<u>המתמטיקאי שהוציא חתך-זהב מארנבים</u>

ליאונרדו פיבונאצ'י נולד ב-1170 בערך, בפיזה, בצפון איטליה והמפורסמת כיום במגדלה הנטוי.

שמו הפרטי היה ליאונרדו אך דבק בו הכינוי פיבונאצ'י, שפירושו: הבן של בונאצ'י, שם משפחתו. אביו היה פקיד ממשלתי בכיר למדי שעסק בנושאי מכס ומסחר. בצעירותו, רכש פיבונאצ'י השכלה רחבה ברוח מקצועות הקלאסיקה: אריתמטיקה, גאומטריה, אסטרונומיה, לוגיקה, דקדוק, מוסיקה ורטוריקה (אמנות הדיבור). העיר פיזה היתה מרכז סחר בינלאומי עם ספרד, סוריה וצפון אפריקה ואביו של פיבונאצ'י שימש בתפקיד המקביל כיום לעמיל מכס. הוא גבה מיסים ועמלות עבור סחורות מיובאות. בשנות התשעים נשלח אביו במסגרת עבודתו לאותן ארצות שלהן היו קשרי מסחר וב-1192 ישבה המשפחה זמן מה באלג'יר. בעת שהותו בצפון-אפריקה למד פיבונאצ'י מהערבים את שיטת הספירה ההודית שהופצה ע"י אלחווריזמי אך טרם זכתה להכרה באירופה. נראה שפיבונאצ'י, בשנות העשרים לחייו, למד במסגרת מסעותיו עם אביו בבגדאד, במצרים, בסוריה ובספרד את המתמטיקה היוונית כמו גם את התרבות הערבית ואת תרומתה החשובה למתמטיקה. בשובו לפיזה, בשנת 1200 לערך, לימד מתמטיקה עד לשנות השלושים של המאה.

התעניינותו, סקרנותו ויכולתו האינטלקטואלית הביאו אותו לכתוב את חיבורו הראשון על חישובים מספריים ועל אלגברה. בחיבור זה מציג פיבונאצ'י את שיטת הספירה ההודית שהופצה ע"י אלחווריזמי ותורגמה ללטינית ע"י אבן-דאוד. פיבונאצ'י מסביר איך לבצע את ארבע פעולות החשבון באמצעות 10 ספרות בשיטה העשרונית עם סימון מקומי. יוזמה זו של פיבונאצ'י עודדה וקידמה את המעבר לכתיבה עשרונית במקום הספרות הרומיות המסורבלות או האותיות היווניות שאינן מאפשרות חישובים מהירים ויעילים. באותו חיבור הציג פיבונאצ'י שיטה לפתרון שתי משוואות עם שני נעלמים וגם דרך לפתרון משוואה מהמעלה הרביעית ע"י השלמה לריבוע מאחר וחזקה רביעית מהווה חזקה שניה של חזקה שניה. כמו המתמטיקאים המוסלמים, השתמש פיבונאצ'י במילים לסימון נעלמים ולא בייצוג סימבולי או בקיצורים, אך יש להדגיש שפתרונותיו היו אריתמטיים ולא גאומטריים. הוא סבר, כמו עומר כיאם, שאין פתרון אלגברי כללי למשוואה מהמעלה השלישית (קובית).

את יכולתו לפתור מקרה פרטי של משוואה קובית הראה פיבונאצ'י בעת ביקורו של שליט סיציליה פרדריק II, שהיה חובב אמנות, מדע ונושאים אינטלקטואליים אחרים. בשנת 1125 התארח פרדריק עם פמלייתו, שכללה גם מתמטיקאים, בצפון איטליה. פיבונאצ'י הוזמן למעונו של השליט והמתמטיקאי הסיציליאני הראשי, ג'ון מפלרמו, הציג לו שלושה אתגרי חשיבה. שלוש הבעיות מוצגות בחיבור בשם "ספר הריבועים"(Liber) Quadratorum שכתב פיבונאצ'י ב-1225. בין השאר מוצגות בו בעיות המוליכות למשוואות עם נעלמים בנוסח האופייני ל"אבי האלגברה", דיופאנטוס, מהמאה השלישית.

