

# הבנה של ילדים את מושג השוויון כבסיס לאלגברה

## Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra

נכתב ע"י: Karen P. Falkner, Linda Levi, and Thomas P. Carpenter

הופיע ב: Teaching Children Mathematics, December 1999

תרגום: ברכה סגליס

מדינות ואזורים שונים בארה"ב, כמו גם הסטנדרטים של ה NCTM, ממליצים שלימוד האלגברה יתחיל כבר בשנות הלימוד הראשונות. למרות שילדים צעירים לעיתים קרובות מבינים הרבה יותר ממה שחשבו פעם, הרי שלמבוגרים יכול להיות קושי לתפוס מהי האלגברה ההולמת את שנות הלימוד הראשונות. חמישה עשר מורים ושלושה חוקרים מן האוניברסיטה מעורבים בתקופה זו בפרוייקט שנועד להגדיר איזו הוראה של אלגברה יכולה וצריכה להיות עבור ילדים צעירים. במאמר זה, נדון במושג השוויון, שהינו רעיון מהותי לפיתוח חשיבה אלגברית אצל ילדים צעירים.

### הבנות שגויות בקשר לסימן ה"שווה"

למרות שמורים משתמשים בסימן השווה לעיתים קרובות עם תלמידיהם, מענין לחקור מה הילדים מבינים על שוויון ועל סימן השווה. בתחילת פרויקט זה, נתבקשו מורים רבים לשאול את תלמידיהם כיצד פותרים את הבעיה הבאה:

$$8 + 4 = \square + 5$$

בתחילה, נראתה בעיה זו טריוויאלית למורים רבים. לדוגמא, אחת המורות לכתה א' אמרה: "בודאי, אני מוכנה לעזור לך ולתת בעיה זו לתלמידי, אבל אין לי מושג מדוע את מגלה בזה ענין." מורה זו גילתה שכל עשרים וארבעה תלמידיה חשבו שהמספר שיש לרשום במשבצת הוא 12. היא כל כך נדהמה מהתוצאה, שלפני שהספקנו לחזור אליה ולבדוק מה קרה, היא כבר פנתה ליתר מורות כתה א' בבית ספרה ובקשה שיתנו לתלמידיהן בעיה זו. כפי שניתן לראות בטבלה 1, כל 145 תלמידי כתה ו' שקבלו בעיה זו חשבו שיש לשים בתוך המשבצת את המספר 12 או את המספר 17.

טבלה 1: אחוז הילדים המציעים פתרונות מגוונים ל  $8 + 4 = \square + 5$

סה"כ ילדים	אחר	תשובות				
		17 ו 12	17	12	7	כתה
42	14	0	7	79	0	א'
84	20	0	20	54	6	א' + ב'
174	15	14	10	55	6	ב'
208	5	5	20	60	10	ג'
57	11	30	44	9	7	ד'
42	0	0	45	48	7	ה'
145	0	2	14	84	0	ו'

1

Translated and reprinted with permission from *Teaching Children Mathematics*, copyright © 1999 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. [www.nctm.org](http://www.nctm.org). All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation.

מדוע כל כך הרבה ילדים התקשו בבעיה זו? נראה בעליל שלילדים יש הבנה מוגבלת של מושג השוויון ושל סימן השווה אם הם חושבים ש 12 או 17 היא התשובה שיש לשים בתוך המשבצת הריקה.

יחד עם זאת, ילדים צעירים רבים מבינים איך להציג מצב שבו צריך ליצור שוויון בין דברים. לדוגמא, הגנת מרי ג'ו יוטרי, נתנה לתלמידיה את הבעיה  $4 + 5 = \square + 6$ . כל הילדים חשבו שצריך לרשום במשבצת את המספר 9. לאחר מכן הציגה יוטרי עם הילדים, את מצב הבעיה. ביחד הם הכינו ערמה של 4 קוביות, ולאחר מכן ערמה של 5 קוביות. במקום אחר הם הכינו ערמות של 9 ושל 6 קוביות. יוטרי שאלה את הילדים אם בכל סידור היה אותו מספר של קוביות. הילדים ידעו שמספר הקוביות בכל סדור לא היה שווה ואף ידעו להגיד איפה יש יותר. מספר ילדים ידע להגיד לגנת כיצד ניתן ליצור מצב שבשתי הקבוצות יהיה מספר שווה של קוביות. למרות זאת, גם לאחר שעשו פעילות זו, הילדים עדיין חשבו שיש לשים את המספר 9 בתוך המשבצת של המשוואה.

