בניית ריבועים וגילוי דגמים

Building Squares and Discovering Patterns

עודדו תלמידי כיתה ד' לעסוק במטלות מתמטיות עשירות
בעזרת מהלכים מסוימים של המורה המשלבים מספר סטנדרטים
של פרקטיקה מתמטית בדרכים משמעותיות.

מאת: David J. Whitin and Phyllis Whitin

הופיע ב: Teaching Children Mathematics Vol. 21, No. 4, November 2014

תרגום: ד"ר מיכל סוקניק

הסטנדרטים למתמטיקה בארה"ב Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM) (CCSSI 2010) מגדירים מה ילדים צריכים להבין ולהיות מסוגלים לעשות מגיל גן חובה ועד כיתה י"ב. מסמך זה כולל גם תיאור של תהליכים ומיומנויות עיקריים, הסטנדרטים לפרקטיקה מתמטית (SMP), המספק סקירה כללית של סוג החשיבה וההנמקה בהם ילדים צריכים לעסוק.

למרות שסטנדרטים אלה רשומים בצורה לינארית, ניתן ליישמם על ידי מורים, ולהבינם על ידי תלמידים בצורה אפקטיבית יותר כאשר הם משולבים באופן משמעותי בתוך מטלה מתמטית עשירה. במאמר זה אנו מתארים חקירה של מספרים ריבועיים בכיתה ד', המשלבת חמישה מתוך שמונה סטנדרטים אלה:

1. להבין בעיות ולהתמיד בפתרון. (SMP1)
2. לנמק בצורה מופשטת וכמותית. (SMP2)
3. לבנות טיעונים משכנעים ולבקר את ההנמקה של אחרים. (SMP3)
4. להשתמש בכלים מתאימים באופן אסטרטגי. (SMP5)
5. לחפש מבנים ולהבין אותם. (SMP7)

בתכנון ויישום המטלה, שאלנו את עצמנו אילו הזדמנויות לסטנדרטים קיימות במטלה? אילו מהלכים של המורה יכולים לסייע למעורבות התלמידים בסטנדרטים אלה?

סקירה כללית של המטלה והיישום שלה

מספר גורמים השפיעו על מערך השיעור שלנו והיישום שלו, של חקירה זו של דגמים העוסקים במספרים ריבועיים. האמנו שצירוף מכוון של ייצוגים מספריים וגיאומטריים יאפשר לתלמידים הזדמנויות לחקור ולהשוות דגמים וקשרים העוסקים בשטח, היקף, ומספרים זוגיים ואי-זוגיים. (SMP7).

Rivera and Becker (2009-2010) הדגישו עבור כל הלומדים – כולל פרחי הוראה - את הערך שיש לקישור בין דגמים מספריים לייצוגים פיזיים או ציוריים. מאחר וקישור בין מושגים ואסטרטגיות במהלך הזמן מסייע לגישה ל- SMP, חשבנו גם אנחנו על דרכים בהן מטלה זו תסתמך על ההתנסות המתמטית של הילדים שהתרחשה לאחרונה. במקרה זה, הילדים השתמשו בייצוגים הן מספריים והן גיאומטריים כדי לחקור כפולות וגורמים. הם השתמשו

בלוח המאה כדי לספור בקפיצות של 2, 3, 4 וכן הלאה. הם גם מילאו גדלים שונים של מלבנים (לדוגמה, 4x5) עם קבוצות שוות של ריבועים כדי לבדוק איזה קבוצות מספרים יוכלו לכסות את שטח המלבן במלואו.

בחרנו קבוצות של ריבועים עוקבים הולכים וגדלים, הגזורים מנייר משבצות (1x1, 2x2, 3x3 וכו') כמודלים פיזיים, כך שהילדים יוכלו לגלות באופן חופשי מגוון של דגמים על ידי סידור החתיכות בדרכים שונות. השתמשנו בכוונה בשאלות פתוחות המעודדות את התלמידים להמציא בעיות חקירה משלהם (Brown and Walter 1990). הצגנו שיעור ראשון של חקירה עם השאלה "מהן הדרכים שבהן אפשר לסדר את החתיכות האלה כדי למצוא קשרים שונים?" הילדים הציעו מספר רעיונות, כגון התאמת אותה פינה של הריבוע או התאמת ריבועים קטנים יותר בתוך גדולים יותר. בהמשיכם לעבוד, הילדים שיתפו חתיכות בין ארבעת ילדי הקבוצה בכל שולחן, כך שיכלו להשתמש בכמה עותקים של אותו ריבוע כדי למצוא תגליות חדשות. האמנו שמתן בעלות כזו לילדים על התהליך תעודד בצורה הטובה ביותר הבנה והתמדה (SMP1). בו בזמן, רצינו לאפשר לכל הילדים גישה לדרכים המוצלחות ביותר לניתוח מתמטי עמוק (Whitin, 2006). לכן, לאחר שיעור חקירתי זה, אספנו את הילדים יחד כדי לשתף ביניהם את תגליותיהם. על סמך הקריטריונים של SMP, בחרנו כמה רעיונות מרשימה זו, אותם הילדים יוכלו להמשיך ולחקור.

