

היבט פסיכולוגי-דידקטי - שכילה פרופורציונלית

ד"ר בת-שבע אילני, מכללת בית ברל

תחום תוכן מתמטי (בהתאמה לסילבוס) - יחס.

המושגים "יחס ופרופורציה" הם מושגים בסיסיים במתמטיקה ויש להם חשיבות רבה בתחומי דעת רבים אחרים, שבהם תופעות שונות מתוארות, כיוחס בין שני משתנים היוצרים פרופורציה ביניהם. המשגה של המושגים ויכולת לעשות בהם שימוש בפתרון בעיות מתחומי דעת אלו, תסייע ללומדים בהבניית הידע המתמטי הנלמד. אך חשוב מכך, תביא לפיתוח היכולת להשתמש בסכמת הפרופורציה, כלומר, לשְכִילָה פרופורציונלית – Proportional Reasoning, החיונית לפיתוח חשיבה מתמטית אנליטית.

שְכִילָה פרופורציונלית - Proportional Reasoning הנה היכולת האנושית להשתמש בצורה יעילה בסכמת הפרופורציה. ליכולת זו תפקיד מרכזי בהתפתחות החשיבה המתמטית ולעיתים קרובות היא מתוארת כמושג, שמחד הוא משמש אבן פינה למתמטיקה הגבוהה, ומאידך הוא משמש כגולת הכותרת של מושגי היסוד (Lesh, Post, and Behr, 1988).

לשְכִילָה פרופורציונלית תפקיד מעשי חשוב, כתכנית פעולה המסייעת לפתרון בעיות בתחומי דעת מגוונים, המתארות סיטואציות בהן קיימים קשרים של פרופורציה בין גדלים. שימוש בפרופורציה נעשה במתמטיקה (בהנדסה, בגיאומטריה, בטריגונומטריה, בסטטיסטיקה ובהסתברות ועוד), בפסיקה (במכניקה, בחשמל, ועוד) בכימיה (בחישובי ריכוזים, איזון משוואות כימיות, ועוד), בכלכלה ועוד.

שכילה פרופורציונלית (Proportional Reasoning) היא במרכז הליבה של המתמטיקה בגילאי הביניים בכיתות ה-ח. אי לכך, לנושאים של יחס ופרופורציה יש מקום מרכזי בתכנית הלימודים במתמטיקה בגילאי ההתבגרות הצעירים בכיתות ה-ח. באופן עקרוני שכילה פרופורציונלית עוסקת יותר ביחסים מתמטיים שהם כפליים מטבעם (multiplicative) מאשר ביחסים חיבוריים (additive).

חשיבה פרופורציונלית היא אחת מצורות החשיבה המתמטית. היא כוללת חוש לשינויים כפולים (covariation) השוואות מרובות (multiple comparisons), ויכולת לאכסן ולעבד מנטלית מספר חלקי מידע. החשיבה הפרופורציונלית קשורה עם הסקת מסקנות וניבויים וכוללת שיטות חשיבה – הן איכותיות והן כמותיות.

פתרון לבעיית "יחס ופרופורציה", כמו לכל פעולה מתמטית אחרת, כולל שלושה מרכיבי ידע מרכזיים: ידע אינטואיטיבי, ידע אלגוריתמי וידע פורמאלי (Fischbein, 1993). שליטה בשלושת מרכיבי הידע והיכולת לשלב ביניהם תביא להמשגת המושג יחס וקרוב לוודאי תאפשר לאדם לפתור נכון בעיות אלו (Thompson & Thompson, 1994; Harel & Confrey, 1994).

פיאז'ה ואינהלדר (Inhelder & Piaget, 1958) היו ראשוני החוקרים, שממצאי מחקריהם הצביעו על כך, שסכמת הפרופורציה מתפתחת בשלושה שלבים:

השלב האינטואיטיבי (גיל 3-7) – חוסר יכולת תיאום בין שני משתנים, שיקולי הדעת הם אינטואיטיביים.