ארוע זה הפתיע את יוטרי ואת החוקרים. ההנחה שלנו היתה שלילדי גן יהיה נסיון מועט ביותר עם סימן השווה ולכן לא תיווצרנה אצלם ההבנות השגויות אודות שוויון אשר מופיעות אצל ילדים גדולים יותר. מתברר, שגם אצל ילדי גן מתקיימות ההבנות השגויות אודות משמעות סימן השווה, ולא ניתן להכחידן באמצעות דוגמא אחת או שתיים או הסבר פשוט. ארוע זה גם ממחיש שלילדים בגיל הצעיר של הגן יכולה להיות הבנה נאותה של יחסי שוויון בהקשר לקבוצות של עצמים, אבל הם מתקשים לקשר הבנה זו לייצוגים סימבוליים שבהם מופיע סימן השווה. על מנת לבסס הבנה נאותה של מושג השוויון, נדרש מאמץ מרוכז במשך תקופה ממושכת. מורים צריכים להסב את תשומת ליבם לתפיסות של ילדים את מושג השוויון ברגע שהם מתחילים להציג לפנייהם את הסמלים המייצגים פעולות על מספרים. אחרת, התפיסות השגויות אודות שוויון עלולות להשתרש אצל הילדים. (ראה בפיסקה: "אודות המתמטיקה" המופיעה בהמשך).

כפי שצינו: Behr, Erlwanger, and Nichols (1975); Erlwanger and Berlangier (1983) (1998) Anenz-Ludlow and Walgamuth, ילדים בכתות היסוד חושבים בדרך כלל שסימן השווה פרושו שעליהם לבצע את החישוב שמופיע לפניו ושהמספר שבא אחרי סימן השווה הינו התשובה של אותו חישוב. ילדים בכתות היסוד אינם רואים עפ"י את סימן השווה כסמל המבטא את היחס (relationship) "הינו שווה ל-".

כאשר בודקים כיצד משתמשים בסימן השווה בהוראה בכתות היסוד מוצאים מגוון מועט ביותר. בדרך כלל, סימן השווה מופיע בסופה של משוואה ורק מספר אחד מופיע אחריו. כאשר מציגים בפני התלמידים פסוקי מספר מהסוג  $4+6=10$ , או  $67-10-3=54$ , אזי הם צודקים כאשר הם חושבים שסימן השווה מציין שצריך לבצע חישוב.

## כתות א' ו- ב'

קרן פולקנר מלמדת כתה משולבת של א' ו- ב'. הילדים שוהים בכתה זו שנתיים. המשך מאמר זה מראה כיצד תלמידי כתה זו התקדמו בהבנת מושג השוויון בתקופה של שנה וחצי.

בכתה של פולקנר מהווה העיסוק בפתרון בעיות סיפוריות, חלק אינטגרלי מהוראת המתמטיקה. התלמידים מתבקשים, באופן קבוע, לכתוב פסוקי מספר המתארים כיצד פתרו בעיות סיפוריות. משום כך ציפתה פולקנר, שתלמידיה יצליחו בפתרון פסוק המספר הבא:  $8+4=[ ]+5$ . להפתעתה, התלמידים פתרו בעיה זו ממש כפי שהמחקר ציין שיפתרו. רובם שמו במשבצת 12, וחלק האריכו את הפסוק והוסיפו לו  $=17$ . הדיון שהתלווה לכך היה מעניין. רובם אמרו שצריך לשים 12 במשבצת, מכיון ש"שמונה ועוד ארבע שווה שתים עשרה". להלן קטע הממחיש את הדיון שנערך לאחר שהתלמידים עבדו על הבעיה:

פולקנר: האם  $8+4$  שווה ל  $12+5$ ?

אנה: לא.

פולקנר: אז מדוע שמת 12 במשבצת?

אנה: משום ש  $8+4$  שווה ל 12. את רואה? (מונה באצבעותיה) זה 8, 9, 10, 11, 12. (ילדים רבים מניעים את ראשם בהסכמה).

פולקנר: האם יש מישהוא שקיבל תשובה אחרת?