התפקיד שלנו בהנחיית מעורבות התלמידים בהיבטים אחרים של SMP כלל קידום של חשיבת הילדים. היה לנו חשוב לעודד את הילדים לחפש במכוון דגמים (SMP7), ולהשתמש באופן אסטרטגי בייצוגים הן המספרי והן הגיאומטרי ככלים להנמקה (SMP2, SMP5) וכדי להצדיק ולתקשר את מסקנותיהם לאחרים (SMP3).

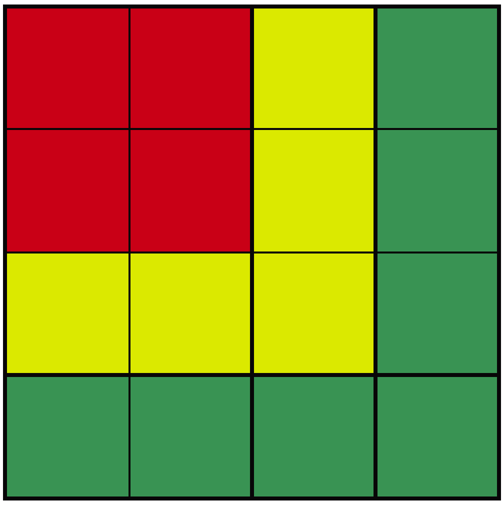
אנו מתארים בהמשך שלוש מחקירות ההמשך של הילדים, הכוללות (1) את הדגמים המספריים שנמצאו בהגדלת השטח של המספרים הריבועיים, (2) דגמים שנמצאו בהתאמת ריבועים של 2x2 בתוך ריבועים גדולים יותר, ו- (3) דגמים שנמצאו בהתאמת ארבעה ריבועים מאותו סוג בתוך ריבוע גדול יותר. בכל מקרה, אנו בודקים את מהלכי המורה שהנחתה את הזדמנויות התלמידים עבור SMP.

דגמים בסדרת המספרים הריבועיים

בזמן החקירה, מספר ילדים שמו את הריבועים שלהם אחד מעל השני על ידי סידורם ברצף מהגדול ביותר לקטן ביותר כשהם מתאימים אותם לפינה ימנית משותפת (ראו **איור 1**).

איור 1

הילדים השתמשו ברעיון
של הנחת מודלים של ריבועים
אחד מעל השני כדי לגלות
כמה דגמים מעניינים



המודל הפיזי של ריבועים החופפים זה את זה הדגיש את הדגם של שטחים הולכים וגדלים. בזהותנו הזדמנות אידיאלית להשוואת ייצוגים מספריים וגיאומטריים, הנחינו את הכיתה כולה לבנות טבלה מספרית של התוצאות (SMP5) (ראו **טבלה 1**).

טבלה 1

כשהמחברים זיהו את הפתיחה המושלמת להשוואת ייצוגים גאומטריים (ראו איור 1) וייצוגים מספריים, הם הינחו את התלמידים לבנות טבלה מספרית של התוצאות

תוצאות מספריות בהשוואה לייצוגים גאומטריים

שטח	מימדים
1	1 × 1
4	2 × 2
9	3 × 3
16	4 × 4
25	5 × 5
36	6 × 6
49	7 × 7
64	8 × 8
81	9 × 9
100	10 × 10

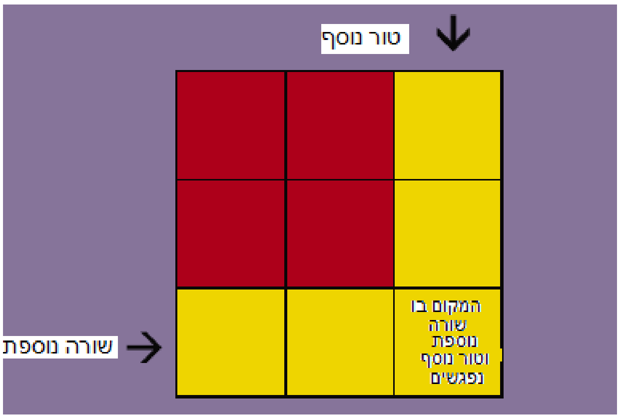
לאחר מכן הובלנו דיון שהתמקד על גילוי דגמים (SMP7) והבנת הקשרים בין מספרים אי-זוגיים ומספרים ריבועיים (SMP1) על ידי שימוש בשני הייצוגים. המשכנו להשתמש בשאלות פתוחות: "מה אתם רואים? מה נראה לכם מעניין? אילו דגמים אתם רואים?" על מנת לקדם את יכולות ההבנה (SMP1) וההנמקה (SMP2) של הילדים. אחר כך אתגרנו אותם על ידי בקשה להסביר מדוע מופיעים דגמים מסוימים (SMP3).

