

## מושגים בסיסיים בנושא האחוז

ד"ר איליה סיניצקי, מכללת גורדון לחינוך

- תחום תוכן מתמטי (בהתאמה לסילבוס): מושגים בסיסיים בנושא היחס.
- רשימת מושגים מתמטיים שנלמדים בפעילות: אחוז, חלק מהשלם, תמורת האחוז.
- קישור לנושאים נוספים: שברים פשוטים, מספרים עשרוניים, יחס, שטח.
- זמן משוער ללימוד הנושא: 4 ש"ל.
- חומרים ועזרים דרושים: 4 דפים למשתלם (נמצאים בנספחים שבסוף היחידה).

**הרציונל:** החומר המתמטי שמוצג ביחידה מתייחס למושג האחוז כאל אחד ממונחי היסוד בהתפתחות החשיבה הפרופורציונלית. מכאן נגזרים: משמעויות וייצוגים שונים של מושג האחוז, אלגוריתמים חישוביים לפתרון בעיות הקשורות באחוזים, אומדן ויישומים רבים של המושג. במידה מסוימת, חומר הסדנה משלים חומרים של מכון ויצמן בנושא. בדפים למשתלם הושם דגש על הבנת מושג האחוז וקשריו עם מושגים מתמטיים אחרים, על מיון בעיות שונות הקשורות באחוזים ועל האומדן בתחום האחוזים.

### תוכן המפגש:

- מה זה "אחוז"?
- מה מודד האחוז?
- מושגי יסוד הקשורים באחוזים,
- אחוז כשבר וכיחס,
- המחשות ויזואליות של אחוזים,
- אומדן באחוזים,
- סוגי בעיות באחוזים,
- אלגוריתמים לחישוב אחוזים,
- חוק החילוף באחוזים.

## דפי הנחיות למרצה

### מהלך המפגש

#### 1. משמעות מושג האחוז

א. מה זה "אחוז"?

נצא מתוך הנחה שהמתמקצעים מכירים את נושא האחוזים, ולכן בסדנה כדאי לפתוח בהצגת שאלות "פרובוקטיביות", כגון:

- איפה יש יותר שומן, בכד החלב או בכף שמנת?
  - הוספתנו מים מתוקים (ללא מלח) למי ים המלח. האם כמות המלח השתנתה? מהי משמעות המשפט "המים כעת מלוחים פחות".
  - ההפרש בין משכורת שר ומשכורת מורה במדינה מסוימת שווה ל- 1000 לירות (של מדינה זאת). מה ניתן לומר על הפרש משכורות זה?
- בכל השאלות האלו מוצגת בעיה של השוואת חלקים מתוך שלם. ברור כי כמות השומן בכד החלב היא גדולה יותר מאשר בכף שמנת, אך בהרבה מקרים אנחנו מחפשים את **המדד**, שבאמצעותו ניתן להעריך תכונה כמותית של אובייקט מסוים ללא תלות בגודלו. זאת אומרת, מדד זה בפירוש קשור לא בכמות אלא ביחס בין כמויות.

ב. מה מודד האחוז?

מתיאור זה נובע כי האחוז מודד את החלק של השלם (אך ביחידות מיוחדות). למשל, אם נרצה לדעת עד כמה מלוחים מים, ניתן למלא דלי מים, להרתיח אותם, להמתין עד האידיוי המלא ולשקול את השארית המוצקה. אך ברור, כי משקל זה תלוי בגודל הדלי. ניתן להחליט שנמדוד את משקל המלח בגרמים לכל לקילוגרם של מים (תמיסת המלח). הגדלת כמות התמיסה פי שניים גורמת גם להגדלת כמות המלח בה פי שניים. השלב הבא הוא מדידת הכמויות באותן היחידות: משקל המלח (בגרמים) בכל גרם של תמיסה. בגישה זו, אנחנו מודדים את ריכוז המלח בתמיסה, ובהכללה – ריכוז של חלק מסוים בכמות כולה. ברור כי המספר המתקבל הוא שבר אמיתי (או שהוא שווה ל- 1 כאשר מדובר על חומר בנוי ממרכיב אחד בלבד). לנוחיות ההשוואה בין התוצאות, כדאי לרשום אותם כמספרים עשרוניים. בהרבה מקרים בחישוב ניתן להסתפק בשתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית, וסימן מיוחד הופך את הכתיבה לנוחה יותר – ללא נקודה עשרונית. אחוז הוא חלק מהשלם שנמדד במספר עשרוני ומבוטא במאיות.

