הערות והארות
תתקבלנה בברכה

כל אחד פותר אחרת!

ד"ר בת-שבע אילני, מכללת בית ברל

תחום תוכן מתמטי (בהתאמה לסילבוס) - **חזרות והרחבות מושג היחס**.

רשימת מושגים מתמטיים שנלמדים בפעילות - יחס, מציאת היחידה, ערך משולש, טבלת התאמה, ומציאת החלק מתוך השלם.

זמן משוער לפעילות - 2 ש"ל.

הנושא - אסטרטגיות לפתרון בעיות יחס ופרופורציה.

מטרת הפעילות - הכרת סוגי האסטרטגיות ומאפייניהם:

א. אסטרטגיות טרום-פורמליות: אסטרטגיות אינטואיטיביות, אסטרטגיות חיבוריות, חלוקה יחסית, מציאת היחידה - טבלת התאמה, מציאת החלק מתוך השלם, ערך משולש.

ב. אסטרטגיה פורמלית - נוסחת הפרופורציה.

חומרים ועזרים דרושים - דף למשתלמים.

מהלך הפעילות

1. המשתלמים יקבלו את **הדף למשתלמים "כל אחד פותר אחרת!"**, ויעבדו עליו בקבוצות עבודה בהן יציעו אסטרטגיות שונות לפתרון הבעיה, יבדקו לאיזו רמת גיל מתאימה כל אחת מהן, מהם מאפייניה, כיצד ומתי ישתמשו בהן תלמידים, ומהם הקשיים שיתגלו תוך כדי שימוש בכל אחת מהאסטרטגיות המוצעות.

2. במליאה יוצגו מגוון האסטרטגיות לפני כל הכיתה, ייערך דיון ביתרונות ובחסרונות של כל אחת מהאסטרטגיות, תוך כדי סיווג האסטרטגיות לשתי קבוצות: אסטרטגיות טרום פורמליות ונוסחת הפרופורציה.

3. יוצגו בפני המשתלמים הדוגמאות המופיעות בהמשך: "דוגמאות לאסטרטגיות שונות לפתרון בעיות יחס ופרופורציה" (רצוי לשכפל למשתלמים) וייערך דיון כולל באסטרטגיות השונות.

דף למשתלמים

כל אחד פותר אחרת!

אסטרטגיות לפתרון בעיות "יחס ופרופורציה"

הבעיה : יש לחלק 40 אגוזים בין שני ילדים, ביחס של 3:5. כמה אגוזים יקבל כל ילד ?

א. פתרו את הבעיה שלפניכם בדרכים שונות ומגוונות. היעזרו בכל האסטרטגיות שאתם מכירים - השתדלו לכלול גם אסטרטגיות שאתם חושבים שתלמידי בית הספר היסודי או תלמידי חטיבת הביניים היו משתמשים בהם כדי לפתור את הבעיה.

ב. דונו בכל אחת מהאסטרטגיות בנפרד – רשמו את המאפיין כל אסטרטגיה, לאיזו רמת גיל היא מתאימה, מהם הקשיים המתגלים בתהליך הפתרון בעזרתה וכו'.

ג. סכמו את היתרונות והחסרונות של כל אחת מהאסטרטגיות.

הערות והארות דידקטיות לדף למשתלמים - " כל אחד פותר אחרת!"

הבעיה הניתנת בדף למשתלמים חושפת בפניהם מגוון רחב של אסטרטגיות לפתרון בעיות יחס ופרופורציה, ומהווה בסיס לדיון תיאורטי בהתפתחות שכילה פרופורציונלית אצל ילדים (ראה בפרק רקע תיאורטי במודולה זו - שכילה פרופורציונאלית). כדאי לתת את הבעיה לאחר שהמשתלמים פתרו מספר בעיות בנושא היחס.

מניסיון שהצטבר במחקר (Ben-Chaim, Ilany & Keret, 2002), נמצא שהעיסוק באסטרטגיות השונות וקישורן לתיאוריה תרם הן להרחבת ולהעמקת הידע המתמטי והפסיכולוגי דידקטי בנושא יחס ופרופורציה, והן לחיזוק המוכנות של פרחי ההוראה ללמד את הנושא בבית הספר.

במחקר של בן-חיים, אילני וקרת, (2001) ובמחקרי המשך שנערכו בשנים 2002-2005 מובאות דוגמאות לאסטרטגיות לפתרון בעיות יחס ופרופורציה, שנאספו במהלך המחקרים במכללות לחינוך. ראוי לציין את המגוון הרחב של האסטרטגיות לפתרון נכון של הבעיה שנאספו במהלך למידת הנושא. לכל סוג של אסטרטגיות מובא הסבר קצר והערות דידקטיות לגבי דרכי הפעולה של התלמידים, התאמה לרמת גיל, קשיים וכו'.

דוגמאות לאסטרטגיות שונות לפתרון בעיות יחס ופרופורציה

א. אסטרטגיות פרופורציונליות טרום-פורמליות

1. אסטרטגיה אינטואיטיבית

תלמידים ניחשו בעל-פה את מספר האגוזים של כל ילד ורשמו: לילד א 15 אגוזים, לילד ב 25 אגוזים, סך הכל 40 אגוזים.

