ההיבט המתמטי של המושגים יחס ופרופורציה

ד״ר בת-שבע אילני, מכללת בית-ברל

תחום תוכן מתמטי (בהתאמה לסילבוס) – מושגים בסיסיים בנושא היחס.

רשימת מושגים מתמטיים שנלמדים בפעילות - יחס, פרופורציה, חלוקת כמות ביחס נתון.

בפרק זה מובא רקע מתמטי לנושא יחס ופרופורציה. את הרקע המתמטי כדאי לשלב (לפי הסילבוס - בחלק של חזרות והרחבות מושג היחס), במהלך ההוראה לאחר שהמשתלמים פתרו מספר בעיות חקר.
הפרק כולל:

1. המושג יחס

מבוא

1.1 הגדרה מתמטית

1.2 הסברים והארות להגדרה:

א. צורות ייצוג היחס;

ב. האפס כאחד מהגדלים של יחס;

ג. משמעות מתמטית - כמותית של יחס נתון;

1.3 סוגי יחס:

א. יחס מסוג Rate;

ב. יחס מסוג Ratio.

2. המושג פרופורציה

מבוא

2.1 הגדרה מתמטית

2.2 הסברים והארות להגדרה:

א. היבט נוסף למושג פרופורציה;

ב. קשיים הנובעים מתרגום לשפה העברית;

ג. שני תנאים לקיום פרופורציה.

2.3 הרחבה לפרופורציה של "יחס ישר" ושל "יחס הפוך":

א. הבהרות ודוגמאות לבעיות פרופורציה של "יחס ישר" - Direct Proportion;

ב. הבהרות ודוגמאות לבעיות פרופורציה של "יחס הפוך" - Inverse Proportion.

3. תכונות מתמטיות של המושגים יחס ופרופורציה

3.1 החלת חוקי השברים על יחסים

3.2 כללי הפרופורציה ותכונותיה

3.3 שימוש בכללי הפרופורציה ובתכונותיה:

א. מציאת הגודל הפרופורציוני הרביעי במשוואות שבהן קיימת פרופורציה;

ב. בעיות ערך חסר - מציאת הגודל הפרופורציוני הרביעי בבעיות שבהן קיימת פרופורציה;

ג. השוואה בין שני יחסים;

ד. שימושים אחרים בפרופורציה.

1. המושג יחס

מבוא

למושג יחס שימושים רבים במתמטיקה ויש לו חשיבות רבה גם בתחומי דעת אחרים.

במתמטיקה המושג יחס משולב בנושאים רבים והילדים נתקלים בו כבר בכיתות הנמוכות של בית הספר היסודי, אם כי לא בשמו המפורש. עם המושג יחס בשמו המפורש, הם נפגשים לראשונה בכיתה ו. למעשה לסעיפים רבים בתכנית הלימודים במתמטיקה של בית הספר היסודי יש נגיעה ישירה או עקיפה במושג יחס. לדוגמה, מחירים, שברים, אחוזים, הסתברות, בעיות תנועה, ובהנדסה - מדידות, הגדלות והקטנות של צורות וגופים, π כיחס בין היקף המעגל לקוטרו וכו׳.

בבית הספר העל-יסודי חלק מהתופעות הנלמדות מוגדרות כיחס בין שני גדלים. לדוגמה, **בגיאוגרפיה** המושג "צפיפות אוכלוסייה" מוגדר כיחס בין מספר הפרטים ליחידת שטח, והמושג "קנה-מידה" המשמש לשרטוט מפות מוגדר כיחס בין יחידת אורך במפה לאורך היחידה במציאות. **במקצועות המדעיים** כגון פיסיקה, כימיה, ביולוגיה משמש היחס לתיאור תופעות כגון, "מהירות", "הספק", "משקל סגולי", "ריכוז תמיסות", "תאוצה". **בסטטיסטיקה וכלכלה** משתמשים ביחס לחישובי רווח והפסד ולחישובי הסתברות, **ובמקצועות הטכנולוגיים** לחישובים בהנדסה, מכאניקה, רובוטיקה, מדעי המחשב וכו׳.

כאשר היחס מופיע בצורה מפורשת, אפשר לעשות בו שימושים רבים, לדוגמה:

- היחס בין מספר הבנים למספר הבנות בכיתה הוא 3:4 כלומר, על כל 7 תלמידים בכיתה 3 מהם בנים ו-4 מהם בנות, או 3/7 מתלמידי הכיתה הם בנים ו- 4/7 הן בנות. אם, לדוגמה, בכיתה זו יש 18 בנים, אז סך כל התלמידים בכיתה הוא 42, מתוכם 24 בנות.

- תוצאת משחק כדורגל 2:3 מציגה את היחס בין מספר הגולים שהבקיעה קבוצה אחת (2 גולים) לבין מספר הגולים שהבקיעה קבוצה שנייה (3 גולים) כלומר, 40% מכלל הגולים (2/5) הבקיעה הקבוצה הראשונה ו- 60% מכלל הגולים (3/5) הבקיעה הקבוצה השנייה.

- היחס בין כמות הקמח לכמות הסוכר במתכון לעוגה הוא 2:1 כלומר, לכל 2 כוסות קמח יש להוסיף כוס אחת של סוכר.

- היחס בין אורך מלבן לבין רוחבו הוא 2:1 כלומר, אורך המלבן גדול פי 2 מרוחבו, או לחילופין רוחב המלבן קטן פי 2 מאורכו.

- היחס בין מספר הפיצות למספר האנשים בשולחן במסעדה הוא 8:10 כלומר, אם בשולחן זה יושבים 10 ילדים, אזי הם מתחלקים ביניהם ב- 8 פיצות, וכל אחד מהם יקבל 4/5 של אחת הפיצות, או 80% של אחת הפיצות.
- בזר פרחים היחס בין מספר הצבעונים למספר הוורדים הוא 1:3 כלומר, מכל 4 פרחים בזר יש צבעוני אחד ו- 3 ורדים, או מתוך כל הפרחים בזר 1/4 הם צבעונים ו- 3/4 הם ורדים. אם בזר יש 3 צבעונים אז יהיו בזר זה 9 ורדים.