השלב הקונקרטי (גיל 8-12) – יכולת תיאום בין שני משתנים והבנת הקשר הפרופורציונלי ביניהם. אך, כל זאת בצמוד למצב קונקרטי של התנסות ישירה, ללא הבנת החוקיות והכללתה לחוק פורמלי-מתמטי. יכולת זו מצביעה על כך שלאדם סכמת פרופורציה פוטנציאלית, המאפשרת לפתור בעיות פרופורציונליות פשוטות.

השלב הפורמלי (גיל 12-15): הבנת החוקיות של קשרים פרופורציוניים. הבנה זו מצביעה על כך שלאדם יש סכמת פרופורציה אקטואלית בשלה, אשר יכולה לשמש ככלי מנטלי יעיל בתהליך פתרון בעיות פרופורציונליות.

ממצאים אלה הביאו את החוקרים למסקנה, שסכמת הפרופורציה, כמו כל סכמה אופרציונית אחרת, מבשילה מאליה בגיל ההתבגרות, בשלב ההתפתחות של חשיבה פורמלית, ומאפשרת לאדם להשתמש בה, כאסטרטגיה לפתרון בעיות ולהסקת מסקנות מופשטות וכלליות.

גישה התפתחותית זו טוענת, שבשלב הפורמלי, עם הבשלת סכמת הפרופורציה, כאשר האדם יפגוש בעיות בהן יש קשר פרופורציונלי בין גורמים, הוא יפנה לסכמת הפרופורציה באופן ספונטני, ויעשה בה שימוש מושכל, כתכנית פעולה לפתרון הבעיות. ואילו לפני השלב הפורמלי האדם אינו מסוגל לעשות זאת.

בעקבות התיאוריה של פיאז'ה לפיה הציג את השכילה הפרופורציונלית כסימן המרכזי להתפתחות אופרציות בשלב ההתפתחות הפורמלי (Inhelder & Piaget, 1958), המחקר התמקד על השכילה הפרופורציונלית של תלמידים בגיל ההתבגרות (Tourniaire, 1986). לפי אמות המידה (Standards) של ארגון המורים למתמטיקה בארה"ב (NCTM): היכולת לחשיבה פרופורציונלית מתפתחת אצל תלמידים במהלך כיתות ה-n. אי לכך, "קיימת חשיבות מרובה להקדיש כל מאמץ וזמן דרוש על מנת להבטיח את התפתחותה הנאותה" (NCTM, 1989, p.82).

יחד עם זאת, מחקרים רבים מצביעים על קשיים וחוסר שליטה של תלמידים רבים בכל הגילים בנושא החשיבה הפרופורציונלית, כולל סטודנטים במכללות (Lawton, 1993).

כמו כן, קיימת עדות לכך, כי חלק ניכר בחברה שלנו, לעולם לא רוכש שליטה בחשיבה פרופורציונלית (Hoffer, 1988, p. 285). מחקרים הראו שתרגול מתאים יכול לעורר סכימה פוטנציאלית קיימת ולהפוך אותה לסכמה פרופורציונלית אקטואלית, כלומר, לשכילה פרופורציונלית (קרת, 2000).

קשיים בתהליך פתרון בעיות "יחס ופרופורציה"

סקירת הספרות של טורנייר ופולוס (Tourniaire, & Pulos, 1985) מצביעה על מספר רב של גורמים המשפיעים על קשיים ברמת הביצוע של תלמידים בתהליך פתרון בעיות פרופורציונליות. המקורות העיקריים לקשיים, אצל ילדים בוגרים ומבוגרים גם יחד, הם קוגניטיביים, הנובעים מעצם היות סכמת הפרופורציה סכמה אופרציונית מסדר שני, אופרציה על אופרציה (1958 Inhelder & Piaget). פיאיזה מדגיש שהקושי נובע מכך, שהבנת הפרופורציה דורשת השוואה בין שני יחסים, אשר כל אחד מהם דורש יכולת תיאום בין שני משתנים. בנוסף לכך, דרושה יכולת למיין את סוג היחס בסיטואציה המתוארת בבעיה לפרופורציה של "יחס ישר" או "יחס הפוך".