אדם: זה 7.

פולקנר: מדוע?

אדם: כי צריך שתהיה אותה כמות בכל צד של סימן השווה. זה מה שסימן השווה אומר.

פולקנר: הבנתי. אדם, האם תוכל לחזור על דברייך שוב?

(אדם חוזר על ההסבר שלו. תלמידים אחרים, המתיחסים לאדם כאל מנהיג בכתה, מקשיבים בתשומת לב.)

פולקנר: (תוך כדי הצבעה על פסוק המספר הכתוב על הלוח), אם כך, אדם, אתה אומר שסימן השווה פרושו שכמה שיש בצד אחד של סימן השווה, אותה כמות צריכה להיות בצד השני של סימן השווה. (מתבוננת ביתר התלמידים בכתה) מה דעתכם על מה שאדם אמר?

אנה: כן, אבל זה צריך להיות 12. כי זה מה ש  $8+4$  שווה.

דן: לא, אדם צודק. מה שיש בצד אחד של סימן השווה צריך להיות שווה למה שיש בצד השני:

$8+4=12$  ו  $7+5=12$ . אז צריך להיות במשבצת.

הכתה התלבטה עם בעיה זו במשך זמן מה. סימן השווה הוא מוסכמה, זהו הסמל שנבחר על ידי המתמטיקאים לייצג את מושג השוויון. מאחר שלא קיימת סיבה לוגית לכך שהפירוש של סימן השווה איננו "חשב", פולקנר מצאה לנכון להגיד לכיתה שהיא מסכימה עם אדם ודן. אך, למרות שאמרה לכתה מה המשמעות של סימן השווה, עדיין היו תלמידים רבים שהתקשו לאמץ את השמוש המקובל של הסימן.

פולקנר החליטה לפתח את הבנת תלמידיה ביחס לסימן השווה באמצעות דיון על פסוקי מספר אמיתיים ושקריים. דיון זה מתבסס על עבודתו של Robert Davis (1964). פולקנר הציגה בפני התלמידים פסוקי מספר הדומים לפסוקים הבאים, ושאלה אותם האם פסוקים אלו הם אמיתיים או שקריים.

1)  $4 + 5 = 9$

2)  $12 - 5 = 9$

3)  $7 = 3 + 4$

4)  $8 + 2 = 10 + 4$

5)  $7 + 4 = 15 - 4$

6)  $8 = 8$

תגובות התלמידים היו מענינות. כולם הסכימו שהפסוק הראשון הוא אמת ושהפסוק השני הוא שקר. הם היו מסוגלים להוכיח השערות אלו במספר דרכים. הם היו פחות בטוחים בקשר לפסוקים האחרים.

פולקנר: מה בקשר לפסוק הזה?  $7 = 3+4$ . האם הוא אמת או שקר? (תלמידי הכתה מתנועעים בעצבנות, ממלמלים ומראים סימני מצוקה)

גרטכן: כן.  $3+4$  שווה ל 7.

נד: אבל הפסוק לא נכון.

אנה: הוא הולך אחורה

פולקנר: אבל אדם אמר לנו שסימן השווה פרושו שהכמות מכל צד שלו צריכה להיות שווה. האם זה נכון פה?

אנה: כן, אבל זה בכיוון לא נכון.

### אודות המתמטיקה

ילדים צריכים להבין ששוויון הינו יחס<sup>1</sup> המבטא את הרעיון ששני בטויים מתמטיים מחזיקים אותו ערך. חשוב שילדים יבינו רעיון זה משתי סיבות. ראשית, ילדים צריכים הבנה זו כדי לחשוב על יחסים המבוטאים על ידי פסוקי מספר. למשל, פסוק המספר  $7+8=7+7+1$  מבטא יחס מתמטי שהינו מהותי לאריתמטיקה. כאשר ילד אומר: "אני לא זוכר כמה זה  $7+8$ , אבל אני כן יודע ש 7 ועוד 7 זה 14 ואז 1 יותר יהיה 15", הוא או היא מבטאים יחס חשוב מאוד המבוטא בפסוק המספר הזה. לילדים המבינים את מושג השוויון תהיה דרך לייצג רעיונות אריתמטיים כאלה. באופן כזה הם יהיו מסוגלים לתקשר ומאוחר יותר לעשות רפלקציה על רעיונות אלו. ילד שיש לו הזדמנויות רבות לבטא ולעשות רפלקציה על פסוקי מספר כמו  $17-9=17-10+1$  יהיה אולי מסוגל להשתמש באותו עקרון מתמטי על מנת לפתור בעיות קשות יותר, כמו  $45-18$ , באמצעות הבטוי  $45-18=45-20+2$ . דוגמא זו מראה את היתרונות של שילוב הוראת האריתמטיקה עם הוראת האלגברה. בעשותם כך, מורים יכולים לעזור לילדים להגביר את הבנתם באריתמטיקה ובאותו הזמן ללמד אותם מושגים באלגברה. הסיבה השניה לחשיבות ההבנה של השוויון כיוחס הינה, שאי-הבנה כזה הינו אחד מאבני המכשול של התלמידים כאשר הם עוברים מאריתמטיקה לאלגברה (Kieran 1981; Matz 1982).