קיימים מקרים בהם היחס מופיע בצורה לא מפורשת - כמושג המתאר תופעה. במקרים אלה יש צורך בידע קודם, כדי לזהות שהגדרת המושג מבוססת על יחס בין שני גדלים, לדוגמה:

- "מהירות" מתארת יחס בין המרחק שעוברת מכונית לבין הזמן שנסעה מרחק זה.
- "קנה מידה" מוגדר כיחס בין אורך קטע של 1 ס"מ (או יחידת מידה אחרת) במפה לבין אורך הקטע במציאות (באותה יחידת מידה).
- "צפיפות" אוכלוסין מתארת יחס בין מספר הפרטים ליחידת שטח.
- "שיווי משקל" במאזניים בעלי זרועות נוצר כאשר מתקיימת פרופורציה של יחס הפוך בין אורך זרוע המשקל לבין המשקולת בקצהו, כלומר, מתקיימת מכפלה קבועה ביניהם.
- "צריכת דלק" נמדדת על-ידי היחס בין מספר הקילומטרים שמכונית עוברת לבין מספר הליטרים שהמכונית צרכה באותו זמן (ק"מ/ליטר); לחילופין, ניתן להביע את צריכת הדלק על-ידי ליטר/ק"מ.

מבחינה מתמטית יחס הוא כימות של קשר כפלי, הנקבע על-ידי השוואה כפלית (חילוק) בין שני גדלים.

קשר כפלי הוא קשר של חילוק (או כפל) בין גדלים, לדוגמה, אם בקורס מתקדם יש פי 2 שעות לימוד מאשר בקורס מבוא, אפשר לעשות השוואה כיפלית בין מספר השעות בקורס המתקדם לבין מספר השעות בקורס המבוא. **במקרה זה היחס 2:1 הוא כימות הקשר הכפלי בין שני הגדלים**.

במתמטיקה אנו יכולים למצוא קשרים אחרים, **שאינם כפליים**, לדוגמה, קשר חיבורי (הפרש) בין גדלים המתקבל כאשר גודל אחד גדול או קטן ב- k מגודל אחר, קשר לוגריתמי, קשר טריגונומטרי וכו'.

1.1 הגדרה מתמטית (Collins Dictionary of Mathematics, 1989):

המושג יחס מוגדר במתמטיקה, כמנה - המתקבלת בעזרת פעולת החילוק - בין שני מספרים, גדלים, כמויות או ביטויים.

בסימנים מתמטיים: $a : b$ או $\frac{a}{b}$ כאשר $b \neq 0$.

אפשר להרחיב את ההגדרה גם ליותר משני גדלים/כמויות כגון:

בסימנים מתמטיים: $a : b : c : d : e ....$ או $a / b / c / d / e ...$ ($b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0, e \neq 0 ...$).

1.2 הסברים והארות להגדרה

א. צורות ייצוג היחס

אפשר לרשום יחס במספר צורות, לדוגמה: היחס בין מספר החרוזים האדומים לבין מספר החרוזים הלבנים במחרוזת הוא 3 ל- 5 או 3:5 או $\frac{3}{5}$.

נשאלת השאלה האם שלוש הצורות מייצגות את אותו מצב?

בשלושת המקרים הכוונה שעל כל 3 חרוזים אדומים יש במחרוזת 5 חרוזים לבנים. כלומר, שלוש הצורות מתארות אותו מצב, אבל מבחינה מתמטית לכל צורה הדגש אחר:

- כאשר אומרים שהיחס הוא 3 ל- 5 מתארים את המצב בצורה מילולית, ללא פעולה או תבנית מתמטית.
- כאשר רושמים שהיחס הוא 3:5 מתארים את התבנית לפי הגדרת המושג יחס.
- כאשר רושמים את השבר 3/5 מצהירים שהיחס הנתון יכול להיות במקרה זה מיוצג על-ידי המספר הרציונאלי 3/5.

ב. האפס כאחד מהגדלים של היחס

בסעיף הקודם הוצגה הגדרה מתמטית של המושג יחס ולפיה מושג היחס הוגדר בעזרת פעולה מתמטית – פעולת החילוק (מנה). אי לכך, במקרה כזה יחולו הגבלות על הגדלים/כמויות ביניהם היחס מוגדר.
פעולת החילוק במתמטיקה (כשאר פעולות החשבון) היא פעולה בינארית, כלומר, מורכבת משני מרכיבים (מונה ומכנה) וביניהם קיים סימן פעולה. התוצאה מהפעולה המוגדרת חייבת להיות אחת ויחידה ובגבולות קבוצת המספרים בה פועלים.

בסימנים מתמטיים: פעולת החילוק מוגדרת כ- $a:b=c$ שני המרכיבים הם: a ו- b, סימן הפעולה הוא ":" והתוצאה c חייבת להיות אחת ויחידה ומתחום המספרים בו פועלים - מספרים טבעיים, שלמים, רציונליים, ממשיים.

מיד, ניתן להסיק שמקומו של האפס כאחד הגדלים ביחס, לפי ההגדרה המתמטית, יכול להיות רק במונה, כלומר, לדוגמה 0:7 או 0 ביחס לכל מספר אחר שהוא לא אפס ($0:a, a \neq 0$).

לעומת זאת, לפי ההגדרה המתמטית, אי-אפשר להציב את האפס במקום אחד הגדלים במכנה, שכן תתקבל תוצאה שאינה מוגדרת או שאין לה משמעות. ניתן להבחין בשני מקרים:

- כאשר המונה שונה מאפס, נקבל ביטוי כגון, 7:0 (או a:0, a≠0) שאינו מוגדר (או חסר משמעות) והסיבה לכך קשורה לעצם ההגדרה של פעולה בינארית. כלומר, לא נוכל למצוא אף מספר c שיקיים את השוויון 7:0=c .

- כאשר המונה שווה לאפס, נקבל 0:0. גם במקרה זה הביטוי שקיבלנו אינו מוגדר (חסר משמעות), אבל מסיבה שונה. הפעם נוכל לקבל בלי סוף מספרים c המקיימים את השוויון 0:0=c. זו הסיבה להגדרת היחס a:b כאשר b≠0, ולמעשה, כאשר מדובר בגדלים וכמויות אנו מניחים בנוסף לכך, ש- a ו- b גם אינם שליליים.