תצפיות הילדים היו רבות ומגוונות. סופי ציינה בהתחלה "מחברים מספרים אי-זוגיים כדי ליצור את השטחים, כמו $4 = 3 + 1$ ו- $9 = 5 + 4$." עודדנו את הילדים להשתמש במודל כדי להמשיך ולהסביר את הסדרה הקבועה הזו של מספרים אי-זוגיים: "כיצד תסבירו מדוע כל הסכומים האלה הם תמיד אי-זוגיים, אבל המספרים אותם אתם מוסיפים משתנים כל הזמן?" כמה ילדים נימקו שחיבור שני מספרים אי-זוגיים או שני מספרים זוגיים ייתן סכום זוגי; ואז הוספת ריבוע אחד תיצור מספר אי-זוגי. הייצוג הויזואלי תמך בילדים בהסבירם את החיבור ההמשכי הזה של מספרים אי-זוגיים; לדוגמה, כל צורת L שנוצרה כדי ליצור את הריבוע הבא הגדול יותר, היתה התוצאה של חיבור האורך של שתי צלעות של הריבוע הקודם ועוד ריבוע אחד כדי למלא את הפינה (ראו **איור 2א**).

איור 2

במבט לאחור, המחברים נוכחו שהם החמיצו
את ההזדמנות לציין בפני התלמידים כיצד
להציג הנמקות בצורה אלגברית: $2x + 1$.

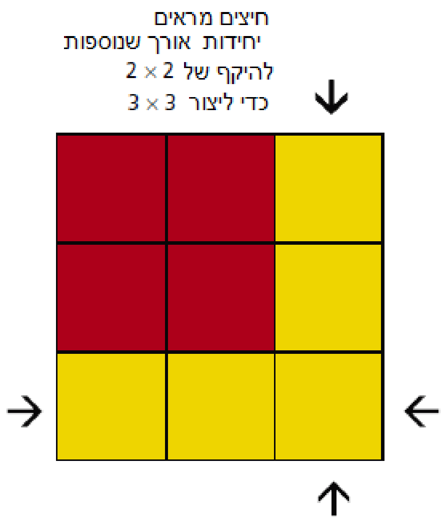
א. כל ריבוע עוקב גדול יותר גדל
במספר אי-זוגי של יחידות ריבועיות



ב. היקפים של ריבועים עוקבים גדלים בארבע יחידות

2×2 היקף 8

3×3 היקף 12



לפיכך, הטבלה והריבועים עצמם נתנו לילדים שני ייצוגים הן כדי לשים לב לדגם (SMP7) והן להסביר מדוע הדגם מופיע (SMP2, SMP3). בנייה של שתי צורות ייצוג אלה הדגימה את היתרונות של כל אחת, מימד חשוב של SMP5, שימוש בכלים בצורה אסטרטגית. הטבלה

עזרה להאיר את הקשר בין מספרים אי-זוגיים וריבועיים, והמודל הקונקרטי סיפק מקור לחקירה מדוע מספרים אי-זוגיים אלה חזרו על עצמם. בדיעבד, נוכחנו שיכולנו גם להפיק תועלת מהזדמנות זו כדי לחקור עם הילדים כיצד לייצג את ההנמקה שלהם בצורה אלגברית: $2x + 1$.

מייסי גילתה דגמים וקשרים נוספים שהכיתה בדקה יחד. העבודה שלהם ממשיכה להדגים את היתרונות של שילוב מספר מימדים של SMP. החקירה של מייסי תמכה בהם בגילוי דגמים (SMP7), בשימוש בטבלאות ובמודלים של ריבועים (SMP5) כדי להבין את הדגמים האלה (SMP1), ולהסביר מדוע דגמים אלה מופיעים (SMP3). מייסי שמה לב בהתחלה ש"המספרים של שטח הולכים אי-זוגי (1), אחר כך זוגי (4), אחר כך חזרה לאי-זוגי (9), ואז חזרה לזוגי (16)".

