון?

בכמה אחוזים הוקטן המספר הנתון?

ג. האם השינוי באחוזים שקיבלתם תלוי בגודל המספר הנבחר? מהי מסקנתכם?

הקטנת מספר מסוים פי 2 היא הקטנתו ב- %______________.

במילים אחרות, הקטנת המספר ב- %_____ גורמת ל-________________ פי ______.

5. הקטנה פי 4

א. בחרו במספר מסוים והקטינו אותו פי ארבעה.

כמה אחוזים מהווה המספר החדש מהמספר הנתון?

בכמה אחוזים הוקטן המספר הנתון?

ב. האם השינוי באחוזים שקיבלתם תלוי בגודל המספר הנבחר? מהי מסקנתכם?

הקטנת מספר מסוים פי 4 היא הקטנתו ב- %______________.

במילים אחרות, הקטנת המספר ב- %_____ גורמת ל-________________ פי ______.

6. בכמה אחוזים ניתן להקטין?

בחרו מספר מסוים והקטינו אותו באחוז מסוים.

בין היתר, נסו להקטין את המספר ב- 90%, ב- 98%, ב- 99%.

מהו המספר המתקבל אחרי הקטנת המספר ב- 100%?

מהי מסקנתכם?

7. סיכום תוצאות

הגדלת מספר פי 2 זהה להגדלתו ב- 100%, אך הקטנתו פי 2 זהה להקטנתו ב- %____.

הגדלת מספר פי 4 זהה להגדלתו ב- %____, אך הקטנתו פי 4 זהה להקטנתו ב- %____.

לחסר ממספר 50% ממנו, זה להקטין אותו פי ____, אך להוסיף למספר 50% ממנו, אומר להגדיל אותו פי _____.

להוסיף למספר 400% זה אומר לכפול אותו פי_____, אך לחסר ממספר 400% ממנו ______.

דף למשתלם מס׳ 3

בכמה אחוזים גדול? בכמה אחוזים קטן?

1. ידוע לכם, כי המספר 200 גדול פי 2 מהמספר 100.

   בכמה אחוזים גדול המספר 200 מהמספר 100?

   האם נובע מזה שגם המספר 100 קטן מהמספר 200 ב- 100%? למה?

   בכמה אחוזים המספר 100 קטן מהמספר 200?

2. האם מסקנותיכם תקיפות לגבי כל זוג מספרים שאחד מהם הוא גדול פי 2 מהשני?

   מהי ההכללה?

3. המספר 200 גדול מהמספר 160 ב- _____.

   בכמה אחוזים קטן המספר 160 מהמספר 200?

   בכמה אחוזים גדול המספר 200 מהמספר 160?

4. האם קיים זוג מספרים שונים, שאחד מהם גדול מהשני באחוז מסוים, והשני קטן מהגדול באותו האחוז? נמקו את דעתכם.

5. אם מספר מסוים גדול מהמספר השני ב- d %, אז המספר השני קטן מהגדול ב- __________. נמקו את דעתכם.

6. חברו בעיה מחיי יומיום הממחישה את המסקנות שהסקתם בסעיפים 4, 5.

דף למשתלם מס' 4

הוזלה והתייקרות – בשלבים או בבת-אחת?

1. בחנות א ובחנות ב הופיעו למכירה מוצרים באותו מחיר. במבצע סוף העונה בחנות א הוזלו המוצרים ב- 15%, ואחר כך בעוד 15%.
מחיריהם של אותם מוצרים בחנות ב הוזלו באופן חד-פעמי ב- 30%.

א. אם ידוע, כי המחיר ההתחלתי של המוצרים הוא 200 ₪, מהו מחיר המוצרים בכל אחת מהחנויות אחרי ההנחות?

ב. אם ידוע, כי המחיר ההתחלתי של המוצרים הוא 300 ₪, מהו מחיר המוצרים בכל אחת מהחנויות אחרי ההנחות?

מה ניתן לומר על התוצאות שקיבלתם בכל אחד מהמקרים?

האם, לדעתם, אחת מהתהליכים מביא **תמיד** למחיר נמוך יותר מאשר השני (בתנאי שהמחירים התחלתיים שווים)?

ג. האם ניתן לצפות מראש (ללא חישוב המחירים), באיזו חנות המחיר אחרי ההנחות יהיה נמוך יותר? למה? המחישו את הסברכם.

2. בדקו, כיצד ישתנו התוצאות אם אחוזי ההוזלה יהיו:

- 20% פעמיים, מול הוזלה חד-פעמית של 40%;
- 25% פעמיים, מול הוזלה חד-פעמית של 50%;
- הוזלה ב- 20% ואחר כך ב- 10% מול הוזלה ב- 30% בבת אחת.