יחד עם זאת, מכיוון שהמושג יחס נגזר גם מסיטואציות בחיי היום יום, נוכל להביא דוגמאות שיתאימו להגדרה המתמטית ודוגמאות שלא ניתן להציג אותן ישירות בעזרת המתמטיקה, למרות שתהיה להן משמעות בחיי היום יום. לדוגמה: חלוקת כמות מסוימת a בין 2 אנשים, כך שהראשון אינו מקבל כלום והשני את הכול. במקרה זה נוכל להציג את היחס 0:a לבטא את המצב בין 2 האנשים הנ"ל. אולם, אם הראשון מקבל את הכול והשני כלום הרי נצטרך לכתוב a:0 על מנת לבטא את המצב בין 2 האנשים הנ"ל והכתיבה המתמטית תצביע על ביטוי חסר משמעות, למרות שהמצב אקטואלי ובחיי היום יום או באופן מילולי הוא בהחלט מצב קיים. כמובן, שנוכל לציין יחס בין השני לראשון ושוב לרשום 0:a ואז אנו פועלים בשדה מוכר, כגון: היחס בין א ל- ב הוא 2:3. נוכל לתאר את אותו מקרה על-ידי היחס בין ב ל- א שהוא 3:2. מסקנה, יש להבחין בין ההצגה המילולית של יחס בסיטואציות מסוימות (בחיי היום יום) לעומת ההצגה המתמטית.

המורכבות של מושג היחס בנוגע לתיאור המילולי לעומת ההצגה המתמטית בעזרת פעולת החילוק (מנה) המובילה לביטוי של שבר, בולטת הרבה יותר בסיטואציה של שוויון בין שני הגדלים המרכיבים את היחס. לדוגמה: חלוקת כמות מסוימות a בין שני אנשים באופן ששניהם מקבלים את אותה כמות. במקרה זה היחס ביניהם יהיה $\frac{a}{2}:\frac{a}{2}$ ובמקרה הכללי 1:1, וניתן להביא אין ספור דוגמאות מחיי היום יום לתיאור יחסים כאלו, כגון: ל- א יש 1,000,000₪ ול- ב יש 1,000,000₪, מהו היחס ביניהם? וכמובן שנקבל 1:1 המצביע על שוויון. מבחינה מתמטית כל עוד יהיה להם סכום ממשי כלשהו שווה בשווה (אפילו אגורה אחת לכל אחד), היחס יהיה 1:1 (ואפילו אם לשניהם יהיה אותו **חוב** של מיליון ₪ עדיין היחס ביניהם יהיה 1:1), יחס המצביע על מצב פיננסי של שוויון ביניהם. אולם, אם שני אנשים הם חסרי ממון לחלוטין (ובוודאי קיימת סיטואציה כזו בחיי היום יום) הרי מבחינה מתמטית היחס צריך להיכתב 0:0 – ביטוי חסר משמעות במתמטיקה. כלומר, לא ניתן לבטא מתמטית את היחס ביניהם, למרות שבחיי היום יום משמעות המצב הזה אינה שונה לעומת המקרים הנ"ל בהם לשני אנשים סכום ממון שווה או חוב כספי שווה.

סיטואציה אחרת בחיי היום יום, וקרוב לוודאי שילדים ייתקלו בה, מתייחסת לדיווח על יחס שערים במשחקים תחרותיים בין קבוצות שונות, ובהחלט קיימים מצבים של דיווחים על **יחס** שערים של 0:0, 3:0 0:3 כמו גם 3:2 וכו'. כמובן שבמקרה כזה אין שום תפקיד לשבר ומה שקובע הוא הקונטקסט המילולי והסיטואציה.

אין אנו קובעים כאן הגדרה חד-משמעית, או הצגה יחידה למושג היחס (המסקנה העיקרית היא שההגדרה היא שרירותית, אולם מרגע שנקבעה הגדרה – מקרים מסוימים יתאימו ואחרים לא). כמו כן, נראה לנו כי במקרה שהאפס הוא אחד המרכיבים, ראשית, אין משמעות להצגה המתמטית בעזרת מנה כי אז לא נוכל לציין פי כמה אחד גדול או קטן מהשני. שנית, ייתכן והמשמעות החזקה יותר תהיה חשיבה חיבורית כי אז נוכל לציין בכמה אחד גדול (או קטן) מהשני. לדוגמה, במקרה של תוצאה 3:0 במשחק מסוים, נוכל לציין שהקבוצה הראשונה הבקיעה שלושה שערים יותר (או זכתה ב- 3 נקודות יותר), אבל לא נוכל לציין פי כמה האחת לעומת השנייה.

1.3 סוגי יחס

ניתן למצוא שני סוגים עיקריים של יחס (Karplus, Pulos, Stage, 1983):

א. יחס מסוג Rate

יחס מסוג Rate נוצר בקטגוריה הראשונה לפי פרוידנטל (Freudenthal, 1978, 1983), שבה קיימות השוואות בין גדלים או כמויות בעלי כינויים שונים. זהו יחס בין שני גדלים או כמויות, הנוצר בדרך כלל, מקשר כפלי המתאר תופעות פיסיקליות הקיימות בטבע, או כאשר אנחנו יוצרים מושגים חדשים באופן שרירותי למטרה פונקציונאלית.

יחס מסוג זה **יוצר מושג חדש - בעל ישות עצמית** ובדרך כלל המושג החדש לא נקרא יחס אלא הספק/קצב או צפיפות.

דוגמאות א

הדוגמאות בקבוצה זו מייצגות יחס המתאר גדלים פיסיקליים.

- היחס בין הדרך שעוברת מכונית לבין הזמן שלוקח לה לעבור את אותה דרך ($v = \frac{s}{t}$), יחס זה מתאר תנועה ויוצר את המושג **מהירות.**
- היחס בין משקלו של גוף לנפחו, מתאר את צפיפות החומר ויוצר את המושג **משקל סגולי**.
- במשקל מאזניים בעל זרועות באורך שונה נוצר **שיווי משקל** כאשר קיימת פרופורציה של יחס הפוך בין אורך הזרוע למשקולת שבקצהו, כלומר, מתקיים יחס קבוע בין אורך הזרוע והמשקל, בשתי הזרועות.

בדוגמאות לעיל מוצגים יחסים הנקראים גם **גדלים אינטנסיביים.** גודל אינטנסיבי הוא יחס בין שני גדלים משתנים (**גדלים אקסטנסיביים**), שאינו משתנה כאשר המרחב בו פועלים שני הגדלים משתנה. לדוגמה, המשקל הסגולי של גוף אינו משתנה כאשר מגדילים או מקטינים את הגוף. גם המהירות (בכל אחד מהקטעים של דרך) אינה משתנה, כאשר נתונה מהירות קבועה לאורך כל הדרך.