אחת הבעיות היתה משוואה מהמעלה השלישית:

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

מאחר ולא ידע על פתרון כללי, פתר פיבונאצ'י את המשוואה בשיטת ניסוי וטעיה, שיש בה מחשבה והבנה.

הוא הציב 1 במקום x וקיבל 13 הקטן מ-20 המבוקש. הציב 2 וקיבל 36 הגדול מ-20. כך תחם את התוצאה בין 1 ל-2 והגיע באמצעות הצבות של מספרים בתחומים האפשריים, ל...1.368808107, דיוק של 9 ספרות אחרי הנקודה ואם מציבים, מקבלים: ...19.99999998 וזה דיוק לא רע בכלל.

יש להדגיש שהפתרון המדויק הוא מספר אי-רציונאלי ופיבונאצ'י היה ער לכך ובעצם הרחיב את תחום המספרים שהיוונים הגבילו על ידי בניה באמצעות סרגל ומחוגה. היוונים הכירו במספרים אי-רציונליים אך רק באלה הנוצרים ממספרים שלמים כמו במשולש ישר זווית שווה שוקיים למשל, בו כל ניצב שווה ליחידה אחת והיתר לשורש ריבועי של 2.

הבעיה השניה שהוצגה לפיבונאצ'י היתה בערך בניסוח הבא: מהו המספר הרציונאלי שאם נוסיף או נחסר 5 מחזקתו השניה (ריבועו), נקבל מספר ריבועי אחר? בשפת האלגברה מקביל ניסוח השאלה למשוואה הדיופאנטית:

$$x^2 \pm 5 = y^2$$

פיבונאצ'י הצליח בדרכו החכמה והמקורית לפתור ולמצוא את המספר: 41/12. אם נבדוק נקבל 41/12 בריבוע שווה ל ...11.6736111 אם נוסיף 5 נקבל ...16.6736111 ומספר זה שווה בדיוק לריבוע של 49/12 .

אם נחסר 5 מ ...11.6736111 נקבל ...6.6736111 ומספר זה שווה בדיוק לריבוע של 31/12.

הבעיה השלישית היתה יותר מילולית מהסוג של חידת אתגר: שלושה אנשים קיבלו מטבעות זהב שהתחלקו ביניהם ביחס מסוים, הם לקחו והחזירו עד שכל אחד קיבל את המגיע לו. פיבונאצ'י הצליח לפתור גם את האתגר הזה, שהפך עם הזמן לחידה מתמטית נפוצה (וולס 1998, חידה 87).

פתרונותיו של פיבונאצ'י למשוואות השונות לא לקחו בחשבון פתרונות שליליים, אולם ישנם מקורות המציינים את מודעותו של פיבונאצ'י לקיומם של מספרים שליליים. כמומחה לבעיות הקשורות למספרים גם בענייני כספים התמודד פיבונאצ'י עם מצב פיננסי שנראה במבט ראשון כבלתי ניתן לפתרון. פיבונאצ'י לא הרים ידיים והגיע למסקנה שהתוצאה חייבת להיות הפסד כספי כמו שמישהו במערכת הכספית לא החזיר את חובו. כולנו מכירים את מושג ה"מינוס" בבנק וגם פיבונאצ'י הגיע למסקנה זו למרות שלא נתן לה ביטוי פרסומי מדעי. אפשר לומר שפיבונאצ'י הכיר במספרים שליליים כפתרונות אפשריים של משוואה, אך לא הציג אותם בדרך מתמטית. המתמטיקה עברה עוד כברת דרך של כ-300 שנה עד להבנת המספר כמושג מופשט שאינו זקוק לייצוג מוחשי כמו אבנים או קטעים הנדסיים.