ניקח לדוגמא את המשוואה  $4x+27=87$ . כיצד מתחילים לפתור משוואה זו? הצעד הראשון שלך יהיה קרוב לודאי להחסיר 27 מ 87. מדוע מותר לך לעשות זאת? אנו יכולים לעשות זאת משום שאני מחסירים 27 משני צידי המשוואה. אם סימן השוויון מייצג יחס בין שני בטויים, יש הגיון בכך שאם שתי כמויות הינן שוות, אזי הפחתה של 27 מהכמות הראשונה צריכה להיות שווה להפחתה של 27 מהכמות השניה. מה קורה עם ילדים שחושבים שסימן השווה פרושו שהם צריכים לעשות משהו? איזה סיכוי יש להם להבין מדוע הפחתה משני צידי המשוואה משמרת את יחס השוויון? תלמידים אלו יכולים רק לנסות לשנן רצף של חוקים לפתרון משוואות. מכיוון שחוקים אלו אינם מעוגנים בהבנה, ישנה סבירות גבוהה שתלמידים אלו יזכרו אותם באופן שגוי ולא יהיו מסוגלים לפעול בגמישות כאשר הם מיישמים אותם. מסיבות אלו, ילדים חייבים להבין ששוויון הינו יחס ולא סימן לעשות משהו.

<sup>1</sup> משמעות המילה יחס בקטע זה היא קשר (relationship) ולא יחס במובן המתמטי (ratio)

פולקנר : בואו ננסה את זה. (היא מציגה את הבעיה, היא נותנת לילד אחד 7 קוביות בערמה אחת ואומרת לו לעמוד בצד אחד שלה, ואח"כ נותנת לילד אחר ערמה של 4 קוביות ביד אחת וערמה של 3 קוביות ביד השניה ואומרת לו לעמוד בצד השני שלה). כעת, האם לשני ילדים אלו יש אותן מספר של קוביות?

הכתה : כן.

פולקנר : האם זה משנה באיזה צד שלי הם עומדים? (היא מבקשת מהם להחליף מקומות והם אכן עושים זאת).

כתה : לא, אבל...

כפי שתוכלו לשער, פסוק המספר הרביעי גרם לבלבול אצל ילדים רבים. תלמידים אחדים חשבו שפסוק המספר נכון משום ש  $8+2$  שווה ל 10. הילדים שהיתה להם הבנה טובה של השוויון היו מסוגלים להסביר שפסוק מספר זה אינו נכון משום ש  $8+2$  הם 10 ואילו  $10+4$  הם 14 ו זה לא אותו דבר כמו 14.

כאשר פולקנר הגיעה לפסוק האחרון,  $8=8$ , הכתה היתה מאוד מוטרדת. אנה דיברה בשם התלמידים ואמרה: "ובכן, כן, שמונה שווה שמונה, אבל לא צריך לרשום את זה ככה". בשבועות הספורים הנותרים של שנת הלימודים המשיכה פולקנר לתת לתלמידיה בעיות עם סימן השווה במקומות שונים.