דוגמאות ב

הדוגמאות בקבוצה זו מייצגות יחס המתאר מושג חדש שנוצר למטרה פונקציונאלית.

- **מחיר ליחידה** הוא מושג חדש הנוצר כדי לאפשר השוואה בין מחירים של מוצרים, והוא מייצג את היחס שבין המחיר הכולל לבין מספר היחידות שקנינו.
- **קילומטר לליטר דלק** הוא מושג חדש הנוצר כדי לבדוק יעילות/חסכוניות של מכונית והוא מייצג את היחס שבין מספר הקילומטרים שהמכונית נסעה לבין מספר הליטרים של הדלק שהיא צרכה.
- **מספר פרטים ליחידת שטח** הוא מושג חדש הנוצר כדי למדוד צפיפות אוכלוסייה, והוא מייצג את היחס בין מספר הפריטים לשטח נתון, לדוגמה, מספר האיילים בקמ"ר.

ב. יחס מסוג Ratio

יחס מסוג Ratio נוצר בקטגוריה השנייה והשלישית (Freudenthal, 1978, 1983), שבהן קיימות השוואות בין גדלים או כמויות (המונה והמכנה) בעלי אותו כינוי. במקרה זה נוצר יחס חסר כינוי, בדומה לשבר או למספר חסר כינוי. השוואות אלו יכולות להיות השוואות בין שני חלקים של שלם מסוים או השוואות בין גדלים של שתי כמויות הקשורות קונספטואלית, אבל לא נחשבות באופן טבעי כחלקים של שלם משותף.
הייצוג של היחס כשבר מאפשר להחיל את תכונות הצמצום וההרחבה של שברים למצבי היחס השונים.
דוגמאות:

- בכיתה א1 היחס בין מספר הבנים (מונה) לבין מספר הבנות (מכנה) הוא 15/20 (או 3/4). היחס במקרה זה מקבל ביטוי כמותי בצורת שבר, ללא כינוי. זוהי השוואה בין שני חלקים של אותו שלם.
- קנה מידה של 1:200,000 הוא יחס בין 1 ס״מ במפה לבין 200,000 ס״מ (שהם 2 ק״מ) במציאות. במקרה זה מתקבל שבר 1/200,000 (ללא כינוי).
- התוצאה של היחס בין היקף המעגל לבין קוטרו ($\frac{2\pi r}{2r} = \frac{\pi}{1} = \pi$) הוא π. לשני הגדלים אותו כינוי, (מידת אורך) ולמרות זאת היחס שנוצר איננו מספר רציונאלי, כלומר, π אינו ניתן לכתיבה כמנה של שני מספרים שלמים. מכאן, ניתן להסיק שקיימים יחסים שאינם ניתנים להבעה על-ידי שבר או מספר רציונאלי, אלא על-ידי מספר אי-רציונאלי. נזכיר, כי בטריגונומטריה, הפונקציות הטריגונומטריות מתארות יחסים בין אורכים של צלעות, ובמספר גדול מאוד של מקרים, עבור הרבה זוויות היחס או ערך הפונקציה הטריגונומטרית המסוימת אינו רציונאלי.
- היחס בין אורך צלע במשולש ישר-זווית לבין אורך היתר במשולש זה הוא 2/3. במקרה זה היחס מיוצג על-ידי שבר ללא כינוי. זוהי השוואה בין גדלים של שתי כמויות הקשורות קונספטואלית (באותו משולש), אבל לא נחשבות באופן טבעי כחלקים של שלם משותף.
- הגדלה/הקטנה - נתונה תמונה ברוחב 2 ס״מ ובאורך 2.4 ס״מ. שרה מתבקשת להגדיל את התמונה לאורך של 7.2 ס״מ. מה יהיה רוחבה של התמונה כך שלא יהיה עיוות? במקרה זה היחס בין הרוחב והאורך של התמונה לאחר ההגדלה לא ישתנה, הוא יישאר 2:2.4. זהו יחס המיוצג על-ידי שבר ואפשר להרחיבו ולצמצמו כרצוננו – צמצום פי 2 ייתן 1:1.2 והרחבה פי 6 תיתן את הפתרון 6:7.2 (אפשר כמובן גם להגיע ליחס של מספרים שלמים - 10:12 או 5:6).

הערה (מתייחסת ל- Rate ול- ratio): **בשפה העברית** אין מונח שונה לכל אחד מסוגי היחס, אך לפעמים משתמשים **לתיאור היחס מסוג Rate** בכינויים קצב, שיעור והספק. המורכבות של מושג היחס והקושי בהבחנה בין סוגיו באה לידי ביטוי בקטע הבא:

Thompson (1994) מדגיש, שההבדל בין ratio ל- rate הוא בכך שהם אינם שני מצבים שונים, אלא היבטים שונים לאותו מצב. שניהם תוצרים של אופרציות מנטליות הנבנות ומיושמות על-ידי האדם, כאשר הוא נתקל במצב מסוים. התשובה לשאלה האם כמות מסוימת היא ratio או rate תלויה בצורת החשיבה של האדם, והאם הוא מסוגל לבצע פעולה מנטלית שתבדיל ביניהם. כלומר, אם אדם נמצא בשלב שהוא לא מסוגל להבין את היחס כגודל אינטנסיבי, אזי הוא יתייחס אליו כאל גודל אקסטנסיבי והמושג

הנתפס על ידו יהיה מהסוג ratio, ואילו בשלב מאוחר יותר, כאשר האדם מסוגל להבין את היחס כגודל אינטנסיבי הוא יוכל לזהות את הגודל כ-rate. (קרת, 1998).

2. המושג פרופורציה

מבוא

המושג פרופורציה משמש בעיקר לפתרון בעיות במתמטיקה ובתחומי דעת רבים נוספים. בעיות פרופורציונליות כוללות מצבים בהם יחסים מתמטיים שהם כפליים מטבעם (לעומת מצבים חיבוריים), מאפשרים ליצור שני יחסים השווים ביניהם. היכולת לפתור בעיות אלו מהווה אינדיקציה לשְׂכִילָה פרופורציונלית (Proportional Reasoning) המובילה לחשיבה מופשטת.