פיבונאצ'י היה אינטלקטואל שחיפש תשובות לשאלות שהטרידו, גירו את סקרנותו ובמהלך הדורות, החל מתקופת הפיתגוראים, סיפקו דלק לחשיבתם של מתמטיקאים, מדענים ופילוסופים. הוא השתדל להפיץ את רעיונותיו בכתביו כמו במקרה של שיטת הספירה ההודית-ערבית או בפתרון משוואות. כמו כן שילב בכתביו חידות ואתגרי חשיבה ואולי תכונת המורה שבו (הרי עסק בהוראה במשך יותר משלושים שנה) ביקשה לגרות את סקרנותם של אחרים וזאת בתקופה שההשכלה היתה מנת חלקם של מעטים מבין שכבות האצולה והדפוס עדיין לא הומצא.

דוגמה לאתגר-חשיבה מעניין שהתחיל מחידה על התרבות ארנבים, נמשך בהגדרת סדרה שהפכה למפורסמת ביותר והסתיים (לא סופי כי תמיד יש סיכוי לפיתוח וגילוי נוסף) במושג המתייחס לאמנות ולטבע. לא נשאיר אתכם במתח רב ונציג את הבעיה שהופיעה בחיבורו המשמעותי של פיבונאצ'י: "ליבר אבאסי" (Liber Abaci) ובתרגום חופשי - ספר החישובים.

הבעיה מנוסחת בערך כך: כמה זוגות של ארנבים יהיו בסוף השנה אם מתחילים עם זוג ארנבים חדש בתחילת ינואר, לפי התנאים הבאים: כל זוג ארנבים מביא לעולם זוג חדש מדי חודש אך זוג חדש חייב להמתין חודש ומתחיל בתהליך ההמלטה רק מהחודש השני?

אפשר לפתור את הבעיה באמצעות רישום שיטתי בטבלה:

חודש	מספר זוגות היכולים להמליט בחודש הבא	מספר זוגות שלא יכולים להמליט (נולדו החודש)	סה"כ זוגות ארנבים
ינואר	0	1	1
פברואר	1	0	1
מרץ	1	1	2
אפריל	2	1	3
מאי	3	2	5
יוני	5	3	8

ואם נמשיך לפי אותה שיטה וכללים נקבל שמספר זוגות הארנבים בכל חודש שווה לסכום זוגות הארנבים של שני החודשים הקודמים: ...5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 - ואם נחבר את כל מספרי הזוגות בכל חודש נקבל 376 זוגות. 376 = 144+89+55+34+21+13+8+5+3+2+1+1

פתרון זה הפך עם הזמן לחלק הפחות חשוב או מעניין ואת הארנבים מזכירים כקוריוז שהביא בשנים הבאות להצגת סדרת המספרים המפורסמת ביותר מבין סדרות המספרים. נוסף לכך הביאה חקירת הסדרה למציאת יחס מתמטי שגם הוא מפורסם בהיותו קשור לטבע ולאמנות: "חתך הזהב".

וכיצד התגלגלו הדברים מבעיה תמימה על ריבוי ארנבים?

בשנת 1611, כ-300 שנה לאחר פרסום חידת הארנבים, גילה המדען, האסטרונום המפורסם, קפלר, מה שאולי היה ידוע לפיבונאצ'י: סדרת המספרים המתארת את התרבות הארנבים לפי תנאי הבעיה נשמעת לכלל בו כל מספר בסדרה, החל מהמספר השלישי שווה לסכום שני המספרים שלפניו. פשוט וברור ללא צורך בנוסחה מורכבת, למרות שבמבט ראשון לא מבחינים בחוקיות זו: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...

אפשר לבנות סדרות אחרות בסגנון זה: בוחרים שני מספרים כלשהם וממשיכים לרשום את המספרים הבאים כסכום שני המספרים הקודמים. למשל: 4, 7, 11, 18, 29, 47...