### בשנה השניה

בתחילת השנה השניה, הציגה פולקנר לכתתה אותה בעיה שוב  $(5+[]=8+4)$ . חלק מהתלמידים שהיו בכתה בשנה שעברה, פתרו את הבעיה נכון. תלמידי שנה א' רבים רשמו בגאווה את המס' 12 במשבצת; אחרים התבוננו בפסוק בבלבול ובקשו עזרה. התעורר דיון דומה לזה שהיה בסוף שנה שעברה. עם זאת, הפעם, ילדים אחדים הבינו את מושג השוויון והסבירו בהתלהבות מדוע צריך לשים את המספר 7 במשבצת. לילי נתנה את ההסבר המאיר ביותר: "סימן השווה אומר שזה צריך להיות אותו דבר. הכמות צריכה להיות אותו דבר בכל צד של סימן השווה. (היא מדגימה בעזרת ידיה) זה בדיוק כמו נד-נד. זה צריך להיות באותו גובה".

דיון כתתי זה היה הראשון מיני רבים על פסוקי מספר פתוחים. בכל דיון היו כאלה שפקפקו, והיו כאלה ששוב הסבירו את הרעיון שכל צד של סימן השווה צריך ל"השתוות" לאותה כמות. בזמן שפולקנר האזינה לדיונים, רשמה מי דיבר והתבוננה בהבעות הפנים של התלמידים, נראה היה לה שהילדים מתחילים לתפוס את רעיון השוויון אבל שמושג זה אינו מובן בקלות או במהירות. פולקנר השתכנעה שיקח זמן עד שמושג השוויון יובן ע"י כל הילדים ולכן היא חזרה אליו לעיתים קרובות במהלך השנה.

פולקנר שילבה במהלך השנה דיונים בנושא השוויון בשתי דרכים. ראשית, היא המשיכה לתת לתלמידים פסוקי מספר פתוחים, כשהיא משנה בכל פעם את מיקום הנעלם. לדוגמא:  $9 + [] = 7 + 8$ ,  $7 + [] = 6 + 4$ ,  $7 + 8 = [] + 10$ . שנית, היא הציגה פסוקי אמת ושקר, כמו אלו שהופיעו בדוגמאות, על מנת לעודד את הילדים להרהר על משמעות סימן השווה. היא גם ביקשה מהילדים

לכתוב בעצמם פסוקי אמת ושקר. המשימות שפולקנר השתמשה בהן על מנת לבנות את הבנתם של הילדים את מושג השוויון מתאימות גם לבניית הבנתם את פעולות החשבון. ככל שהשנה התקדמה, יותר ויותר ילדים התחילו להבין את מושג השוויון. בחודש מרץ, נערך בכתה הדיון הבא:

פולקנר: התבוננו בפסוק המספר הבא:  $10 + [] = 8 + 9$ . מה צריך לשים במשבצת?  
קרי: זה צריך להיות 17.

סקיפ: אבל  $9 + 8$  שווים ל 17, ו  $10 + 17$  שווים 27. אז 17 לא מתאים לשים במשבצת.  
מריה: נכון  $10 + 17$  אינם שווים ל 17.

נד: אני חושב שצריך לשים 7 בתוך המשבצת.  $10 + 7$  הם 17 ו  $8 + 9$  הם 17. שני הצדדים שווים.  
(רוב תלמידי הכתה מסכימים איתו, אבל קרי עדיין איננה משוכנעת).

פולקנר: חישבו מה אנחנו יודעים על סימן השווה. התבוננו בפסוק המספר הבא:

$4897 + 3 = 4898$ . האם אתם יכולים להגיד מה צריך להיות במשבצת אפילו בלי לעשות את פעולת החיבור?

לארי: אני חושב שצריך לשים 4 בתוך המשבצת. 4897 זה 1 מתחת ל 4898, אז צריך להוסיף 1 יותר ל 3.

פולקנר: האם יש מישהו שעשה את זה בדרך אחרת? (הילדים מנידים בראשם לשלילה. באופן כללי הכתה מסכימה שהדרך של לארי נותנת את התשובה הנכונה ושהיא קלה).

דיונים כאלה על פסוקי מספר סיפקו לילדים קונטקסט חשוב לשיחות על שוויון במשך שנת הלימודים. ככל שהשנה התקדמה, שולבו הדיונים על שוויון בדיונים על מושגים אלגבריים אריתמטיים אחרים. בדוגמא הבאה הילדים דנים בבעיה הרבה יותר מתוחכמת הכרוכה בהבנה של משתנים ופעולות, בנוסף למושג השוויון.