במתמטיקה השימוש בפרופורציה לפתרון בעיות, לעיתים קרובות לא בצורה מפורשת, מקבל ביטוי כבר בחטיבת הביניים כאשר תלמידים מתבקשים לפתור בעיות באלגברה, כגון, בעיות של חלוקת כמות לחלקים לא שווים (בעיות מחירים, רווחים והשקעות) בעיות אחוזים, בעיות תנועה, בעיות הספק ובעיות עבודה (כיתות ז-ח). פתרון משוואות המובעות על-ידי פרופורציה כגון פונקציות לינאריות (כיתה ט), ($x = 35 \Leftarrow 20 / 4 = x / 7$). בצורה מפורשת פוגשים התלמידים את המושג פרופורציה בגיאומטריה - משפט תלס ודמיון משולשים (כיתה ט).

בחטיבה העליונה, בבית הספר התיכון נוכל למצוא שימוש במושג פרופורציה, גם כאן ללא התייחסות מפורשת, כמעט בכל התחומים. לדוגמה, בטריגונומטריה, כאשר מגדירים פונקציה כמו $y = \sin \alpha$ כיחס בין שיעור ה-Y של נקודה הנמצאת על היקף מעגל לבין רדיוס המעגל. באלגברה, בפתרון בעיות בהן קיימת פרופורציה, כגון, בבעיות מחירים, אחוזים, תנועה, הספק, עבודה, בעיות של ריכוז חומצות ובעיות כלכליות. באנליזה – הגדרה וחקירה של פונקציות כגון, הפונקציה הליניארית $y = k\ x$ (k שיפוע הישר מוגדר כיחס בין Δy ל- Δx).

במקצועות המדעיים כמו במתמטיקה, אפשר למצוא בכל הרמות נושאים בעלי נגיעה לפרופורציה, אך גם במקרה זה, לעיתים, ללא התייחסות מפורשת. בבית הספר היסודי נוכל למצוא בתכנית מב"ט[1] הסברים על תופעות טבע ועל חוקיות מדעית (במסגרת לימודי טכנולוגיה, כגון, לימוד מנגנונים מכניים פשוטים: גלגל, מנוף, מישור משופע) הדורשים הבנת המושג פרופורציה. וכן גם במסגרת לימודי הגיאוגרפיה כאשר מחשבים אורכים לפי קנה מידה.

בחטיבת הביניים ובחטיבה העליונה, חלק ניכר מהתופעות הנלמדות במסגרת לימודי הפיסיקה, הכימיה, הביולוגיה וגם בגיאוגרפיה ובכלכלה מוגדרות על-ידי פרופורציה. בחוקי הפרופורציה ובכלליה משתמשים רבות כדי לחשב: הסתברות, תאוצה, שיווי משקל, חישובים סטטיסטיים, שרטוט מפות לפי קנה-מידה, רווח והפסד וכו'.

[1] תכנית מב"ט: מדע בחברה טכנולוגית. המרכז לחינוך מדעי טכנולוגי, בי"ס לחינוך, אוניברסיטת ת"א.

2.1 הגדרה מתמטית (Oxford English Dictionary, 2003)

פרופורציה נוצרת כאשר מתקיים שוויון בין שני יחסים. כלומר, הקשר הכפלי (כפל או חילוק) שיוצר את היחס הראשון, נשמר קבוע ושווה לקשר הכפלי, שיוצר את היחס השני.

בסימנים מתמטיים: ארבעה מספרים, גדלים או כמויות a, b, c, d ‏($a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$) יוצרים פרופורציה באחד משני המצבים הבאים:

א. כאשר מתקיים $a / b = c / d$ במקרה זה נוצרת מנה קבועה המאפיינת פרופורציה של "יחס ישר" - Direct Proportion.

ב. כאשר מתקיים $a / b = d / c$ במקרה זה נוצרת מכפלה קבועה המאפיינת פרופורציה של "יחס הפוך" - Inverse Proportion.

2.2 הסברים והארות להגדרה

א. היבט נוסף למושג פרופורציה

במילון מתמטי אחר (Collins Dictionary of Mathematics, 1989) מוסיפים להגדרה מתמטית זו היבט נוסף:

פרופורציה מוגדרת כקשר ליניארי ישר או הפוך בין שני משתנים כמותיים. כלומר, כאשר אלמנטים תואמים של שתי קבוצות נמצאים במצב של פרופורציה, המצב ביניהם מאופיין על-ידי יחס קבוע, ישר או הפוך. לדוגמה, לפי חוקי הגזים, קיים קשר פרופורציונלי של "יחס ישר" בין לחץ לטמפרטורה, כלומר, המנה בין לחץ (מונה) לבין טמפרטורה (מכנה) נשארת קבועה, וקיים קשר פרופורציונלי של "יחס הפוך" בין הלחץ לנפח, כלומר, המכפלה בין הלחץ לנפח נשארת קבועה.

ב. קשיים הנובעים מתרגום לשפה העברית

התרגום לשפה העברית של המושגים Direct Proportion, **כפרופורציה של "יחס ישר"** ו-Inverse Proportion, **כפרופורציה של "יחס הפוך"** יכול ליצור בלבול אצל המשתלמים. המשתלמים למדו בעבר שיחס מוגדר על-ידי קשר כפלי של מנה בין שני גדלים (a/b), ולכאורה הם נתקלים בסתירה כאשר אותה מילה (יחס) משמשת להגדרה של המושג "יחס ישר" ו"יחס הפוך", כפרופורציה שהיא השוואה בין שני יחסים (a/b=c/d).

ראוי לציין בפני המשתלמים, שהמושג פרופורציה של "יחס ישר" ופרופורציה של "יחס הפוך" אינם מצביעים רק על יחס בין שני גדלים, אלא מתארים מצבים שבהם יחס זה נשאר קבוע לאורך זמן ובאותו כיוון ("יחס ישר") או בכיוונים הפוכים ("יחס הפוך").

דוגמה לפרופורציה של "יחס ישר" - המנה בין המרחק שעוברת מכונית (S) לבין זמן הנסיעה (T) מגדירה יחס המתאר את מהירות (V) המכונית (V=S/T). עד לשלב זה מדובר במושג יחס. אם נתון שיחס זה נשאר קבוע לאורך זמן (המנה שהיא המהירות נשארת קבועה) ובאותו כיוון, כלומר, כאשר המרחק שצריכה לעבור מכונית זו יגדל/יקטן גם הזמן יגדל/יקטן באותו פקטור (השינוי יהיה באותו כיוון), אזי אפשר לדבר על פרופורציה של "יחס ישר" בין המרחק שמכונית נוסעת לזמן הדרוש לשם כך, כאשר המהירות קבועה ($\frac{S_1}{T_1} = \frac{S_2}{T_2}$).

