

# שגיאות הקשורות בסדר פעולות החשבון בפתירת תרגילים ודרכים למנוע אותן

יבשובה א. - מכון פדגוגי ממלכתי על שם גרצן (לנינגרד),  
פורסם בכתב העת: "נצל'נייה שקולה" (בין השנים 1988-1990), מו"ל: פרוסבש'ניה, מוסקבה.

תרגום: אנטולי קורופטוב ודורית כהן

בין המיומנויות, אשר תלמידים חייבים לרכוש אותן לקראת סיום בית הספר היסודי, היא היכולת לפתור תרגילים המכילים שתיים-שלוש פעולות חשבון. מבדיקת פתרונות של תלמידים עולה שתלמידים עושים שגיאות רבות בסדר פעולות החשבון בתרגילים. במאמר הנוכחי הובאו שגיאות של תלמידים שנוצרו עקב השפעתם של מבנה התרגיל ושל המספרים בתרגיל, נותחו סיבות הגורמות לשגיאות והוצעו דרכים מסוימות למניעתן.

סדר ביצוע פעולות (ב-4 פעולות החשבון) נלמד בכיתה ב' ברביעי השני של השנה. התלמידים לומדים 3 חוקים: ביטויים ללא סוגריים עם פעולות בדרגה אחת, ביטויים ללא סוגריים עם פעולות בדרגות שונות, ביטויים עם סוגריים. במטרה לזהות את אופי השגיאות של תלמידים הקשורות לסדר הפעולות, נערכו מספר בחנים במשך רביעי שלישי ורביעי (אחרי למידת החומר) ב-12 כיתות ב' (415 תלמידים) בלנינגרד. בכל בחן תלמיד התבקש לחשב ערך של שלושה תרגילים. בשלושה בחנים ראשונים נבדק יישום של כל אחד מהחוקים הנ"ל, ובבחן האחרון – כל החוקים ביחד.

נביא דוגמאות מהבחנים:

- תרגילים ללא סוגריים עם פעולות בדרגה אחת:

$$100 - 50 - 25 + 25, 70 : 5 \times 2$$

- תרגילים ללא סוגריים עם פעולות בדרגות שונות:

$$32 + 64 : 16 \times 2, 100 - 60 : 4, 96 - 24 + 12 : 6$$

- תרגילים עם סוגריים:

$$90 - (36 + 14) : 10, 60 : (20 - 5) \times 2, 3 \times (20 + 4)$$

במטרה לזהות שימוש מודע בחוקי סדר הפעולות, התרגילים חוברו כך שהיה ניתן לבצע חישובים הן בסדר הנכון והן בסדר הלא נכון (לפעמים החישובים היו יותר קלים לפי הסדר הנכון –  $60 : 6 \times 2$ , לפעמים לפי סדר הלא נכון –  $64 : 16 : 2$ , ולפעמים החישובים היו קלים באותה מידה לפי שני הסדרים), כמובן שסטייה מהסדר הנכון הובילה לתוצאות מוטעות. למשל, כאשר מחשבים את ערך הביטוי הבא:  $32 + 64 : 16 \times 2$  ניתן לקבל, במקרה שלא פותרים לפי

הסדר הנכון, את התוצאות השגויות האלה: 3, 12, 34, ואם פותרים לפי הסדר הנכון, את התוצאה הנכונה: 40.

מבנה התרגילים היה שונה גם בנוגע לסוג ולמספר הפעולות:  $70 : 5 \times 2$ ,  $80 - 43 + 17$ ,  $90 - 48 + 12 : 6$  וגם בנוגע למיקום פעולות וסוגריים  $6 : 78 - 24 + 12$ ,  $(10 - 6) : 100 - 20$ ,  $4 : (100 - (44 - 24))$ .

ניתוח התוצאות של הבחנים מראה שהנכונות לשימוש בחוקי סדר הפעולות מושפעת (במידה משמעותית) מ- **מבנה התרגיל** ומהמספרים בתרגיל.

ב- **מבנה התרגילים סוג, מספר ומיקום** הפעולות בביטויים, ונוכחות של סוגריים, מגלמים תפקיד חשוב.