אתגרנו את הילדים בבקשה להסביר את הסיבות לדגם המתחלף הזה, על ידי שימוש בייצוגי הריבועים שלהם לתמיכה בטענותיהם. הם ראו שהמספרים הזוגיים היו מורכבים ממספר זוגי של שורות; לדוגמה, ארבע הוא 2 שורות של שתיים, שש עשרה הוא 4 שורות של ארבע. המספרים האי-זוגיים היו מורכבים ממספר אי-זוגי של שורות; לדוגמה, תשע הוא 3 שורות של שלוש, עשרים וחמש הוא 5 שורות של חמש, וכן הלאה. כאמור, הילדים גילו ששני מספרים זוגיים או שני מספרים אי-זוגיים יוצרים מספר זוגי. כעת הם הרחיבו את החשיבה הזו כדי להסביר שחיבור של שלושה מספרים זוגיים ייתן מספר זוגי וחיבור של שלושה מספרים אי-זוגיים ייתן מספר אי-זוגי. לפיכך, הילדים עסקו ב- SMP7, ראשית על ידי הבחנה בדגם המתחלף בטבלה, אחר כך מיקדנו את תשומת ליבם לשימוש בריבועים שלהם כדי לעזור להם להסביר מדוע דגם זה הופיע (SMP2, SMP3, SMP5). מייסי שמה לב גם לכך ש"ההיקפים תמיד מדלגים בארבע (4, 8, 12, 16 ...). זו טבלת הכפל ב- 4. וכל ההיקפים זוגיים; וגם הם תמיד יהיו זוגיים כי מתחילים עם מספר זוגי (4) וממשיכים להוסיף ארבע." היא ידעה ש זוגי = זוגי + זוגי, ולכן ההיקפים הזוגיים האלה ימשיכו.

שוב אתגרנו את מייסי ואת חבריה להסביר מדוע ההיקפים כל הזמן גדלים בארבע. הם פנו לריבועים שלהם כדי לבדוק מה קורה. על ידי הנחת הריבועים אחד על השני, הם יכלו לראות מה השתנה ומה נשאר אותו הדבר (ראו **איור 2ב**). בכל אחד מהמקרים, מספר השורות ומספר הטורים גדל באחד, ואז נוספה יחידה ריבועית אחת בפינה הימנית-תחתונה, במקום שבו השורה הנוספת והטור הנוסף נפגשו. שינויים אלה הגדילו את ההיקף ב- 4 יחידות. כאן שוב, הזמינות של הרב-ייצוגיות תמכה בילדים בפיתוח המיומנויות לגלות דגמים ולספק הצדקה להופעתם (SMP2, SMP3, SMP5, SMP7).

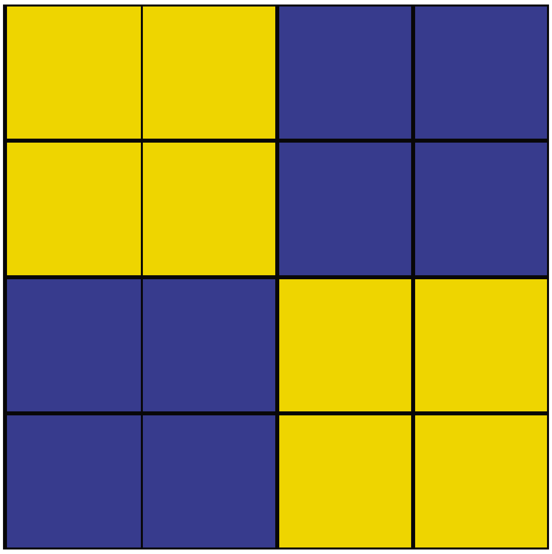
התאמת ריבועים 2 x 2 בתוך ריבועים גדולים יותר

המטלה הבאה מדגימה הזדמנויות לאינטגרציה של SMP על ידי שימוש בסטנדרט אחד כדי ליצור את הופעתם של אחרים. במקרה זה, כלים ומודלים אחדים (SMP5) סיפקו מבט רחב יותר של הבעיה, ולפיכך תמכו ביכולות ההבנה של התלמידים (SMP1). הבנה תורמת לחיפוש אחר דגמים (SMP7). גילוי דגמים יכול אז להוות בסיס לעידוד הלומדים להסביר מדוע דגמים אלה מופיעים (SMP2, SMP3). כתוצאה מכך, ה- SMP נעשים קשורים באופן אותנטי ומשמעותי.

בזמן החקירה הראשונה, חלק מהילדים השתמשו בריבועים קטנים יותר כחתיכות פאזל להתאים בתוך ריבועים גדולים יותר. במפגש הקבוצתי שלנו, שני ילדים שיתפו את הגילוי שלהם, אותו הרחיבו חברי כיתתם מאוחר יותר. קיילה התחילה חקירה ראשונה זו בכך שהתאימה ארבעה ריבועים של 2x2 בתוך ריבוע של 4x4 (ראו **איור 3**) והצהירה בגאווה, "הסתכלו, ריבועים קטנים אלה נכנסים במקום שלהם ומתאימים בתוך הריבוע הגדול."