ג. טיפת שפה והיסטוריה

במושג האחוז השתמשו בהודו כבר במאה ה-5. בעצם, זאת הייתה הרחבה של שיטת הפוזיציה לתחום המספרים הלא שלמים. באופו טבעי, הסימון נשאר קרוב למספרים שלמים, אך למאיות הומצא סימן מיוחד. אל אירופה המושג הגיע רק במאה ה-16, עם שילוב שברים עשרוניים בחישובים ועם הסימן המסביר את הפעולה כמנה: %. שם המושג per cent – "ל- מאה" מסביר את משמעותו.

יש להדגיש את הדו-משמעות של המילה "אחוז": היא מתייחסת גם לחלק מסוים – מאית, וגם לתוצאות אחרות ("מהו אחוז השומן במוצר?" – אם זה בדיוק 1%, אז אין על מה לשאול). שימוש זה במילה "אחוז" דומה לשימוש היום-יומי ביחידות מדידה בתפקיד של המדידה עצמה ("כמה מטרים?" במקום "מהו האורך?" וכו'), אך במקרה של אחוזים זהו הנוסח הנורמטיבי.

#### ד. מושגים ובעיות הקשורים באחוזים

**דף למשתלם מס' 1** מתייחס למושגים ולסוגי בעיות בסיסיות הקשורים במושג האחוז. הערות לשאלות שב- **דף למשתלם מס' 1**:

- כדאי לבקש מהמתמקצעים את ההגדרה המדויקת של מושג האחוז: "אחוז (אחד) מהמספר הוא מאית מהמספר הזה", וממנה לגזור את הנוסחאות לחישוב האחוזים.
- לאחוז מסוים מהמספר הנתון קיים שם (דידקטי) שמוכר לרוב המתמקצעים: "תמורת האחוז". יש להזכיר שתמורת  $a\%$  מהמספר 100 (ורק ממנו!) שווה בדיוק ל- $a$ .
- מצד שני, בהגדלת האחוז פי  $n$  מאותה כמות, התמורה גם גדלה פי  $n$ , וזאת המסקנה אותה מצפים מהמתמקצעים בסעיף ה.
- בהתאם לשמות המקובלים בהוראת נושא זה (כמות שלמה, אחוז ותמורת האחוז), קיימים שלושה סוגי בעיות של חיפוש המספר החסר על סמך שני הנתונים האחרים. בסעיף האחרון מתכוונים לבעיות מחיי יומיום מתחומים שונים (התפלגויות באוכלוסיות שונות, מחירים, תערובות וכדומה).

#### 2. "חוש לאחוזים": חישובים, המחשבות ואומדן

א. "איזה חלק?"

בפתיחת החלק כדאי לחזור להצגת אחוזים "נפוצים" כשברים פשוטים. באותו הקשר כדאי גם להזכיר את ההצגה של אחוזים כשברים עשרוניים, הנובעת באופן ישיר מהגדרתו של המושג ( $1\% = 0.01$ , ובהתאם,  $m\% = m \times 0.01$ ). חומר זה ברובו מוכר למתמקצעים, אך חשוב לחזור עליו לפני הדיון הבא על ייצוגים שונים ואומדן של אחוז, ולפני הפעילויות של הגדלה/הקטנה באחוזים. לחיזוק הקשר בין אחוזים ושברים פשוטים ניתן גם להשתמש ב- **דף למשתלם מס' 2**. בין התוצאות שבטבלה יש להדגיש את ההצגות של אחוזים שמעל 100% - השבר, כמובן, הוא מדומה. לחישוב התוצאות ניתן להשתמש באלגוריתמים מגוונים ולא דווקא בצמצום השבר עם מכנה 100. למשל,  $75\% = 50\% + \frac{1}{2} \cdot 50\%$ .