נתבונן בסוג הפעולות בביטוי הבא. רוב השגיאות בסדר הפעולות המכילות שתי פעולות בדרגה אחת בא לידי ביטוי בכך שתלמידים מבצעים חיבור לפני חיסור וכפל לפני חילוק ללא קשר לסדר רישומם. למשל:

$$\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \\ 78 - 24 + 12 : 6 = 52 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 80 - 43 + 17 = 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 70 : 5 \times 2 = 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 2 \\ 60 : (20 - 5) \times 2 = 2 \end{array}$$

אחת הסיבות לכך היא אופן התפיסה והשיחזור של תלמידים את חוקי סדר הפעולות המתאימים. ילדים זוכרים את תחילת הניסוח של החוק שבו חיבור הוזכר לפני חיסור, וכפל הוזכר לפני חילוק ולא שמים לב על סיום הניסוח המדגיש הכרחיות ביצוע הפעולות לפי סדר רישומם. עוד סיבה אפשרית היא נטייה של תלמידים להסתמך לא על חוקים אלא על אפשרות הביצוע. מבצעים מה שניתן לבצע או מה שיותר קל לבצע.

מיקום הדדי של הפעולות בביטוי משפיע בכך שאחרי בחירה של הפעולה הראשונה מיקומה ברישום הביטוי משפיע על בחירתה של הפעולה השנייה. למשל בביטוי:  $2 + 6 : 24 - 48$  שבו חיבור וחיסור נמצאים במרחק שווה מהחילוק, 31% תלמידים טעו בבחירת הפעולה השנייה. ואילו בביטוי אחר עם אותו אוסף הפעולות:  $6 : 12 + 24 - 78$  שבו חיבור נמצא יותר קרוב לחילוק, כבר 50% תלמידים עשו את אותה שגיאה.

ניתוח של העבודות מראה שבביטויים ללא סוגריים עושים פי 2,3 שגיאות יותר בבחירה של פעולה שנייה, מאשר בבחירה של פעולה ראשונה שעבורה אין פעולות קודמות (ועקב זאת אין השפעה של מיקומן). לכן בביטויים המכילים שלוש פעולות, תלמידים טועים יותר מאשר בביטויים בעלי שתי פעולות, שבהם יש צורך לבחור רק פעולה אחת (ראשונה) ויש אפשרות להשתמש בחוק מסוים אחד. בזאת מתבטאת השפעת מספר הפעולות בתרגילים על נכונות של זיהוי סדר החישובים. למשל בחישוב הביטוי:  $6 : 12 + 48 - 90$  יש יותר שגיאות מאשר בחישוב הביטוי:  $17 + 43 - 80$ .

לכן אי אפשר לטעון שתלמידים יצליחו בחישוב התרגילים בעלי שלוש-ארבע פעולות בהסתמך על היכולת שלהם להתמודד עם תרגילים בעלי שתי פעולות בלבד. זה בולט במיוחד בנוגע לתרגילים עם סוגריים. כל התלמידים מבצעים כפעולה ראשונה את הפעולה שבסוגריים, לכן בתרגילים בעלי שתי פעולות בלבד אין שגיאות בסדר הפעולות. בניגוד לכך, בתרגילים עם סוגריים בעלי שלוש פעולות יש הרבה שגיאות – 74% תלמידים מבצעים פעולות מעבר לסוגריים לפי סדר הרישום שלהן, משמאל לימין. למשל:

$$\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ 100 - (44 - 24) : 4 = 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 1 \\ 60 - 20 : (20 - 16) = 10 \end{array}$$

בדיון בכיתה התלמידים ששגו טענו שהם בעצם השתמשו בחוק: קודם פעולה בסוגריים אחר מכן שאר פעולות לפי רישומן. מזאת אפשר לראות שהסיבה לשגיאה הזו היא ניסוח לא מדויק של החוק המתאים.

עכשיו נתבונן בהשפעה של המספר על נכונות של זיהוי סדר הפעולות. די ברור שכאשר מספרים אינם מאפשרים לבצע חישובים לפי סדר שגוי (למשל:  $27 - 4 : 64 - 55$ ), אז בתרגילים כאלה ישנן שגיאות לעתים רחוקות.

במקרה שיש שגיאות בסדר הפעולות, אז בד"כ זה בא ביחד עם שגיאות חישוביות, כמו למשל:  
חיסור מספר גדול מקטן, או חילוק מה שלא מתחלק ללא שארית. למשל:

$$46 + 3 \times 12 : 4 = 82 : 4 = 21$$

(התלמידים פתרו לפי סדר שגוי  $46+36=82$  וגם טעו בתרגיל החילוק  $82:4$ )

אם המספר מאפשר באותו תרגיל להשתמש בסדר שונה של הפעולות ולא תומך דווקא בסדר מסוים אז בעבודות של תלמידים אפשר למצוא כל מיני וריאנטים. למשל 25% מהתלמידים טעו בסדר הפעולות בביטוי הבא:

$$32 + 64 : 16 \times 2$$

- חילוק, חיבור, כפל
- כפל, חילוק, חיבור
- חיבור, כפל, חילוק
- חיבור, חילוק, כפל.