האם יש צורך בחישוב מספרי?
מהי מסקנתכם הכללית?

3. מהי השערתכם לגבי תהליך דומה, אך של התייקרות במקום הוזלה?

בדקו אותה ונסחו את מסקנותיכם לגבי התייקרות דו-שלבית בהשוואה להתייקרות חד-פעמית.

מה דומה ומה שונה בין התוצאות המתקבלות בתהליכי שינוי חוזר של הוזלה ושל התייקרות?

דף למשתלם מס' 5

שינוי חוזר באחוזים – האם הסדר חשוב?

1. בחנות א ובחנות ב הופיעו למכירה מוצרים באותו מחיר. במבצע סוף העונה בחנות א הוזלו המוצרים ב- 15%, ואחר כך בעוד 10%. בחנות ב אותן ההוזלות בוצעו בסדר הפוך.

א. אם ידוע, כי המחיר ההתחלתי של מוצרים הוא 200 ₪, מהו מחיר המוצרים בכל אחת מהחנויות אחרי ההנחות?
האם, לדעתכם, הקשר בין המחירים הסופיים בשתי החנויות תלוי במחיר התחלתי?

ב. נסו להסביר, מדוע אחוז ההוזלה הסופית לא משתנה עם החלפת סדר ההנחות.
הערה: שימו לב, כי הורדת 10% מהמספר משאירה 90% ממנו. בכך, ניתן לרשום אותה לא רק באמצעות פעולת חיסור, אלא גם דרך פעולת כפל במספר ____________.

2. א. מחיר המוצר **הוגדל** ב- 10%, ומאוחר יותר **הוקטן** ב- 10%. מה נכון לגבי המחיר הסופי של המוצר (אחרי שני השינויים): הוא זול יותר מאשר היה לפני השינויים, מחירו חזר למחירו המקורי, או הוא יקר יותר מאשר היה בהתחלה?

בדקו מהו השינוי במחיר בהשוואה למחיר המקורי.

ב. הפעם סדר השינויים הפוך בהשוואה לתהליך הקודם: מחיר המוצר **הוקטן** ב- 10%, ומאוחר יותר **הוגדל** ב- 10%. מה נכון לגבי המחיר הסופי של המוצר (אחרי שני השינויים): הוא זול יותר מאשר היה לפני השינויים, מחירו חזר למחירו המקורי, או הוא יקר יותר מאשר היה בהתחלה?

בדקו מהו השינוי במחיר בהשוואה למחיר המקורי.

ג. נסו לרשום את השינויים באמצעות פעולת הכפל ולהסביר את התוצאות שקיבלתם.

3. נסחו את מסקנותיכם לגבי:

א. הקטנות חוזרות של מספר נתון;

ב. הגדלות חוזרות של מספר נתון;

ג. הקטנה והגדלה של מספר נתון באותו האחוז.

דף למשתלם מס׳ 6

שינויים חוזרים בגיאומטריה

1. נתון ריבוע שאורך צלעו 10 ס״מ. כל אחת מצלעותיו הוגדלה ב- 10%.

   א. בכמה אחוז השתנה (גדל) היקפו ובכמה אחוז השתנה שטחו?

   ב. האם אחוז השינוי תלוי באורך הצלע?

   ג. מהי הכללתכם?

2. נתון ריבוע שאורך צלעו 10 ס״מ. כל אחת מצלעותיו הוקטנה ב- 10%.

   א. בכמה אחוז השתנה (קטן) היקפו ובכמה אחוז השתנה שטחו?

   ב. האם אחוז השינוי תלוי באורך הצלע?

   ג. מהי הכללתכם?

3. נתון מלבן בגודל 10 ס״מ על 20 ס״מ .

א. הצלע הארוכה שלו קוצרה ב- 10%, אך הצלע הקצרה הוארכה ב- 10%. כיצד השתנה שטחו?

ב. הצלע הקצרה שלו קוצרה ב- 10%, אך הצלע הארוכה הוארכה ב- 10%. כיצד השתנה שטחו?

ג. האם, לדעתכם, התוצאות שקיבלתם תלויות באורכי הצלעות של המלבן הנתון ובאחוז השינוי?

ד. נסו לבטא את שטח המלבן לפני ואחרי שינוי אורכי הצלעות, השתמשו ב- a וב- b לייצוג אורכי הצלעות.

4. בדקו את השינוי של ההיקף ושל השטח של ריבוע בעל צלע a, אחרי הגדלת אחת מזוג צלעותיו הנגדיות באחוז מסוים והקטנת הזוג האחר באותו האחוז.

   נסחו את מסקנתכם.