#### ב. המחשבות ויזואליות של אחוזים

ב- **דף למשתלם מס' 3** מסורטטים מלבנים שסומנו בתוכם חלקים מסוימים. השאלות המוצגות עוזרות למתמקצעים בהמחשת מושג האחוז כחלק מהשלם, ומזמינות הרכבת שאלות לתלמידים ללימוד הנושא. בין היתר, טופל נושא השלמה עד שלם בשפת האחוזים, והשפעת שינוי השלם על האחוז. להלן תשובות, הערות והסברים ל- **דף למשתלם מס' 3**.

- בשאלה 1א ההתלבטות היא בין התשובות (2) ו-(4), אך אורך הבסיס של המשולש המושחר הוא פחות מחצי בסיס המלבן, ומסיבה זאת שטחו פחות מרבע שטחו של המלבן. סיבות דומות מביאות לתשובה (3) למלבן ב.
- אם נעביר אלכסון במלבן ג, ניתן לראות שהטרפז המושחר בנוי משני משולשים, כאשר הראשון ממלא חצי משטח המלבן, אך השטח של השני הוא פחות משטח המשולש הלבן. נובע מכך, שהשטח המסומן מהווה פחות מ- 75% משטח המלבן כולו.
- דרך נוספת לקביעת התשובה קשורה בבדיקת האחוז של חלק השטח הלא מסומן של המלבן (החלק הלבן). נושא זה מטופל בסעיף 2 של הדף.
- חשוב להדגיש כי ריבוע ד מחולק לשני טרפזים חופפים, כי השוק המשופעת המשותפת שלהם עוברת דרך נקודת המפגש של האלכסונים ("מרכז הריבוע"). מסיבה זאת כל אחד מהטרפזים ממחיש בדיוק 50% של שטח המלבן.
- לכל צורה השטח הלא מושחר יחד עם השטח המושחר מהווים, כמובן, את השטח כולו ("100% של השטח"), כך שניתן למצוא את האחוז המתאים לשטח הלבן דרך חיסור התוצאה של שאלה 1 מ- 100%. במלבן ג, אורך בסיס המשולש הוא כ- 2/3 מאורך הצלע "הקצרה" של המלבן, ואז שטחו מהווה כ- 1/3 משטח המלבן.
- הערה כללית: חשוב מאוד להשתמש בשפה מתמטית נכונה, ולציין כי בכל הדוגמאות המוצגות מדובר על השוואת שטחים, ולא על הצורות עצמן (לא "הצורה היא שליש מהמלבן", אלא "שטח הצורה הוא שליש משטח המלבן").
- בכל המקרים, גיאומטרית ניתן להמחיש אחוזים רק עד ל- 100%, והסיבה לכך, שהשטח של כל צורה "שלמה" מהווה את השלם בהמחשה, ושטח הצורה המסומנת **בתוכה** מהווה חלק מהשלם. אם צורה מוכללת בתוך צורה אחרת, שטחה לא גדול משטח הצורה המכילה (אגב, המשפט אינו תמיד נכון לגבי היקף! מסיבה זאת ההמחשה נעשית באמצעות שטחים).
- לגבי שאלה 2, שטחי כל החלקים הלא מסומנים ("לבנים"), כמובן, מציגים את האחוזים המשלימים את האחוזים, שמצאנו בשאלה 1, ל-100%, וזאת בדיוק השלמה לשלם.
- בהתמודדות עם שאלה 3 ניתן לראות שתי אסטרטגיות שונות: סימון הגזרה (על-ידי שני רדיוסים) או סימון המקטע (על-ידי מיתר). יש להתייחס לכל אחת מהשיטות, ולדבר על **המקרה** המיוחד (של 50%) כאשר שתי השיטות מביאות אותה המחשה.