רוב השגיאות כרוכות בסדר שגוי שלפיו החישובים הם יותר קלים.

למשל בביטוי  $60 : ( 20 - 5 ) \times 2$  שגיאה בבחירת הפעולה השנייה יותר נפוצה מאשר בביטוי  $48 : ( 16 - 4 ) \times 2$ , משום שבביטוי ראשון כפל המבוצע ראשון מקל את החילוק. בביטויים האלה השפעת המספרים היא יותר חזקה מאשר נטייה לבצע פעולות מחוץ הסוגריים לפי סדר רישומן.

השפעת מבנה הביטוי והמספרים על בחירת סדר הפעולות נתגלה בתוך השוואה של שני בחנים

**בוחן 2 - חשבו:**

$$78 - 52 : 13 + 13$$
$$32 + 64 : 16 \times 2$$
$$96 - 24 + 12 : 6$$

**בוחן 1- חשבו:**

$$23 - 85 : 17 + 22$$
$$46 + 3 \times 12 : 4$$
$$28 + 37 - 72 : 6$$

**בוחן 1** נלקח מספר לימוד של כיתה ב'. ניתוחו מראה שהסיכוי לטעות בסדר הפעולות הוא נמוך. הרי בביטוי  $23 - 85 : 17 + 22$ , המספרים לא מאפשרים לבצע פעולות לפי סדר שגוי. בשני התרגילים האחרים מותר לבצע חילוק לפני כפל או חיסור לפני חיבור ללא סכנה לפגוע בתוצאה הסופית: בתרגיל  $46 + 3 \times 12 : 4$ , מותר לבצע חילוק לפני כפל, ובתרגיל  $28 + 37 - 72 : 6$  לאחר פעולת החילוק מותר לבצע חיסור תחילה ואחר כך חיבור. לכן אין לדעת מהו סדר הפעולות הנבחר על ידי התלמיד.

**בוחן 2** חיברנו באנלוגיה עם בוחן 1 באותה רמת קושי. אבל הכללנו בו מספרים המאפשרים לבצע פעולות בכל הסדרים, ובשני תרגילים אחרים החלפנו כפל וחילוק, חיבור וחיסור. כתוצאה של השינויים הקטנים האלה בבוחן 2 טעו 76% תלמידים בעוד שבבוחן 1 טעו 6%.

ניתוח של השפעת מבנה הביטוי והמספרים על נכונות בחירת סדר הפעולות עוזר לגלות סיבות לשגיאות ועוזר להציע דרכים למנוע אותן: דיוק הניסוח של החוקים ושיפור תרגילים הקשורים לחוקים האלה.

אנו חושבים שבניסוח כדאי להשתמש במונחים: פעולת דרגה א (חיבור, חיסור) ופעולת דרגה ב (כפל, חילוק). אז החוק יראה כך: אם בביטוי ללא סוגריים יש פעולות של אותה דרגה יש לבצע אותן לפי סדר רישומן. נדגיש שקל לתלמידים לזכור אילו פעולות שייכות לאילו דרגות לפי אנלוגיה: תלמידים לומדים פעולות של דרגה א בכיתה א' ופעולות של דרגה ב בכיתה ב'. על מנת להקטין את מספר השגיאות הקשורות לעדיפות של פעולות מסוימות, חיוני להדגיש שפעולות של אותה דרגה הן שוות-זכויות.

דיוק הניסוח הוא רק צעד ראשון. מקום מרכזי בתהליך הקניית הידע והמיומנות שייך למערכת התרגילים.

לפני דיון לגבי סוגי התרגילים, נבדוק אילו תרגילים רצוי להכליל במערכת. בדרך כלל תלמידים של כיתה ב' עוסקים בתרגילים עם שתי פעולות. יש לזה השלכות שליליות. אין לתלמידים אפשרות להשתמש אפילו לא בחוק אחד הקשור לתרגילים עם סוגריים. אבל גם מבנה התרגילים בעלי שלוש פעולות שאינו מספיק מגוון, גורם להכללות מוטעות וכתוצאה מכך לשגיאות.