דוגמה לפרופורציה של "יחס הפוך" - הקשר הכפלי בין המהירות של מכונית נוסעת לבין זמן הנסיעה שלה מגדיר יחס, אם נתון, שהמרחק שעוברת מכונית זו קבוע (המכפלה בין המהירות לבין הזמן נשארת קבועה) כלומר, כאשר המהירות של מכונית זו תגדל/תקטן, הזמן יקטן/יגדל באותו פקטור (השינוי יהיה בכיוונים הפוכים), אזי אפשר לדבר על פרופורציה של "יחס הפוך" בין המהירות לזמן ($\frac{V_1}{V_2}=\frac{T_2}{T_1}$).

ג. שני תנאים לקיום פרופורציה

ההגדרה של המושג פרופורציה בנויה על שני תנאים:

1. תנאי ראשון דורש קיום של קשר כפלי (יחס בין שני גדלים).

כדי לפתור בעיה שקיים בה מצב של פרופורציה הלומד צריך לזהות בבעיה קיום של קשר כפלי בין שני גדלים או יותר. קשר כפלי מקבל ביטוי מתמטי באמצעות כפל או באמצעות מנת חילוק (יחס) בין שני גדלים או יותר. לדוגמה, בבעיית דרך אפשר למצוא במצב המתואר בבעיה קשר כפלי בין המהירות לזמן ($v\cdot t$ - כפל) או קשר כפלי בין הדרך לזמן (s/t - חילוק).

זיהוי הקשר הכפלי מאפיין לומדים בעלי חשיבה כפלית ומוביל את הלומד בדרך כלל למציאת פתרון נכון לבעיה. לעומת זאת, ילדים צעירים המאופיינים כבעלי חשיבה חיבורית לא תמיד מצליחים לזהות את הקשר הכפלי בתיאור הבעיה ומתייחסים להפרש שבין שני הגדלים, דבר המוביל בדרך כלל למציאת פתרון שגוי לבעיה.

2. תנאי שני דורש שקשר כפלי זה יהיה קבוע ובאותו כיוון (פרופורציה של יחס ישר) או בכיוונים מנוגדים (פרופורציה של יחס הפוך).

לאחר זיהוי הקשר הכפלי, הלומד צריך לזהות שהקשר נשאר קבוע לאורך זמן. קיימים שני מקרים:

במקרה של **פרופורציה של יחס ישר** הקשר הכפלי מקבל ביטוי מתמטי באמצעות **מנת חילוק קבועה** בין שני גדלים. מנת החילוק נשארת קבועה ואינה משתנה במהלך המצב המתואר בבעיה, כלומר, אם המונה גדל/קטן גם המכנה גדל/קטן באותו פקטור (השינוי באותו כיוון).

במקרה של **פרופורציה של יחס הפוך** הקשר הכפלי מקבל ביטוי מתמטי באמצעות **מכפלה קבועה** בין שני גדלים. מכפלה זו נשארת קבועה ואינה משתנה במהלך המצב המתואר בבעיה, כלומר, אם אחד הגדלים גדל/קטן הגודל השני קטן/גדל באותו פקטור (השינוי בכיוונים נגדיים).

זיהוי שני התנאים מאפשר לנתח מצב נתון בבעיה בה קיימת פרופורציה, ולמצוא לבעיה פתרון המבוסס על שכילה פרופורציונלית.

3. תכונות מתמטיות של המושגים יחס ופרופורציה

3.1 החלת חוקי השברים על יחסים

יחס בין שני גדלים יכול להיות מיוצג על-ידי שבר, ולכן ניתן להחיל את חוקי השברים על יחסים.

דוגמאות

- **צמצום והרחבה של יחס** : $(a,b,c,d,m\neq 0)$

אם נתון היחס a/b, ניתן **להרחיב את היחס** פי m ולקבל $a/b=m\times a/m\times b$ וניתן **לצמצם את היחס** פי m ולקבל $\frac{a}{b}=\frac{a:m}{b:m}$.

השימוש בצמצום ובהרחבה של שברים (יחסים) בתהליך פתרון בעיות של יחס ופרופורציה נפוץ מאוד; לדוגמה, כאשר אפשר להקטין (לצמצם) את היחס ולקבל את היחס המצומצם ביותר. פעולה זו מאפשרת לבצע חישובים במספרים קטנים יותר. לחילופין, כאשר נתונים מספרים לא שלמים אפשר להרחיב את היחס ולהגיע למונה ומכנה, המבוטאים על-ידי מספרים שלמים.

- **חיבור וחיסור יחסים** : $(a,b,c,d\neq 0)$

אם נתון היחס a/b והיחס c/d אזי ניתן ליצור יחס חדש של $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}$ על-ידי חיבור או חיסור היחסים הנתונים.

לדוגמה, שימוש בחיבור של שני יחסים דרוש בבעיה הבאה: בכיתת לימוד מסוימת התלמידים מחולקים ל- 3 קבוצות לפי הישגיהם. בקבוצה הראשונה תלמידים בעלי הישגים טובים ומעלה, בקבוצה השנייה תלמידים בעלי הישגים בינוניים ובקבוצה השלישית תלמידים בעלי הישגים חלשים. בכיתה זו היחס בין מספר התלמידים בעלי ההישגים החלשים לבין כלל התלמידים הוא 1:3 ואילו היחס בין מספר התלמידים בעלי ההישגים הבינוניים לבין כלל התלמידים הוא 1:4.

מהו היחס בין מספר התלמידים בעלי ההישגים הטובים ומעלה לבין כלל התלמידים בכיתה זו? למציאת הפתרון נחוץ תחילה לחבר את היחסים $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ ולאחר מכן לחסר את התוצאה מ- 1 על מנת לקבל את היחס המבוקש.

במקרה ונתון היחס בין מספר התלמידים בעלי ההישגים החלשים והבינוניים ביחד לבין כלל התלמידים כגון, 7:12 ונתון היחס של אחד מהם כגון היחס בין מספר התלמידים בעלי ההישגים החלשים לכלל התלמידים 1:3 והשאלה היא מהו היחס בין מספר התלמידים בעלי ההישגים הבינוניים לבין כלל התלמידים, הרי נצטרך לבצע פעולת חיסור בין שני היחסים הנתונים: $\frac{7}{12}-\frac{1}{3}$.