### ג. השוואות ללא חישוב - אומדן באחוזים

- לפני התמודדות עם בעיות הקשורות באחוזים, כדאי לטפל בהשוואה ללא חישוב בתחום האחוזים בסוגי ההשוואה הבאים:
- **השוואה בין כמות ואחוז ממנה.** כאן יש לציין, בין היתר, את המקרה כאשר האחוז הוא 100% או מעל 100%.
- **השוואת אחוזים שונים של אותה כמות.** חשוב להגיע למסקנה כי היחס בין התמורות תלוי רק באחוזים שהם מייצגים, ולא בכמות הנתונה. לא מספיק להסתפק בהחלטה, איזו תמורה גדולה יותר: המתמקצעים מתבקשים לנסח משפטים מהסוג: 20% של כמות מסוימת גדולים פי 2 מ- 10% של אותה הכמות, וכדומה.

- **השוואת אחוזים שווים מכמויות שונות.** בדומה למקרה הקודם, על המתמקצעים להגיע למסקנה, כי אותו אחוז מכמות כפולה נותן תמורה כפולה וכדומה, ללא תלות במספר האחוזים. וגם הפוך, כאשר 18% מכמות אחת גדולים פי 3 מ-18% מכמות אחרת, אז אותו יחס קיים בין הכמויות עצמן – וגם בין התמורות המבטאות את אותם אחוזים מהן.
- **השוואה דרך מתווך** המשלבת את המקרים הקודמים (למשל, השוואה בין אחוז גדול יותר מכמות גדולה יותר, עם אחוז קטן יותר מכמות קטנה יותר).
- בהתאם לרמת הקבוצה, אפשר להציג את הדוגמאות המתאימות לקבוצה, או להציג את סוגי הדוגמאות ולבקש להבנות את הדוגמאות הרלוונטיות לכיתת תלמידים מסוימת.

### 3. סוגי בעיות באחוזים ואלגוריתמים חישוביים

#### א. מיון בעיות אלמנטריות בנושא אחוזים

דוגמאות לבעיות אלו מוצגות ב- **דף למשתלם מס' 4**. בכל אחד מהמקרים כדאי להדגיש את הקשר בין מושג האחוז לבין מושג החלק. על-סמך הבנת מושג האחוז כחלק מן השלם, ניתן להבחין בשלושה סוגי בעיות הקשורות באחוזים:

- **הצגת החלק הנתון באחוזים.** בבעיות אלו **היחס** בין חלק ושלם הוצג כשבר פשוט, והמתמודד עם הבעיה מציג את אותו היחס בשפה אחרת – בשפת האחוזים. צריך להדגיש כי היחס בבעיה זאת הוא יחס מיוחד – יחס בין חלק ושלם.
  - **מציאת חלק מהשלם.** סוג בעיות זה מכונה בשפה דידיקטית בשם: מציאת תמורת האחוז. עקרוני כאן להדגיש כי לאותו סוג שייכות גם בעיות שבהן החלק גדול מ-1. בהתאם, הכמות המהווה את החלק תהיה גדולה יותר מ-"השלם" הנתון.
  - **מציאת שלם לפי החלק.** כמו בבעיות מילוליות הקשורות בחלקים, בעיות אלו, ככלל, הן הקשות ביותר ללומדים. כדאי לא להסתפק בפתרון, ולבצע גם את תהליך "בדיקת התשובה": לפי השלם שהתגלה למצוא מחדש את החלק הנתון – ובכך להראות את הקשר בין שני סוגי הבעיות. דוגמה: **הוצאות המזון במשפחה מגיעות ל-2500 ₪ בחודש ומהוות 20% מתקציבה. מהו תקציב המשפחה? כדאי, אחרי מציאת השלם, לשאול שאלות נוספות לגבי סעיפים נוספים של התקציב המהווים, למשל, 10% מהתקציב, 20% ממנו וכו'.**
- בדיון על הבעיות המוצגות ב- **דף למשתלם מס' 4** צריך לדון במשמעות התשובות המתקבלות, כולל, כמובן, גם כינוי התשובה. חשוב ליישם את הנושא באמצעות חיבור בעיות דומות על-ידי המתמקצעים וניתוח תוצאותיהן. זה כולל בדיקת קיום התשובה בתחום המתאים (למשל, מספר טבעי של אנשים, ריכוז מתחת ל-100% וכדומה) ואומדן התשובה.