כמאה שנים לפני כן, ב-1509 פרסם מתמטיקאי איטלקי בשם פציולי ספר בשם: "היחס (הפרופורציה) האלוהי" (De divina proportione) ובו הוא חוקר ומטפל ביחס 2/(1 + √5) - מחצית של שורש 5 ועוד אחד. יחס מספרי זה מתקבל בעת חקירת צורות מישוריות וגופים ומקורותיו מגיעים עד לבעיות המיוחסות לפיתגוראים ומופיעות אצל אאוקלידס. חשוב לציין שאת האיורים לספר זה עשה לא פחות ולא יותר האמן רב הכישורים ליאונרדו דה וינצ'י - ולא במקרה! הערך המתקבל מחישוב הביטוי 2/(1 + √5) שווה ל...1.61803398 והמספר ההופכי למספר זה שווה ל ...0.61803398. זהו הערך המתקבל אם מחסרים 1 מהמספר הראשון! ואם לא די בקשר ה"מכושף" הזה, אז אם נעלה בריבוע את הערך שהתקבל בתחילה מהביטוי שחישב פציולי: ...1.61803398 בחזקה שניה, נקבל ...2.61803398, הגדול ב-1 מהמספר המקורי. וזה ממש מדהים ויפה.

כ-250 שנה לאחר גילוי זה של פציולי, מצא מתמטיקאי סקוטי בשם רוברט סימון, בשנת 1753, שאם מחלקים מספר מסדרת פיבונאצ'י, במספר השכן לו לפניו, החל מהמספר החמישי ואילך מקבלים יחס מספרי המתנדנד ומגיע לקראת האינסוף לאותו מספר מופלא ...1.61803398 !

כדי לסבר את העין הנה כמה מהיחסים המתקבלים וניתן לראות את ההתקרבות למספר המעניין משני צדדיו:

5/3 = ...1.666,

8/5 = 1.6,

13/8 = 1.625,

21/13 = ...1.61538,

34/21 = 1.619047.

וכך ממשיכים עד שלקראת מספרים גדולים מאוד או כפי שאומרת המתמטיקה, לקראת האינסוף, שואף היחס למספר ...1.61803398 ואפשר לראות שהמספרים שהתקבלו מהיחסים בין המספרים בסדרה "מתנדנדים" סביב מספר זה וכך זה נמשך עד שהם מתלכדים לאותו ערך מופלא: "יחס הזהב" ("חתך הזהב"). יחס זה מופיע בארכיטקטורה של מקדשים והיכלות ביוון העתיקה. הכוונה ליחס שבין אורך ורוחב קומות, גגות או הבניין כולו

ומוצאים יחס כזה בפארתנון המפורסם של אתונה כמו במבנים אחרים. אין סימוכין לכך שהיוונים הקדמונים ידעו על המספר המייצג את "חתך הזהב", אך הגיעו בבניה ליחס זה מבלי להתכוון, עקב היות יחס כזה נעים לעין מבחינה אסתטית. גם בפסלים יווניים אפשר למצוא יחס הקרוב לחתך הזהב ופסל בשם "אפוקסיאומנוס" של איש המנקה את גופו ונמצא בקריית הוותיקן, מציג גם הוא יחס זה בצורה די ברורה.

במאה ה-15 מוצאים גם בציוריו של ליאונרדו דה-וינצ'י את חתך הזהב בציורי הדמויות. בתמונת דיוקן שמניחים שהיא של האמן, מופיעים קווי שתי וערב בצורת מלבנים שכמה מהם מייצגים את יחס הזהב ובציור אחר של הקדוש סנט ג'רום מופיע יחס זה בממדי הגוף. אבל אולי אין זה מפתיע אם נזכור שדה-וינצ'י אייר את ספרו של פציולי על "היחס האלוהי", מאחר ועסק בהנדסה והתעניין במתמטיקה, הרי אפשר לראות בציורים אלה מעין שעשועי גאומטריה.