איור 3

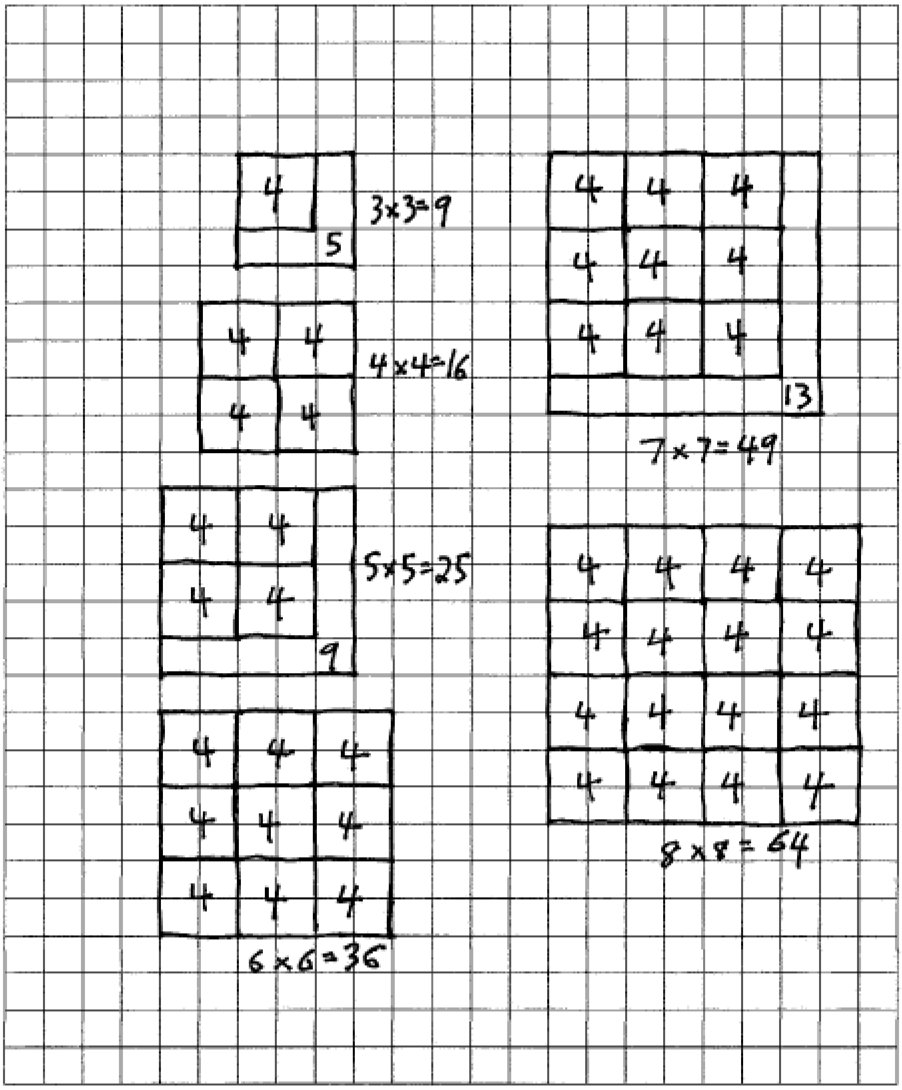
במהלך החקירה הראשונה, קיילה התאימה ארבעה ריבועים 2×2 בתוך רבוע 4×4 במפגש הקבוצתי לאחר החקירה הראשונה, היא וילד נוסף שיתפו בתגליות שלהם אותן חברי הכיתה הרחיבו מאוחר יותר.



בהסתמך על הרעיון של קיילה, העלינו בעיה נוספת לחקירה עבור חלק מהתלמידים: "מה יקרה אם נמשיך לחפש ריבועים נוספים של 2x2 בתוך ריבועים גדולים יותר? מה נמצא?" בזמן העבודה האינדיבידואלית, ויקטור נענה לאתגר שלנו ותעד את תוצאותיו בציור (ראו **איור 4**).

איור 4

ויקטור תעד את המספר המקסימלי של ריבועים
המכסים את השטח של ריבועים הולכים וגדלים.
הוא גם שם לב לשארית של יחידות ריבועיות.



לאחר מכן הרחבנו את עבודתו על ידי ארגון טבלה (ראו **טבלה 2**) כייצוג שני.

טבלה 2

לאחר שויקטור הרחיב את עבודתה של קיילה עם ריבועים של 2×2 (ראו איור 4), המחברים יצרו טבלה כיתתית נוספת לסיכום עבודתו של ויקטור. הכיתה התייחסה לשני הייצוגים כדי לזהות דגמים שמופיעים.

דגמים של ריבועים של 2×2 בתוך ריבועים אחרים

מימדי הריבוע	שטח	מספר הריבועים של 2×2	ריבועים שנשארו
1×1	1	0	1
2×2	4	1	0
3×3	9	1	5
4×4	16	4	0
5×5	25	4	9
6×6	36	9	0
7×7	49	9	13
8×8	64	16	0
9×9	81	16	17
10×10	100	25	0

הבאנו את שני הייצוגים האלה לכיתה לשימוש התלמידים בשעה שניתחו והסבירו את הדגמים שהופיעו.