אסטרטגיה זו מתאימה לבעיות פשוטות מאוד ומצביעה על הבנה אינטואיטיבית של קשרים פרופורציונליים.

2. אסטרטגיות חיבוריות

נמצאו שני סוגי פתרון המאפיינים חשיבה חיבורית:

- פתרון חיבורי חישובי

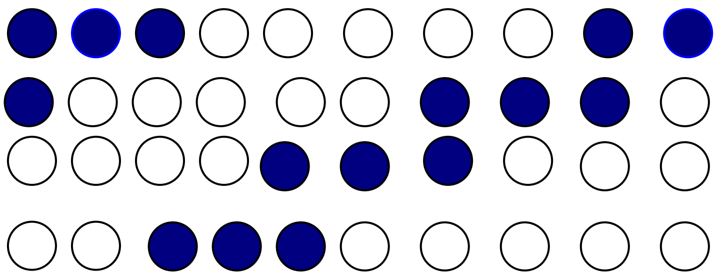
התלמידים לקחו 8 אגוזים וחילקו אותם לשני הילדים - לילד א נתנו 3 אגוזים ולילד ב נתנו 5 אגוזים. לאחר מכן לקחו עוד 8 אגוזים ושוב חילקו, וחוזר חלילה עד שנגמרו כל האגוזים. במקרה שלנו הם קיבלו 5 קבוצות בדיוק. בדרך כלל השתמשו התלמידים בטבלה הבאה:

מס׳ הקבוצה	ילד א	ילד ב	סה״כ
1	3	5	8
2	3	5	8
3	3	5	8
4	3	5	8
5	3	5	8
סה״כ	15	25	40

לילד א 15 אגוזים - **חיבור** האגוזים בכל הקבוצות ייתן את מספר האגוזים השיכים לילד א.

לילד ב 25 אגוזים - **חיבור** האגוזים בכל הקבוצות ייתן את מספר האגוזים השיכים לילד ב.

- פתרון חיבורי ויזואלי



באסטרטגיה זו התלמידים ציירו 40 עיגולים: צבעו 3 עיגולים והשאירו 5 עיגולים. התלמידים חזרו על התהליך שוב ושוב עד שנגמרו העיגולים.

אסטרטגיות 1 ו- 2 אופייניות לתלמידים צעירים בעלי חשיבה חיבורית. כאשר אי-אפשר לחלק את השלם לקבוצות שלמות או שהשלם הוא מספר גדול מאוד נתקלים תלמידים אלה בקשיים.

להלן דוגמה לבעיה שיוצרת קשיים אצל תלמידים אלו:

לאורית ואילה 20 סוכריות גומי בצורת נחש, והן צריכות לחלק את הסוכריות ביניהן ביחס של 4:8. כמה סוכריות תקבל כל אחת מהן?

בדרכים שתיארנו לא יצליחו התלמידים לחלק את הסוכריות על-פי היחס שהתבקשו. כיוון שמספר הסוכריות (12 סוכריות) המחולקות לשתי הילדות בכל שלב, אינו גורם של מספר הסוכריות הכולל, ולכן לא ניתן לקבל מספר טבעי בכל אחד מהשלבים. כמו כן, התשובות בשברים (סוכריית גומי מוארכת, אפשר לחתוך), ולכן אי-אפשר לפתור זאת בדרכים שתוארו.

3. חלוקה יחסית

באסטרטגיה זו התלמיד יחלק את השלם ל- 5 קבוצות. בכל קבוצה יהיו 8 אגוזים והיחס בין מספר האגוזים שיקבל ילד א לבין מספר האגוזים שיקבל ילד ב בכל קבוצה יהיה 3:5 (כמו היחס בשלם) כלומר, בכל קבוצה, על כל 3 אגוזים שיקבל ילד א יקבל ילד ב 5 אגוזים.

לילד א 5 קבוצות שבכל אחת מהן 3 אגוזים לכן לילד א ⇐ 15 אגוזים = 3 אגוזים × 5

לילד ב 5 קבוצות שבכל אחת מהן 5 אגוזים לכן לילד ב ⇐ 25 אגוזים = 5 אגוזים × 5

סה"כ 40 אגוזים

4. מציאת היחידה (לפעמים תוך שימוש בטבלת התאמה)

באסטרטגיה זו, למרות שלא תמיד מבקשים מהם ישירות בשאלה, התלמידים מוצאים כמה עצמים יש ביחידה אחת של השלם. יחידה זו משמשת אותם למציאת הכמות הנדרשת לכל אחד מהחלקים המבוקשים.