- **כפל יחסים** : $(a,b,c,d\neq 0)$

אם נתון היחס a/b וגם היחס c/d, ניתן ליצור יחס חדש $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ על-ידי מכפלת היחסים.

שימוש לתכונה זו נמצא בבעיה שבה מתוארת סיטואציה המחייבת התחשבות בשני יחסים בו-זמנית. לדוגמה, כמה שולחנות מכל סוג יש במסעדה שבה שני סוגי שולחנות: שולחן גדול סביבו אפשר להושיב 10

אנשים ושולחן קטן סביבו אפשר להושיב 8 אנשים; כאשר בעל המסעדה רוצה לשמור על יחס קבוע של 9:5 בין מספר השולחנות הגדולים לבין מספר השולחנות הקטנים, וליצור מקום בדיוק ל- 390 סועדים.
במקרה זה יש צורך למצוא את ה"יחס המשותף" בין שני היחסים: **היחס הראשון** 10:8 קשור למספר המקומות סביב כל סוג של שולחן. זהו היחס בין 10 מקומות סביב שולחן גדול לבין 8 מקומות סביב שולחן קטן. **היחס השני** 9:5 קשור למספר השולחנות. זהו היחס בין 9 שולחנות גדולים לבין 5 שולחנות קטנים. היחס המשותף יהיה $\frac{10}{8}\times\frac{9}{5}=\frac{10\times 9}{8\times 5}$ (90:40 או 9:4). זהו למעשה היחס בין מספר המקומות סביב 9 שולחנות גדולים (10×9) לבין מספר המקומות סביב 5 השולחנות קטנים (8×5). כיוון שבעל המסעדה רוצה שסך כל מקומות הישיבה יהיה 390, אזי דרושים 390:130=3, כלומר, 3 קבוצות של שולחנות. היחס בין השולחנות הגדולים והקטנים הוא 9:5 ולכן, ב- 3 קבוצות של 9 נקבל 27 שולחנות גדולים (9×3) וב- 3 קבוצות של 5 נקבל 15 שולחנות קטנים (5×3).

- **חילוק יחסים**: ($a, b, c, d \neq 0$)

אם נתון היחס a/b ויחס אחר c/d אזי ניתן ליצור יחס חדש $\frac{a}{b}:\frac{c}{d} \Leftarrow \frac{a\times d}{b\times c}$ על-ידי חילוק היחסים זה בזה.
שימוש לתכונה זו נמצא בכל בעיה בה מתוארת סיטואציה המחייבת בדרך זו או אחרת למצוא פי כמה גדול או קטן אחד היחסים מהשני.

3.2 כללי הפרופורציה ותכונותיה

- אם נתונה הפרופורציה $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ($a, b, c, d \neq 0$) אזי מתקיים $a\times d=b\times c$, כלל זה ניתן להוכחה על-ידי כפל בהצלבה אלגברית. כמו כן, ניתן להפוך את היחסים המרכיבים את הפרופורציה ולקבל $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$.
- מהכלל הראשון מתקבלת תכונה **חשובה**: אפשר להחליף בין **שני הגדלים b ו- c** (האיברים הפנימיים) **לבין עצמם ואפשר להחליף בין שני הגדלים a ו- d** (האיברים החיצוניים) לבין עצמם. **כלומר**, אם נתונה הפרופורציה $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ($a, b, c, d \neq 0$) אזי נכונות גם הפרופורציות הבאות: $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ או $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$.
- תכונה זו מצביעה על כך שאפשר להציג **כל פרופורציה בארבע צורות שונות**. ראוי להתייחס לכך, שמבחינה קומבינטורית יש 24 אפשרויות לסדר 4 גדלים. כלומר, תלמידים יכולים לטעות כאשר הם מתאימים את הגדלים בעלי הקשר הפרופורציוני זה לזה.
- כלל נוסף מתייחס למקרה שבו **נתונים מספר יחסים** – הכלל אומר, שהיחס שנוצר בין חיבור/חיסור **המונים** לחיבור/חיסור **המכנים שווה לכל אחד מהיחסים הנתונים**.

בסימנים מתמטיים: ($a, b, c, d, e, f, g, h \neq 0$) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\frac{a\pm c\pm e\pm g}{b\pm d\pm f\pm h}$.

- **כללים נוספים** נובעים ממניפולציות אלגבריות: **לדוגמה,** אם נתונה הפרופורציה $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ($a,b,c,d \neq 0$) אז על-ידי מניפולציה אלגברית של חיבור או חיסור של 1 משני צדי המשוואה ($\frac{a}{b}\pm 1=\frac{c}{d}\pm 1$) ואח"כ שימוש במכנה משותף בכל אגף, נקבל את התוצאה הבאה: $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$.

3.3 שימוש בכללי הפרופורציה ובתכונותיה

א. מציאת הגודל הפרופורציוני הרביעי במשוואות שבהן קיימת פרופורציה

כאשר נתון קשר פרופורציונלי בין ארבעה גדלים, אזי אם נתונים שלושה מהם אפשר בעזרת תכונות הפרופורציה וכלליה למצוא את הגודל הפרופורציונלי הרביעי – The fourth proportional.

דוגמאות:

- אם נתון $a / b = c / x$ אזי $x = b\times c/a$ או אם נתון $x / b = c / d$ אזי $x = b\times c/d$ וכו'.
- מצא את x במשוואה הנתונה: $(x-2) / x = (x+4) / 15$ $\Leftarrow$ לפי כלל ההצלבה

$15\times(x-2) = x\times(x+4)$ $\Leftarrow$ $x_1 = 5$; $x_2 = 6$.

ב. בעיות ערך חסר - מציאת הגודל הפרופורציוני הרביעי בבעיות שבהן קיימת פרופורציה

בבעיות אלו נתונה פרופורציה בין ארבעה גדלים, שלושה מהם נתונים ויש למצוא את הגודל הפרופורציוני הרביעי. למעשה, כדי לפתור בעיות כמותיות אלו צריך להשוות בין שני יחסים.

דוגמה לבעיה המתארת מצב של פרופורציה של יחס ישר:

בקורס מתודיקה 12 סטודנטים באים מחוץ לעיר ו- 20 סטודנטים גרים בעיר. הסתבר שהיחס בין המגיעים מחוץ לעיר לבין הגרים בעיר נשמר גם בקורס יסודות המתמטיקה. כמה מקומות צריך לשריין להסעה מחוץ לעיר, אם בקורס יסודות המתמטיקה 25 סטודנטים גרים בעיר?