שימוש רב של התרגילים כאלה:

$$A \times B + C \times D, A:B + C:D, A \times B - C:D, A:B - C \times D$$

גרם לכך שתלמידים המציאו חוק משלהם – "קודם בקצוות, אחר כך באמצע" והתחילו להשתמש בו בתרגילים בעלי שלוש פעולות:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \\ 48 - 24 : 6 + 2 = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \\ 32 + 64 : 16 \times 2 = 3 \end{array}$$

מהאמור לעיל נובע שבכיתה ב' כדאי יותר להשתמש בתרגילים בעלי שלוש ולפעמים ארבע פעולות עם מבנה יותר מגוון. להקניית מיומנות היישום של החוקים צריך להשתמש בתרגילים אשר סדר הפעולות בהם לא נקבע על ידי המספרים. צריך להעמיד בפני התלמידים

בעיית בחירה. זה אפשר לעשות בעזרת שימוש במספרים שמאפשרים חישוב לפי סדר שגוי. למטרה זאת מכון שימוש ברישום תבנית שנותן אפשרות להתעלם מהמספרים ולהתרכז במבנה הביטוי.

למשל אם להחליף ביטוי  $22 + 17 : 85 - 23$  לתבנית  $\square + \square : \square - \square$ , אז בתבנית אין אותה חד-משמעות של סדר הפעולות שיש בתרגיל עצמו.

כאשר תלמיד מזהה סדר בתרגילים שהוצגו על ידי תבנית, תלמיד מוכרח להישען על חוקים. הוא חייב לנתח את הביטוי גם לפי אוסף הפעולות וגם לפי הסוגריים, לבחור את החוק המסוים ולפיו לבחור סדר הפעולות.

אנו חיברנו כמה תרגילים עם תבניות.

כל התרגילים שיוזכרו בהמשך מסווגים ברמת קושי עולה:

- חישוב ערך התרגילים,
- בחירת ביטויים לפי אופן מבני,
- השוואת התרגילים וסדרי הפעולות, תיקון שגיאות,
- שינוי התרגילים וסדרי הפעולות,
- השלמת התרגילים,
- בניית התרגילים.

כל התרגילים נבדקו בשני בתי ספר (לנינגרד). התרגילים עניינו את התלמידים והביאו תוצאות חיוביות.

1.

א. בחרו את תוצאת התרגיל:  $6 : 12 + 24 - 96$  מהמספרים: 14, 70, 74, 90.

ב. בחרו את התרגילים שתוצאתם שונה מ-80:

$2 \times 20 + 20 : 80$ ,  $6 : 48 + 12 - 84$ ,  $5 + 10 - 95$ ,  $5 \times 6 : 90 + 5$ .

2. מהתבניות הבאות בחרו אלה אשר פעולת הכפל בהן היא פעולה שנייה:

א.  $\square + \square \times \square$

ב.  $\square \times \square + (\square + \square)$

ג.  $\square + \square \times \square + \square$

ד.  $\square + (\square - \square) \times \square$

3. מצאו תרגילים שבהם צריך לבצע חיבור כפעולה

א. ראשונה

ב. שנייה

ג. שלישית

$$4 \times 17 + 3$$

$$90 - 52 + 18$$

$$70 - (10 + 15) \times 2$$

$$37 + 26 - 16$$

$$15 + 45 : (15 - 12)$$

$$60 : 15 + 5 \times 3$$

$$24 + 6 \times 3$$

$$(30 + 70) : 25 \times 2$$

$$40 + 60 : 5 \times 2$$

4. בדקו את חישוב ערך התרגילים הבאים. במידת הצורך תקנו שגיאות:

$$2 \quad 3 \quad 1$$

$$100 - 20 : (20 - 10) = 8$$

$$2 \quad 1$$

$$70 : 14 \times 5 = 1$$

$$3 \quad 1 \quad 2$$

$$90 - 36 : 18 + 18 = 70$$

$$1 \quad 3 \quad 2$$

$$90 - 15 + 15 : 3 = 80$$

$$3 \quad 2 \quad 1$$

$$30 + 60 : 15 \times 2 = 32$$

$$2 \quad 1 \quad 3$$

$$90 - (35 - 5) : 6 = 10$$

5. השוו בין התרגילים ובין סדר הפעולות בהם. חשבו את תוצאת התרגילים:

$$, 12 + 48 : 4 \times 3$$

$$, (12 + 48) : 4 \times 3$$

$$. 12 + 48 : (4 \times 3)$$

6. הכניסו סוגריים במספר דרכים. חשבו את תוצאת התרגילים שיתקבלו:

$$76 - 27 - 12 + 6 \text{ א.}$$

$$76 - (27 - 12) + 6 = 67 \text{ למשל:}$$

$$76 - 27 - (12 + 6) = 31$$

$$78 - 18 : 3 \times 2 \text{ ב.}$$

$$(78 - 18) : 3 \times 2 = 40 \text{ למשל:}$$

$$78 - 18 : (3 \times 2) = 75$$

7. הוסיפו סוגריים על מנת לקבל תרגיל נכון:

$$16 : 4 : 2 = 8$$

$$24 - 16 : 4 : 2 = 1$$

$$24 - 16 : 4 : 2 = 16$$

8. בדקו את תוצאת התרגילים הבאים. במידת הצורך הוסיפו / הורידו סוגריים על מנת לקבל

תרגיל נכון:

$$72 : (12 : 2) \times 3 = 36 \text{ למשל:}$$

$$72 : 12 : 2 \times 3 = 36 \text{ א.}$$

$$72 : 12 : 2 \times 3 = 9 \text{ למשל:}$$

$$72 : 12 : (2 \times 3) = 9 \text{ ב.}$$

תרגיל נכון

$$72 : 12 : 2 \times 3 = 1 \text{ ג.}$$

9. הכניסו סימני פעולות (אפשר גם סוגריים) על מנת לקבל תרגילים שונים.

פתרו אותם:

$$48 \square 12 \square 4$$

$$48 : 12 : 4 = 1 \text{ למשל:}$$

$$(48 + 12) : 4 = 15 \text{ וכו'.$$

10. הכניסו סימני פעולות (אפשר גם סוגריים) על מנת לקבל תרגיל שתוצאתו נתונה:

$$45 \square 15 \square 3 = 90$$

$$45 + 15 \times 3 = 90 \text{ למשל:}$$

$$(45 - 15) \times 3 = 90$$

11. שנו אחד מסימני הפעולות ופתרו את התרגיל שקיבלתם:

$$36 + 6 : 3$$

$$36 : 6 : 3 = 2 \text{ למשל:}$$

$$36 - 6 : 3 = 34$$



$$36 + 6 - 3 = 39 \text{ וכו'}$$

12. שנו אחד מסימני הפעולות בביטוי:  $64 + 16 \times 2$  כך שסדר הפעולות ישתנה ופתרו את

התרגילים שהתקבלו:

$$64 + 16 \times 2 = 96$$

$$\text{למשל: } 64 : 16 \times 2 = 8$$

$$.64 + 16 - 2 = 78$$

13. המציאו תרגילים בעזרת מספרים מותרים ופתרו אותם:

א.  $\square - \square \times \square$

ב.  $\square + \square - \square + \square$

ג.  $\square : \square + \square$

ד.  $\square - \square \times \square + \square$

למשל:

א.  $54 - 6 \times 8$

14. המציאו תרגילים ותבניות תרגילים כך שכאשר פותרים אותם, חילוק יבוצע כפעולה:

א. ראשונה,

ב. שנייה,

ג. שלישית.

למשל:

א.  $\square - \square : \square$ ,  $64 : 8 \times 2$

ב.  $(60 - 48) : 3$ ,  $\square : (\square \times \square)$

ג.  $\square \times \square : (\square + \square)$ ,  $15 \times 2 \times 3 : 5$

15. המציאו קודם תבניות תרגילים ואחר כך גם תרגילים המכילים שלוש פעולות שבהם:
- א. חיסור רשום בתרגיל כפעולה שנייה אבל צריך לבצע אותו כפעולה ראשונה,
  - ב. חיסור רשום בתרגיל כפעולה ראשונה אבל צריך לבצע אותו כפעולה שלישית,
  - ג. חיבור רשום בתרגיל כפעולה שנייה אבל צריך לבצע אותו כפעולה ראשונה וגם כפל רשום בתרגיל כפעולה שלישית אבל צריך לבצע אותו כפעולה שנייה.
- פיתרו את התרגילים שקיבלתם.

למשל:

א.  $\square \times (\square - \square) + \square$

ב.  $\square - \square \times \square : \square$

ג.  $\square - (\square + \square) \times \square$