קושי קוגניטיבי נוסף יכול להיווצר כאשר היחס הוא גודל אינטנסיבי – יחס מסוג Rate היוצר מושג חדש בעל ישות עצמית, כגון מהירות, הספק וכו'. המושג החדש דורש הבנת תהליכים וידע של חוקים בתחום הדעת הרלבנטי, בנוסף לידע מתמטי הקשור לפרופורציה. חוקים ותהליכים פסיקליים אלה יכולים להיות מובנים אינטואיטיבית לילדים, כתוצאה מהתנסות, הרבה לפני ההבנה הפורמלית (Lamon, 1994). הקושי נובע בעיקר מכך, שבנוסף להבנה האינטואיטיבית של החוק, הם צריכים להיות בעלי יכולת לתרגם את התוצאות, שהתקבלו בפעילויות המעשיות לגדלים כמותיים, לארגן אותם ליחסים מתמטיים ולהציגם כפרופורציה בסכמה מתמטית. התרגום הנדרש בפתרון של בעיות פרופורציונליות הוא שימוש בתבניות כפוליות - multiplicative, אשר הן מורכבות יותר מתבניות חיבוריות - additive, בהן משתמש התלמיד בשנות לימודיו הראשונות בב"ס יסודי (Vergnaud, 1994). שְׁכִילָה חיבורית, המתפתחת בגיל צעיר, גורמת לקשיים קוגניטיביים במעבר לעולם שבו נדרשת שְׁכִילָה כפולית.

מלבד הקשיים הקוגניטיביים ישנם משתנים נוספים הגורמים לקשיים בפתרון הבעיות והם משפיעים בעיקר על תהליך ביצוע הפתרון (Tourniaire, & Pulos, 1985). משתנים אלו קשורים מחד באופי המטלה – דרגת הקושי של בעיה מושפעת ממהות השאלה הנשאלת ומתחום הדעת המתואר בסיטואציה שבבעיה ומאופי המספרים הנתונים בבעיה (מספרים גדולים/קטנים מאוד ותחומי דעת לא מוכרים, יכולים להקשות בביצוע הפתרון (Karplus et al., 1983 ; Hart, 1981 ; ואחרים). ומאידך, בתלמיד המשיב על הבעיה (גיל ורמת ההתפתחות של שְׁכִילָה פרופורציונלית, מין, אינטליגנציה וכו').

כבר במחקרם של פישביין וחובריו (Fischbein, Manzat, & Barbat, 1975) נמצא, שתרגול מתאים יכול לסייע בעיקר בהתגברות על הקשיים הקוגניטיביים. במסגרת התרגול והאימון במחקר לעיל, הודרכו התלמידים לחפש תכניות פעולה פרי המצאתם, המעודדות אותם לעשות שימוש בסכמת הפרופורציה ועל-ידי כך להוציאה מ"הכוח אל הפועל" – מסכמה פרופורציה פוטנציאלית רדומה לסכמת פרופורציה אקטואלית המשמשת כלי מנטלי יעיל.

התרגול כלל בעיות קונקרטיות הקרובות לעולמו של הילד. החשיבות שיש לשילוב הידע המציאותי - realistic knowledge, שהתלמיד רוכש מחוץ לכותלי בית הספר, בבעיות של יחס

ופרופורציה והשפעתו הרבה לטובה של ידע זה, על התפתחות שכיחה פרופורציונלית נמצאו גם בממצאי מחקרים אחרים (Greer, 1993 ; Verschaffel, De Corte, & Lasure, 1994).

ממצאי מחקרם של בן-חיים וחובריו (Ben-Chaim et al., 1998) מצביעים על-כך שתלמידי כיתה ז אשר למדו לפי תכנית לימודים שעודדה אותם להבנות בעצמם את הידע המושגי והידע הפרוצדורלי שלהם, היו מסוגלים לפתח בעצמם רפרטואר של כלים בעלי שכיחה, אשר סייעו להם לייצר פתרונות והסברים יעילים. הממצאים ממחקר זה התקבלו מניתוח של אסטרטגיות הפתרון של תלמידי כיתה ז לבעיות תנועה. השאלות שנבחרו היו בעיות מעולמו של הילד, שאלות פתוחות לא שגרתיות ומעוררות חשיבה.