## ב. אלגוריתמים לחישוב אחוזים

מבלי לגעת בסכמות שונות לחישוב באחוזים<sup>1</sup>, אנחנו רק מציינים את הנוסחה הבסיסית לחישוב:

$$\frac{ab}{100} = \frac{b}{100} \cdot a \quad \text{a\% מ-b שווה ל-}$$

בנוסחה הכתובה בצורה זאת הודגש, כי אחוז אחד הוא מאית של המספר, וכדי למצוא את a% ממנו, צריך לחלק אותו ב- 100 ולכפול את התוצאה ב- a. באמצעות נוסחה זאת ניתן לפתור גם בעיות חיפוש השלם לפי האחוז הנתון: אם 40% ממספר מסוים b שווה ל- 60, למה שווה b? את

$$\text{דרך הפתרון ניתן לרשום בצורה הבאה: } b = 60 \cdot \frac{40}{100} \text{ ומכאן } \frac{40}{100} \cdot b = 60 : \frac{40}{100} = 60 \cdot \frac{100}{40} = 150$$

כמובן, צריך לתרגל אסטרטגיות חישוביות שונות המבוססות, בין היתר, על הטבלה של האחוזים השימושיים ביותר.

## ג. מקרה נוסף להשוואה ללא חישוב - חוק החילוף האחוזים

בין הדוגמאות לחישוב האחוזים, כדאי לציין מקרה מיוחד של השוואת אחוזים שונים מכמויות שונות. אחרי קבלת השוויון בין 30% מ- 40 ו- 40% מ- 30; בין 35% מ- 20 ו- 20% מ- 35 וכדומה, ניתן לנסח את ההכללה ("חוק החילוף באחוזים", כאשר הצדקתו הוא חוק החילוף של הכפל):

**a% מ-b שווה ל- b% מ-a.** מסקנה זאת נובעת, כמובן, מהסימטריה של הנוסחה הבסיסית לחישוב האחוזים. לחוק החילוף באחוזים יש גם יישומים בחישוב יעיל. למשל, 28% מהמספר 25 זה בדיוק רבע של המספר 28; 56% מהמספר 12.5 זאת שמינית (12.5%) מהמספר 56 וכו'.

מקרים נוספים של השוואה ללא חישוב שייכים לנושא "הרחבות בנושא האחוז" ומופיעים בהמשך המודולה.

<sup>1</sup> דיון רחב בנושא זה, כולל הקשרים דידקטיים שונים, ניתן למצוא בחומרים של מכון ויצמן.

**נספחים****דף למשתלם מס' 1****אחוזים : מושגים וסוגי בעיות בסיסיים**

א. בחרו במספר כלשהו והסבירו בשפה של חלקים, מהו אחוז אחד ממספר נתון.

ב. לפי הגדרתכם, מהו אחוז אחד מהמספר 100? כיצד חישבתם?

ג. בחרו שני מספרים והמחישו את ההגדרה של מציאת האחוז מהמספרים שבחרתם.

ד. בחרו מספר. הסבירו את השיטה למציאת אחוז כלשהו ממספר נתון. המחישו אותה במציאת 2%, 10%, 20%, 50%, 100% מהמספר שבחרתם.

ה. מהו השם הדידקטי המשותף לכמויות שמצאתם בסעיף הקודם?

מהו הקשר בין התוצאות שמצאתם?

**נסחו את מסקנתכם: "אם הוצאת (הקטנת) האחוז *le* אותה כאות פי מספר מסוים,**

---

”

---

ו. בנוסף לחישוב תמורת האחוז, מהן הבעיות הטיפוסיות הנוספות הקשורות במושג האחוז?

ז. תנו דוגמה מוחשית לכל סוג בעיות שהזכרתם בסעיף הקודם.

דף למשתלם מס' 2

אחוזים הם שברים – ולהפך

א. השלימו את הטבלה המבטאת את האחוזים כחלקים מהמספר.