במקרה זה היחס 12/20 שווה ליחס x/25 ולאחר שמשווים בין היחסים $12/20 = x/25$ נשאר לפתור משוואה פרופורציונית. התוצאה המתקבלת היא 15 סטודנטים שגרים מחוץ לעיר בקורס יסודות המתמטיקה ולכן צריך לשריין 27 מקומות להסעה מחוץ לעיר.

פרוידנטל (Freudenthal, 1978,1983 אצל בן-חיים, 2002) הצביע על כך, שניתן לפתור בעיות עם ערך חסר ובעיות השוואה מספריות בשלוש גישות שונות:

1. השוואת יחסים של **אותו משתנה**, כגון: שני אורכים או שני זמנים. הוא קרא לגישה זו שימוש ב"יחסים פנימיים" - "Internal Ratios" או ב"שיטה הסקלרית" – "Scalar Method".
2. השוואת היחסים של **שני משתנים שונים** כגון אורך וזמן. הוא קרא לגישה זו שימוש ב"יחסים חיצוניים" – "External Ratios", או ב"שיטה פונקציונלית" - "Functional Method".
3. הימנעות מחישובים עד שהתוצאה מתקבלת באופן פורמלי, או בניית מערכת יחסים המערבת את כל הנתונים ורק אז לערוך את החישובים.

ג. השוואה בין שני יחסים

התכונה המאפשרת **צמצום והרחבה** של היחס, מסייעת לערוך השוואה בין יחסים.

דוגמאות

- כאשר רוצים לדעת איזה שבר גדול יותר 4/15 או 3/14, יש צורך בהשוואה בין שני השברים. מבחינה מתמטית אחת הדרכים להשוואה בין היחסים היא הרחבת שני היחסים לכדי מכנה משותף. פעולה זו של הרחבה מתאפשרת כתוצאה משימוש בתכונת ההרחבה והצמצום של פרופורציה.

בסימנים מתמטיים:

$\frac{56}{218}=\frac{4\times14}{15\times14}=\frac{4}{15}<\frac{45}{218}=\frac{3\times15}{14\times15}=\frac{3}{14}$ כלומר, $\frac{4}{15}<\frac{3}{14}$. אפשר גם להשוות בין השברים בדרכים אחרות, כגון, השוואה של המונים (מונה משותף): $\frac{12}{45}=\frac{4\times3}{15\times3}<\frac{12}{56}=\frac{3\times4}{14\times4}=\frac{3}{14}$. במקרה זה יש צורך לשים לב שהמונים של שני השברים זהים (12) ולכן ככל שהמכנה גדול יותר השבר קטן יותר.

- כאשר רוצים לפתור **בעיות השוואה** משתמשים באותה תכונה של הרחבה וצמצום, לדוגמה, מכונית אחת נוסעת 180 ק"מ ב- 3 שעות. מכונית שנייה נוסעת 400 ק"מ ב- 5 שעות. איזו מכונית מהירה יותר?

פתרון: היחס בין מרחק הנסיעה לזמן הנסיעה של המכונית הראשונה הוא 180/3 (זוהי למעשה המהירות) והיחס של המכונית השנייה הוא 400/5. נשווה בין היחסים ונקבל 60 קמ"ש = 180/3 < 400/5 = 80 קמ"ש כלומר, המכונית השנייה מהירה יותר (מהירותה גבוהה יותר).

4. שימושים אחרים בפרופורציה

פרופורציה בין גדלים מתגלה בסיטואציות מתחומי דעת מגוונים. כללי הפרופורציה יכולים לסייע לפתרון בעיות בתחומי דעת אלה. לדוגמה, **בגיאומטריה** – הקשר בין קטעים פרופורציוניים, לפי משפט תלס יכול לסייע במציאת תכונות של משולשים דומים; הקשר הפרופורציוני, שבין היקף מעגל לבין קוטרו או הקשר שבין אורך צלע ריבוע לבין היקפו, מאפשרים למצוא ערכים חסרים כאורך רדיוס או כאורך צלע. **הטכנולוגיה** מנצלת את הפרופורציה של יחס הפוך, שבין אורך זרועות מאזניים לבין משקל המשקולות בקצות המאזניים, למציאת מרכז הכובד. **בפיזיקה** – הקשר הכפלי, שבין מרחק לבין זמן מכונה מהירות, ומאפשר מציאת שלושת הגדלים מהירות, זמן, דרך (כאשר נתונים רק שניים מהם). **בכימיה** – היחס בין משקל ונפח של גוף, מייצג את המשקל הסגולי של הגוף. כמו כן קיימת פרופורציה של יחס ישר בין לחץ לבין טמפרטורה ופרופורציה של יחס הפוך בין לחץ לבין נפח. **בגיאוגרפיה** – היחס בין מרחק במפה לבין המרחק במציאות, המיוצג על-ידי קנה המידה של המפה מאפשר התמצאות טובה במרחב וכו'.

הפרק עובד מתוך

בן-חיים, ד', קרת, י', אילני, ב' (2005). **יחס ופרופורציה –בהכשרה והשתלמויות מורים למתמטיקה.** מופת. (בדפוס).

מקורות

בן-חיים, ד' (2002). יחס ופרופורציה סקירה והשוואה בין תלמידים מתכנית לימודים חדשה לעומת תכנית לימודים מסורתית. **מספר חזק 2000**, 4, 5-15. (קישור למאמר)

קרת, י' (1998). **שכילה פרופורציונלית של מבוגרים - פרחי הוראה ומורים למתמטיקה בבית הספר היסודי ותהליכי שינוי בעקבות הוראת יחידת לימוד בנושא "יחס ופרופורציה"**. עבודת גמר לתואר "דוקטור לפילוסופיה", אוניברסיטת תל-אביב: תל-אביב.

Borowski, E.J., & Borwein, J.M. (1989). *Collins Dictionary of Mathematics*. Great Britain: Harper Collins Publishers.

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and Sowing: A Preface to a Science of Mathematical Education.* Dordrecht: D. Riedel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel. (pp. 178-209).

Thompson, P.W., & Thompson, A.G. (1994). Talking about rates conceptually, part I: A teacher's struggle. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (3), 279-303.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E.K, (1983). Early adolescent's proportional reasoning on '"rate" problems. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 219-233.