פולקנר בקשה מהכתה להתבונן בפסוק  $a = b + 2$ . היא אמרה להם שזה פסוק אמת ושאלה מי גדול יותר a או b? ילדים שחושבים על סימן השווה כמציין את הצורך לעשות משהו יתקשו בבעיה זו. מכיון שמוסיפים 2 ל b ולא מוסיפים שום דבר ל a, הם יכולים לחשוב ש b גדול יותר. הכתה הסכימה תחילה ש a ו b הם סימנים למשתנים, בדיוק כמו שהיו המשבצת או המשולש. אחרי זה הכתה הסכימה מהר מאוד ש a גדול יותר, וההסברים שלהם למצב זה הצביעו בברור על הבנה מעמיקה של מושג השוויון.

פולקנר: מדוע אתם חושבים ש a גדול יותר?

אנה: הפרידו את b ואת ה 2. ה a מחבר אותם ביחד.

גרי: אני חושב ש a גדול יותר. ההוא ועוד 2 הם חלק מ a.

מריה: כן, a צריך להיות גדול יותר, כי כל מה ש  $b+2$  יכול להיות, זה תמיד יהיה יותר מ b, כי אתה מצרף אותם.

אנה: נכון. ב a יש את ה 2, וב b אין.

לילי: ביחד הם צריכים להיות אותו דבר  $b+2$  צריך להיות אותו דבר כמו a.

## מסקנות

דיונים מן הסוגים האלה, שבהם מספר הילדים המשתתפים הלך וגדל, מצביעים על כך שהילדים למדו להסתכל על סימן השווה כעל סמל המתאר יחס (relationship) ולא כסימן ל"עשה זאת". מכיון שמאמר זה נכתב לפני סיום שנת הלימודים, לא אספנו נתונים מסכמים על ההבנה של הילדים לפתרון הבעיה  $5 + [] = 8 + 4$  בכתה זו. במחקר פיילוט שנערך על כיתה דומה של ילדי א' + ב' באותה עיר, מצאנו שבסיומה של השנה, 14 מתוך 16 ילדים ענו נכון שצריך לשים 7 במשבצת.

כאשר אנו עושים רפלקציה על הפעילות שנעשתה עם מושג השוויון ועם סימן השווה בכתה זו ובכתות אחרות, אנו ממשיכים להתפעל ממידת העניין וההתרגשות שהילדים מביאים לדיונים. לילי משתמשת במטפורה של ה"נד-נד" בהתלהבות של ילדה שרוצה לשחק עליו. סקיפ ממש רותח מכעס כאשר מישהוא רוצה לשים במשבצת מספר שיגרום למשוואה לצאת  $17 = 27$ . אלו אינן ההערות המושועממות של ילדים המחכים כבר להפסקה, אלא התרומה המתלהבת של ילדים החוקרים עולם חדש של חשיבה ותקשורת מתמטית והנהנים מהעוצמה של עולם חדש זה. ילדים אלו מפתחים הבנה של מושג השוויון תוך כדי כך שהם לומדים על מספרים ופעולות. הבנה זו תעזור להם לחשוב על משוואות ותהווה בסיס מוצק ללימוד האלגברה מאוחר יותר.

## ביבליוגרפיה

- Aenez-Ludlow, Adalira, and Catherine Walgamuth. "Third Graders' Interpretations of Equality and the Equal Symbol". *Educational Studies in Mathematics* 35 (1998): 153-187.
- Behr, Merlyn, Stanley Erwanger, and Eugene Nichols. *How Children View Equality Sentences*. PMDC Technical Report, no.3, Tallahassee, Fla.: Florida State University, 1975. ERIC No. ED 144802.
- Davis, Robert B. *Discovery in Mathematics: A Text for Teachers*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing co., 1994.
- Erlwanger, Stanley, and Maurice Berlander. "Interpretations of the Equal Sign among Elementary School Children". In: *Proceedings of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Montreal: 1983.
- Kieran, Carolyn. "Concepts Associated with the Equality Symbol". *Educational Studies in Mathematics* 12 (August 1981): 317-326.
- Matz, Marilyn. "Towards a Process Model for School Algebra Errors". In: *Intelligent Tutoring Systems*, edited by Derick Sleeman and John Seeley Brown, 25-50, New York: Academic Press, 1982.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Principles and Standards for school Mathematics: Discussion Draft*, Reston, Va.:NCTM 1998.