חלק	אחוז	חלק	אחוז	חלק	אחוז
$\frac{7}{10}$			7.5%	$\frac{1}{50}$	2%
$\frac{3}{5}$			33.33%		50%
$\frac{3}{50}$		$\approx \frac{2}{3}$	66.66%		15%
$\frac{4}{5}$			200%		40%
$\frac{4}{25}$			150%		30%
$\frac{3}{1}$		$\frac{5}{2}$	250%		75%
$\frac{5}{4}$			450%		5%
$\frac{9}{4}$			700%		2.5%

ב. האם בכל פעם בצעתם את ההמרה בדרך סטנדרטית?

שימו לב לקשר בין התוצאות, והסבירו מהן הדרכים הנוספות לקבלת חלק מן התשובות.

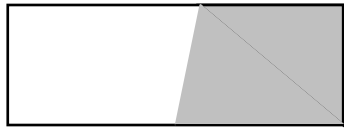
ג. מה ניתן לומר על השברים המציגים אחוזים שמעל 100%? למה?



דף למשתלם מס' 3

לראות את האחוז

1. לכל אחד מהמלבנים, העריכו איזה אחוז משטח הצורה כולה הושחר בציור.



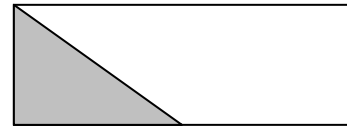
(ב)

(1) יותר מ- 50%

(2) כ- 25%

(3) כ- 40%

(4) פחות מ- 30%



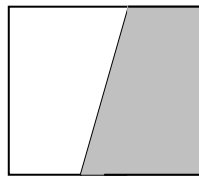
(א)

(1) פחות מ- 10%

(2) כ- 20%

(3) בערך 50%

(4) כ- 30%



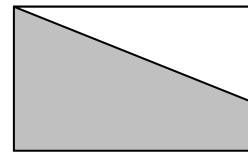
(ד)

(1) יותר מ- 50%

(2) בדיוק 50%

(3) כ- 40%

(4) פחות מ- 40%



(ג)

(1) פחות מ- 75%

(2) כ- 50%

(3) יותר מ- 75%

(4) כ- 90%

2. בכל אחד מהמלבנים המסורטטים, העריכו מהו אחוז השטח הלבן משטח המלבן כולו. מהו הקשר בין התוצאות של כל אחד מהמלבנים?

3. לכל אחד מהמלבנים שבשאלה 1, ציירו עיגול עם חלק מושחר, ששטחו ממחיש (בערך) את אותו האחוז שקיבלתם במלבנים בשאלה 1.

## דף למשתלם מס' 4

## סוגי בעיות בנושא אחוזים

- א. עיינו בבעיות הבאות ומיינו אותן לפי סוגיהן :
1. בכיתה לומדים 30 תלמידים, מהם 16 בנים. מהו אחוז הבנים בכיתה?
  2. 32% ממספר מסוים הם 80. מהו המספר?
  3. לאדם היו 900 ₪, הוא הוציא 40% מהם עבור ביגוד. מהו הסכום שהוציא עבור בגדים?
  4. בתערובת שמשקלה 3 ק"ג קיים מרכיב אחד במשקל 400 גרם. מהו אחוז המרכיב?
  5. בין 20 חברי הוועדה הנשים מהוות 40%. מהו מספר הגברים בוועדה?
  6. 8% מתלמידי בית ספר מסוים לומדים בחוגי העשרה למתמטיקה. מהו מספר תלמידים בבית הספר, אם ידוע כי בחוג זה לומדים 32 תלמידים?
  7. אורכי צלעות המלבן הם a ס"מ ו- b ס"מ. חברו את הנקודה על אחת מהצלעות עם שני קדקודי המלבן (קצוות הצלע הנגדית). איזה אחוז משטח המלבן מהווה שטח המשולש המתקבל?
- ב. לכל אחת מהבעיות, נסו להעריך את התשובה מבלי לחשב אותה.
- ג. לכל אחת מהבעיות, חברו שאלה נוספת. והעריכו את התשובה ללא חישוב.
- ד. לכל אחד מסוגי הבעיות שהבחנתם, חברו בעיה נוספת מתחום נוסף. בדקו, האם לבעיה שלכם קיים פתרון.