ילד אחד הבחין בכך שמספר הריבועים של 2x2 שהיו בתוך ריבועים עוקבים הולכים וגדלים (כלומר, 4x4, 5x5, 6x6) היה הסדרה של מספרים ריבועיים שחזרו על עצמם: ... 1, 1, 4, 4, 9, 9, 16, 16. ילד אחר גילה שמספר הריבועים שנשארו התחלף לסירוגין בין אפס לסדרת מספרים שגדלה בארבע (לדוגמה, ... 1, 5, 9, 13). גם הפעם, הצענו שהילדים ישתמשו בייצוגים הויזואליים שלהם כדי להסביר מדוע דגמים אלה מופיעים (SMP2). התיעוד הויזואלי שלהם של אותיות ה- L (ראו **איור 1**) עזר להדגים מדוע דגם זה הופיע.

לדוגמה, ניתן היה לחבר את חמשת הריבועים מה- L הצהובה ב- 3x3 עם שבעת הריבועים מה- L הירוקה ב- 4x4. ביחד, שתי ה- L האלה יוצרות שלושה ריבועים נוספים של 2x2 ללא שארית של ריבועים. ייצוג ויזואלי זה עזר לכיתה להסביר שאת כל הריבועים בעלי צלע זוגית ניתן למלא במלואם על ידי צורות של 2x2 (SMP3).

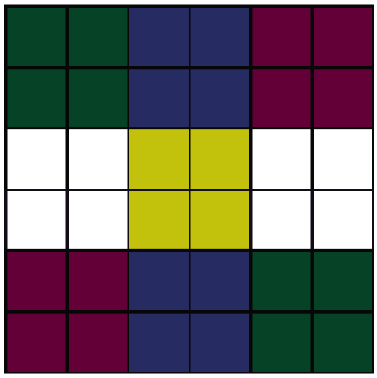
התאמת ארבעה ריבועים זהים בתוך ריבוע גדול יותר

כאמור, התחלנו את החקירה עם שיעור של חקירה פתוחה כדי לטפח את הבעלות, ההבנה וההתמדה של הילדים (SMP1). התחלנו להעריך את היתרונות של שמירה על השקפה זו לאורך כל החקירה כשלוסי יצרה הרחבה משלה של הבעיה הקודמת, על ידי שילוב של התגלית של קיילה עם תצפית של ילד אחר. במהלך זמן החקירה ההתחלתי, אוואן הגיע לתגלית קשורה כשהוא התאים רק ריבועים של 2x2 בתוך ריבוע של 6x6 (ראו **איור 5א**) וגם התאים רק ריבועים של 3x3 בתוך ריבוע של 6x6 (ראו **איור 5ב**).

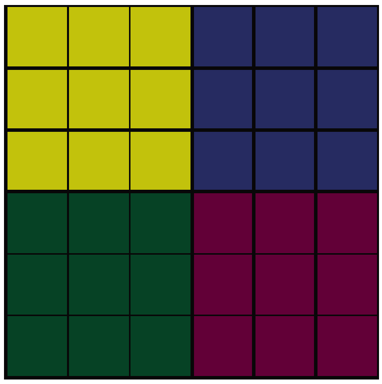
איור 5

לוסי יצרה הרחבה משלה של הבעיה הקודמת על ידי שילוב של התגלית של קיילה עם תצפית של ילד אחר.

א. תשעה ריבועים של 2×2 מכסים את השטח של ריבוע של 6×6



ב. ארבעה ריבועים של 3×3 מכסים את השטח של ריבוע של 6×6



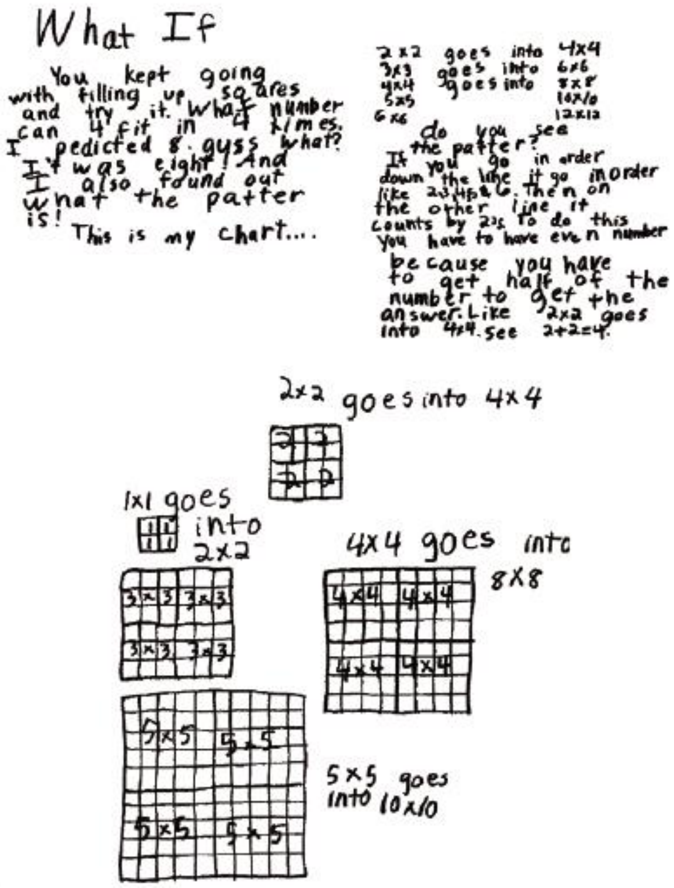
הוא אמר, "שמתי לב שהמספרים הקטנים יותר מתאימים בתוך המספרים הגדולים יותר." הממצאים שלו שימשו כדי להראות חלק מהגורמים (או "אבני הבניין") של 36; כלומר, 2, 3, 4, 9.