חתך הזהב בתמונת סנט ג'ירום

אם נחזור לסדרת פיבונאצ'י, האחראית במידה רבה ל"מהומה" של חתך הזהב, הרי כסדרה על שמו של פיבונאצ'י הוכרה רק לקראת המאה ה-19, למרות שידעו על קיום המספרים כ-600 שנה לפני כן. האיש שנתן לראשונה פומבי לשם "סדרת פיבונאצ'י" או "מספרי פיבונאצ'י", היה מתמטיקאי צרפתי בשם אדוארד לוקאס שתרם סדרה אחרת הבנויה על אותו עיקרון והנקראת על שמו: 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29... והיא מתקשרת למספרים המתקבלים בחזקות עוקבות של יחס הזהב. אבל את העיקרון של סידרת פיבונאצ'י אפשר להכיל על כל זוג מספרים טבעיים אקראיים, לקבל סדרות ללא סוף ולקרוא להן על שמך....

אולם חוץ מהיותה סדרה היוצרת יחס מעניין ומקורי, התברר שמספרי סדרת פיבונאצ'י המתקבלים לפי חוקיות של חיבור שני מספרים סמוכים, מופיעים בטבע, ללא מגע יד אדם כמו במקרה של בניינים, ציורים או פסלים. אם נזכר בספרו של פציולי על היחס האלוהי והכוונה ליחס המספרי של חתך הזהב הרי גם הטבע מעניק יחס מופלא למספרים.

על פרי האננס ישנן בליטות החותכות בקבוצות של 8 ו-13 בליטות בשורה והרי אלה שני מספרי פיבונאצ'י!

הזרעים של פרח החמנייה מסודרים בצורת קבוצות החותכות לוליינית עם כיוון השעון ונגד כיוון השעון כאשר בכיוון אחד מוצאים על פי רוב 34, 55, 89 גרעינים - מספרי פיבונאצ'י.

בתפרחת של פרח החיננית הרב-שנתית מופיעים הפרחונים הקטנים בקבוצות לולייניות עם כיוון השעון ונגד כיוון השעון כאשר מספרם 21 ו-34 במרבית המקרים - מספרי פיבונאצ'י.

גם באצטרובלי האורן מוצאים את ה"קשקשים" הנוקשים מסודרים בלוליינים של 5 בכוון אחד ו-8 בכיוון האחר - אף הם שני מספרי פיבונאצ'י.

בעלים ובתפרחות של צמחים נוספים מוצאים ביטוי למספרי פיבונאצ'י ומדהים לראות את המתמטיקה של הטבע.

פיבונאצ'י עצמו, בניגוד למתמטיקאים אחרים לפניו זכה להכרה ציבורית עוד בחייו. בהיותו בן 70, בשנת 1250, קיבל פיבונאצ'י מעין מדליה ותואר כבוד ממועצת העיר פיזה בה פעל, כתב ולימד. הוא מת באותה שנה.

פיבונאצ'י היה אחת מנקודות האור הבודדות שהאירו את שמי החשיבה המדעית בחשכת ימי הביניים באירופה. הכנסיה הנוצרית דחתה כל ניסיון להוציא לאור תאוריות חדשות על המציאות הסובבת אותנו. חוסר הסובלנות של האפיפיור ונציגיו כלפי קבוצות אתניות כמו כלפי אנשי מדע מוכר לנו מסיפורי האינקוויזיציה ומקביעת הכנסיה שדברי קופרניקוס על תנועת כדור הארץ סביב השמש הם בבחינת כפירה. אולם, למרות האילוצים והקשיים, הבשילו התנאים לקראת סוף המאה ה-15 לתחילתו של רנסאנס מדעי ולתחיה מחודשת של המתמטיקה לקראת גילויים, השגים והתפתחויות ששברו מסגרות-חשיבה אך המשיכו גם את מסורת החקר ואת האופי הסקרני של המתמטיקה היוונית וממשיכיה.