- פתרון בשלבים, ללא טבלת התאמה:

בשלם 40 אגוזים. נחלק את השלם ל- 8 יחידות (5+3), לכן **בכל יחידה** יש $\Leftarrow$ 5 אגוזים = 8 : 40

לילד א 3 יחידות מתוך 8 היחידות, לכן $\Leftarrow$ 15 אגוזים = 5×3

לילד ב 5 יחידות מתוך 8 היחידות, לכן $\Leftarrow$ 25 אגוזים = 5×5

סה"כ 40 אגוזים = 5×8

- טבלת התאמה

למציאת היחידה משתמש התלמיד לפעמים בטבלת התאמה:

? ----------- 1

40 ----------- 5 $\Rightarrow$ היחידה ? = 5 אגוזים

אפשרות אחרת למציאת היחידה:

40---------- 8

? ----------- 1

לכן ?=5

ומציאת הכמויות המבוקשות תיעשה באותה דרך (כלומר טבלת התאמה):

ילד א		ילד ב	
5	1	5	1
?	3	?	5

ילד א: 15 אגוזים = 5×3

ילד ב: 25 אגוזים = 5×5

5. מציאת החלק מתוך השלם

באסטרטגיה זו יש שימוש בשברים למציאת הכמות המתאימה לחלק המבוקש.

בשלם 8/8 חלקים (3+5) ויש 40 אגוזים, לכן:

ילד א יקבל 3/8 של כמות האגוזים הכללית (40), כלומר ⇐ $40 \times 3/8 =$ 15 אגוזים

ילד ב יקבל 5/8 של כמות האגוזים הכללית (40), כלומר ⇐ $40 \times 5/8 =$ 25 אגוזים

אפשר כמובן גם להשתמש בשברים עשרוניים באותה דרך.

6. ערך משולש

3 ------- x

5 ------- $40 - x \quad \Rightarrow \quad 5 \times x = 3 \times (40 - x) \quad \Rightarrow \quad x =$ 15 אגוזים

$40 - x =$ 25 אגוזים

השימוש בערך משולש נעשה כהרחבה לשימוש של מציאת היחידה על-ידי טבלת התאמה.

קשיים וטעויות מתגלים במקרה שלפני הסטודנטים בעיות פרופורציה של "יחס הפוך". הם עושים שימוש שגוי באסטרטגיה, כיוון שהם משתמשים לפתרון בעיות אלו באותו ערך משולש כמו בבעיות של פרופורציה של "יחס ישר".

הערה: לפתרון בעיות בהן מתקבלת משוואה אלגברית, תלמידים בבית הספר היסודי השתמשו באסטרטגיות אחרות, כיוון שלפתור משוואה אלגברית לומדים, בדרך כלל, רק בחטיבת הביניים.

ב. אסטרטגיה פרופורציונלית פורמלית – נוסחת הפרופורציה

פתרון לבעיה בעזרת נוסחת הפרופורציה:

x - מספר האגוזים של ילד א

$40 - x$ - מספר האגוזים של ילד ב

היחס בין מספר האגוזים של ילד א לבין מספר האגוזים של ילד ב שווה ל- 3/5, כלומר, נוצרת פרופורציה. כדי למצוא את מספר האגוזים של כל ילד ניעזר בעובדה שאת הקשר הפרופורציונלי שבין מספר האגוזים של ילד א וילד ב אפשר לבטא בעזרת נוסחת הפרופורציה:

$$\frac{3}{5} = \frac{x}{(40 - x)}$$

זוהי משוואה ובעזרת פתרון אלגברי נקבל:

⇐ $5 \times x = 3 \times (40 - x)$ ⇐ $x =$ 15 עצמים לילד א

$40 - x =$ 25 עצמים לילד ב

אסטרטגיה זו מתאימה לאנשים בעלי שכילה פרופורציונלית (ראה מודולה זו, בחלק א' - רקע תיאורטי).

לאנשים אלו יכולת לעשות שימוש מושכל בנוסחת הפרופורציה והם מצליחים לפתור בעזרת נוסחת הפרופורציה בעיות "יחס ופרופורציה".

בדרך כלל, אסטרטגיה זו אופיינית לבוגרים ומבוגרים בעלי חשיבה פורמלית. אולם, ממצאי המחקר מצביעים על קשיים של בוגרים ומבוגרים בפתרון בעיות בעזרת נוסחת הפרופורציה. הממצאים מחזקים את הטיעון, שחשיפה למגוון גדול של בעיות יכול לעורר סכמת פרופורציה פוטנציאלית ולהפכה לסכמה אקטואלית ברת שימוש.

בהקשר למשתלמים, המפגש עם מגוון גדול של אסטרטגיות והדיון במאפייניהן מסייע ליצור עמדה חיובית לגבי יכולתם ללמד את הנושא.

הפרק עובד מתוך:

בן-חיים, ד׳, קרת, י׳ ואילני, ב׳ (2005). **יחס ופרופורציה – בהכשרה והשתלמויות מורים למתמטיקה.** מופת. (בדפוס).

מקורות

בן-חיים, ד׳, אילני, ב׳ וקרת, י׳ (2001). **יחס ופרופורציה – ידע מתמטי ופדגוגי של פרחי הוראה ומורים למתמטיקה בביה״ס היסודי לפני ואחרי התנסות בפעילויות חקר אותנטיות.** דו״ח מחקר, מכון מופ״ת.

Ben-Chaim, D., Ilany, B., & Keret, Y. (2002). Mathematical and pedagogical knowledge of pre- and in-service elementary teachers before and after experience in proportional reasoning activities. *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 2, (pp. 81-88)*. Norwich, U.K.