את לוסי סיקרנה העובדה שהיה צריך ארבעה ריבועים של 2x2 כדי למלא בתוך ריבוע של 4x4 וארבעה ריבועים של 3x3 כדי למלא בתוך ריבוע של 6x6. היא רצתה לדעת מה תמצא אם תמשיך את הדגם הזה על ידי חיפוש של ריבוע שיתמלא על ידי ארבעה ריבועים של 4x4, אחר כך ריבוע שיתמלא על ידי ארבעה ריבועים של 5x5, וכן הלאה. בעודדנו אותה להמשיך רעיון זה, נתנו לה את ההזדמנות "לראות את המתמטיקה כהגיונית, שימושית ומשמעותית, יחד עם אמונה בשקדנות וביעילות של עצמה" (CCSSI 2010, עמ' 6). הכרה

בשורשי שיתוף הפעולה של הבעיה שלה עזרה גם לבנות תרבות של שאלת שאלות שבה ממשיכים לחקור כיוונים חדשים (Whitin and Whitin, 2000). העבודה של לוסי הראתה את התקדמות החקירה שלה (ראו **איור 6**).

איור 6

המחברים אתגרו את לוסי ליצור טבלה של מה שידעה עד כה ואחר כך לנבא איזה גודל של ריבוע יתמלא על ידי ארבעה ריבועים של 4×4. לוסי ניבאה נכון וכן גילתה את הדגם.



היא התחילה על ידי שאלת ההרחבה שלה: "מה אם ממשיכים למלא ריבועים ומנסים זאת? איזה מספר יכולים ארבעה (ריבועים של 4x4) למלא ארבע פעמים?" לפני שהיא ציירה ייצוג ויזואלי, אתגרנו אותה ליצור טבלה של מה שידעה עד כה ואחר כך לנבא איזה ריבוע יתמלא על ידי ארבעה ריבועים של 4x4. סימני הקריאה בכתיבה שלה (ראו **איור 6**) משקפים את ההתרגשות שחוותה כשלא רק מצאה שהניבוי שלה היה נכון, אלא גם גילתה את הדגם שהייצוגים שלה חשפו (SMP1). היא ציינה שהריבועים הקטנים גדלו לפי הסדר 1x1, 2x2, 3x3... ושהריבועים הגדולים שהכילו ארבעה מהריבועים הקטנים גדלו בקפיצות של שתיים:

...2x2, 4x4, 6x6. אתגרנו אותה גם להסביר מדוע הדגם של קפיצה בשתיים נוצר, והיא השתמשה בייצוגי הריבוע שלה ככלי לעזור לה לשתף את ההנמקה שלה:

"כדי לעשות זאת צריך שיהיה מספר זוגי [לדוגמה, ריבוע עם צלע זוגית] כי צריך לקבל חצי מהמספר [אורך הצלע של הריבוע הגדול יותר] כדי לקבל את התשובה [אורך הצלע של הריבועים הקטנים יותר שממלאים בפנים]. כאילו 2x2 נכנס בתוך 4x4. אתם רואים, 4 = 2 + 2."