ממצאי מחקרם של בן-חיים, אילני וקרת, (2001), מצביעים על כך שלאחר חשיפה והתנסות בפעילויות חקר אותנטיות בנושא יחס ופרופורציה הצליחו הנבדקים – פרחי הוראה ומורים לבית הספר היסודי, לפתור טוב יותר שאלות בשאלון ידע, כמו כן הם הצליחו למצוא יותר דרכים לפתרון הבעיות, וההסברים שלהם לדרך הפתרון היו הרבה יותר טובים ואיכותיים יותר מאשר לפני ההתנסות. כמו כן, חל שיפור ניכר בעמדותיהם כלפי הנושא על כל מרכיביו והיבטיו.

הפרק עובד מתוך

בן-חיים, ד', קרת, י', ואילני, ב' (2005). **יחס ופרופורציה - בהכשרה והשתלמויות מורים למתמטיקה**. מופ"ת. (בדפוס)

מקורות

בן-חיים, ד' (2002). יחס ופרופורציה: סקירה והשוואה בין תלמידים מתכנית לימודים חדשה לעומת תכנית לימודים מסורתית. **מספר חזק 2000**, 4, 15-5. ([קישור למאמר](#)).

בן-חיים, ד', אילני, ב', וקרת, י' (2001). **"יחס ופרופורציה – ידע מתמטי ופדגוגי של פרחי הוראה ומורים למתמטיקה בבית ספר יסודי לפני ואחרי התנסות בפעילויות בלמידת הנושא בגישה חדשנית"** – דו"ח מחקר. מופ"ת.

קרת, י' (2000). שכיחה פרופורציונלית של מבוגרים – פרחי הוראה ומורים למתמטיקה בבית הספר היסודי ותהליכי השינוי בעקבות הוראת יחידת לימוד בנושא "יחס ופרופורציה". **דפים**, 30, 81-105.

Ben-Chaim, D., Ilany, B. & Keret, Y. (2002) Mathematical and Pedagogical Knowledge of Pre-and In-service Elementary Teachers Before and After Experience In Proportional Reasoning Activities. *PME26*, V(2), 81-88.

- Ben-Chaim, D., Fay, J.T., Fitzgerald, M.W., Benedetto, C., & Miller, J. (1998). Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experience. *Educational Studies in Mathematics*, 36, 247-273.
- Fischbein, E., Manzat, I., & Barbat, I. (1975). *The Development of the Investigative Capacity in Students*. (פרסום פנימי אוניברסיטת ת"א).
- Fischbein, E. (1993). The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In R. Biehler, W.R. Scholz, R. Strasser, & R. Winkelmann, (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, (pp. 231-245). Netherlands, Dordrecht: Kluwer.
- Greer, B. (1993). The modeling perspective on wor(l)d problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 12, 239-250.
- Harel, G., & Confrey, J. (Eds), (1994). *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*. Albany, New York: SUNY Press.
- Hart, K.M. (Ed.). (1981). *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*. London: John Murray.
- Hoffer, A. (1988). Ratios and proportional thinking. In T. Post (Ed.), *Teaching Mathematics in Grades K - 8: Research Based Methods*, (pp. 285-313). Boston: Allyn and Bacon.
- Inhelder, B., & Piaget, J.(1958). *The Growth of Logical Thinking From Childhood to Adolescence*. New York: Basic Books, Inc.
- Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E.K, (1983). Early adolescent's proportional reasoning on "rate" problems. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 219-233.
- Keret, Y. (1999). Change processes in adult proportional reasoning: Student teachers and primary mathematic teachers, after exposure to ratio and proportion study unit. *PME23*, V(3), 153-160.
- Lamon, Y.S. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiptlicative Reasoning in the Learning of Mathematics*, (pp. 89-120). New York: SUNY Press.
- Lawton, C.A. (1993). Contextual factors affecting errors in proportional reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 460-466.

- Lesh, R., Post, T.R., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hielbert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*, (pp. 93-118). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA.: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1995). *Assessment Standards for Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Thompson, P.W., & Thompson, A.G. (1994). Talking about rates conceptually, part I: A teacher's struggle. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(3), 279-303.
- Tourniaire, F. (1986). Proportions in elementary school. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 401-412.
- Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 181-204.
- Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and why? In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*, (pp. 41-59). New York: SUNY Press.
- Verschaffel, L., De Corte, E., & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in Mathematical modeling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction*, 4, 273-294.