העבודה של לוסי מדגימה את היתרונות של מתן מטלה מתמטית עשירה כדי לספק הזדמנויות לעיסוק עם SMP. המהלכים ההוראתיים שלנו תמכו באינטגרציה של SMP בחקירתה של לוסי: העידוד שלנו שתמשיך בכיוון חדש זה, תרם להתמדה שלה ולהתלהבות מהמטלה (SMP1) והוביל לתגליות הדגמים שלה (SMP7); ההנחייה שלנו בבניית טבלה מספרית סיפקה ייצוג חשוב עבורה בשעה שניתחה והצדיקה את מסקנותיה (SMP5); והשאלות שלנו אתגרו אותה לומר במפורש את הסיבות להופעת הדגמים שציינה (SMP3). שימו לב גם לסגנון דמוי השיחה שכתיבתה של לוסי מראה (ראו **איור 6**). ברור שהיא חשבה על קהל כשכללה משפטים כמו "נחשו מה? זה היה שמונה!" "האם אתם רואים את הדגם?" "אתם רואים, 4 = 2 + 2." אנחנו נתנו לילדים הזדמנויות קבועות לשתף את כתיבת היומן שלהם עם הכיתה כולה. אנו חושדים שלוסי חשבה על החברים שלה כשהיא תעדה את ממצאיה. העובדה שיש קהל אמיתי לכתיבה מתמטית של מישהו, יכולה לתת לכותבים מטרה משמעותית לתקשר את ההנמקה שלו (SMP3).

הסתכלות אחורה

התנסות זו הראתה לנו שלוש נקודות חשובות אודות הוראה ולימוד של מתמטיקה שהסטנדרטים (Common Core State Standards, 2010) העמידו במרכז המסמך שלהם. ראשית, שילוב הסטנדרטים לפרקטיקה מתמטית – כגון הבנת הבעיות, שימוש בכלים באופן אסטרטגי, הנמקה מופשטת וכמותית, בנייה של טיעונים מעשיים וגילוי דגמים – הוא הכרחי ללמידה. בחירה של מטלות מתמטיות עשירות ופתוחות יכולה לספק הזדמנויות לתלמידים להתנסות באינטגרציה זו של SMP. יתרון מרכזי אחד של אינטגרציה זו הוא ש"כאשר תלמידים יכולים לקשר רעיונות מתמטיים, ההבנה שלהם עמוקה יותר ומתמשכת יותר" (NCTM 2000, עמ' 64).

שנית, ייצוגים מתמטיים מציעים דרך חשובה להבנת מושגים וקשרים. הריבועים הגזורים המוחשיים אפשרו נקודת מבט מרחבית לשטח, היקף, ולסדרה הגדלה של הריבועים. הטבלאות סיפקו מבט מרוכז, לינארי עבור היבטים מספריים רבים של הריבועים בהם צפו הילדים. הן הגזירות והן הטבלאות עבדו יחד כדי לחזק ולהרחיב את הבנת הילדים בשעה שעסקו ב- SMP. בנוסף מצאנו שלילדים קל יותר לכתוב על הממצאים שלהם כשיש להם מקורות קונקרטיים. בצורה זו, סוג ייצוג אחד תומך בהתפתחותו של אחר (Whitin and Whitin, 2000).

לבסוף, תפקיד המורה הוא קריטי במימוש הפוטנציאל של SMP. בחקירה זו של מספרים ריבועיים, אנו בחרנו מטלה מתמטית עשירה ואחר כך עיצבנו את החקירה בדרך פתוחה כך שכיבדנו את הבעלות ועודדנו התמדה. בנוסף גם הצגנו שאלות פתוחות אך חקרניות, שאתגרו את הילדים להסביר ולהצדיק את הנמקותיהם. הנחינו את הילדים ליצור טבלאות כדי ללוות את המודלים הקונקרטיים שלהם, כך שתהיה להם גישה לרב-ייצוג בשעה שהם מפתחים הבנה עמוקה יותר אודות מדוע דגמים מסוימים מופיעים. לבסוף, עודדנו את הילדים לבנות על חשיבת חבריהם לכיתה. כפי שתלמיד כיתה ד' אחד העיר, "הרעיונות שלנו נותנים לאחרים רעיונות גדולים יותר" (Whitin and Whitin, 2000). בדרכים אלה, עיקר הסטנדרטים למתמטיקה יכולים להתממש עבור כל הילדים.

מקורות

Brown, Stephen I., and Marion I. Walter. 1990. *The Art of Problem Posing.* 2nd ed. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Common Core State Standards Initiative (CCSSI). 2010. Common Core State Standards for Mathematics. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). 2000. *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Rivera, Ferdinand D., and Joanne Rossi Becker. 2009/2010. "Figural and Numerical Modes of Generalizing in Algebra." *Mathematics Teaching in the Middle School* 16 (December /January): 268–71.

Whitin, Phyllis. 2006. "Meeting the Challenges of Negotiated Mathematical Inquiry." *Teaching and Learning: The Journal of Natural Inquiry and Reflective Practice* 21 (Fall): 59–83.

Whitin, Phyllis, and David J. Whitin. 2000. *Math Is Language Too: Talking and Writing in the Mathematics Classroom.* Urbana, IL: National Council of Teachers of English, and Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.


David J. Whitin, **david.whitin@wayne.edu**, and **Phyllis Whitin**, **phyllis.whitin@wayne.edu**, are professors emeriti at Wayne State University in Detroit, Michigan. They are interested in inquiry-based learning and integrated curriculum.