# فهم الأطفال للتساوي: أساس لعلم الجبر

## Children`s Understanding of Equality: A Foundation for Algebra

تأليف: Karen P. Falkner, Linda Levi, and Thomas P. Carpenter

نُشر في: Teaching Children Mathematics, December 1999

توصي العديد من الولايات ومناطق المدارس، كما توصي "*مبادئ ومعايير رياضيات المدارس: مسوّدة مناقشة (NCTM 1998)*"، بأن يتم تعليم موضوع الجبر في سنوات الطفولة المبكرة. على الرغم من أن الأطفال الصغار يفهمون أكثر بكثير مما جرت العادة على الاعتقاد، يمكن أن يواجه البالغون صعوبة في بلورة فهم ما قد يشكّل الجبر الذي يلائم سنوات الطفولة المبكرة. وينهمك، حاليًا، 15 معلمًا وثلاثة باحثين جامعيين في مشروع لتحديد ماذا يمكن أن يكون، وماذا يجب أن يكون، تعليم الجبر للأطفال الصغار. سنناقش، في هذا المقال، مفهوم التساوي، وهي فكرة جوهرية لتطوير تفكير الجبر لدى الأطفال الصغار.

### الإعتقادات الخاطئة حول إشارة التساوي

على الرغم من أن المعلمين كثيرًا ما يستخدمون إشارة التساوي مع تلاميذهم، من المهم استكشاف ماذا يفهم الأطفال عن التساوي وعن إشارة التساوي. في بداية هذا المشروع، طلب العديد من المعلمين من تلاميذهم حلّ المسألة التالية: $8 + 4 = \square + 5$ في البداية، بدت هذه المسألة للعديد من المعلمين على أنها عادية. فقد قالت أحدى معلمات الصف السادس، على سبيل المثال، "بالتأكيد، سوف أساعدك وسأعرض هذه المسألة على تلاميذي، لكن ليس لدي أي فكرة ما هي أهمية هذا الأمر بالنسبة لك." فوجدت هذه المعلمة أن جميع تلاميذها الـ 24 ظنّوا أن 12 هو الجواب الذي يجب أن يكون داخل التربيعة. ووجدت أن هذه النتيجة هامة جدًا حتى أنها جعلت معلمات صفوف السوادس الأخرى يعرضن المسألة على طلابهن، قبل أن تسنح لنا الفرصة فحص النتائج معها. وظنّ جميع تلاميذ الصف السادس، البالغ عددهم 145 تلميذًا، الذين تلقوا هذه المسألة أن الجواب الذي يجب أن يكون في المربع هو إما 12 أو 17، كما يُظهر الجدول 1.

**الجدول 1**

النسبة المئوية للأطفال الذين يعطون أجوبة متنوعة للمسألة $8 + 4 = \boxed{\phantom{0}} + 5$

| الصف | الجواب المُعطى | | | | | عدد الأطفال |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 7 | 12 | 17 | 12 و 17 | الآخرون | |
| 1 | 0 | 79 | 7 | 0 | 14 | 42 |
| 1 وَ 2 | 6 | 54 | 20 | 0 | 20 | 84 |
| 2 | 6 | 55 | 10 | 14 | 15 | 174 |
| 3 | 10 | 60 | 20 | 5 | 5 | 208 |
| 4 | 7 | 9 | 44 | 30 | 11 | 57 |
| 5 | 7 | 48 | 45 | 0 | 0 | 42 |
| 6 | 0 | 84 | 14 | 2 | 0 | 145 |

لماذا واجه العديد من الأطفال مشكلة في هذه المسألة؟ من الواضح أن للأطفال فهم محدود للتساوي ولإشارة التساوي إذا ظنّوا أن 12 أو 17 هما الجوابان اللذان يجب أن يكونا في التربيعة. ولكن، يفهم العديد من الأطفال الصغار كيفية تمثيل وضع يتضمن جعل الأشياء متساوية. مثلاً، عرضت ماري، وهي معلمة روضة أطفال، على تلاميذها المسألة $5 + 4 = \boxed{\phantom{0}} + 6$ . واعتقد جميع التلاميذ أن العدد 9 يجب أن يكون في التربيعة. وعندها، قامت ماري بتمثيل هذا الوضع مع الأطفال. ووضعت، مع الأطفال، كومة مكونة من أربعة مكعبات، ثم كومة أخرى مكونة من 5 مكعبات. وفي فسحة أخرى وضعوا كومتين؛ واحدة مكونة من 6 مكعبات والأخرى من 9 مكعبات، ثم سألت ماري التلاميذ ما إذا كان كل ترتيب يحتوي على نفس عدد المكعبات. عرف التلاميذ أن المجموعات لم تحتو على نفس عدد المكعبات، وكان باستطاعتهم أن يشيروا إلى المجموعة التي احتوت على أكبر عدد من المكعبات. وكان باستطاعة عدد من الأطفال إخبار المعلمة كيف يمكنهم جعل المجموعتين تحتويان على نفس العدد من المكعبات. على الرغم من ذلك، وحتى بعد القيام بهذه الفعالية، استمر التلاميذ في الاعتقاد أن العدد 9 هو العدد الذي يجب أن يكون في التربيعة في المعادلة.

فاجأت هذه الحادثة ماري والمعلمين الآخرين. لقد افترضنا أنه سيكون لدى أطفال الرياض بعض التجربة مع إشارة التساوي وأنهم لم يقوموا بعد ببلورة الاعتقادات الخاطئة حول التساوي التي تظهر لدى الأطفال الأكبر سنًا. ولكن، يبدو أنه حتى أطفال الرياض يعانون من اعتقادات خاطئة حول معنى إشارة التساوي لم تختفي بعد عرض مثال واحد أو مثالين عليهم أو بعد إعطاء تفسير بسيط. وتوضح هذه الحادثة، أيضًا، أنه يمكن أن يكون للأطفال الصغار في سن الرياض فهم ملائم لعلاقات التساوي التي تتضمن مجموعات من الأشياء ولكنهم يواجهون صعوبة في ربط هذا الفهم بالتمثيلات الرمزية التي تتضمن إشارة تساوي. هنالك حاجة لمجهود منظّم لفترة زمنية مطوّلة من أجل تأسيس أفكار ملائمة حول التساوي. ويجب على المعلمين، أيضًا، أن يهتموا بفهم الأطفال للتساوي حالما يتم إدخال الرموز التي تمثل العمليات العددية. وإذا لم يتم ذلك، يمكن أن تصبح الاعتقادات الخاطئة حول التساوي أكثر رسوخًا. (أنظر "حول الرياضيات" لاحقًا).

يعتقد الأطفال في الصفوف الإبتدائية ، عامة، أن إشارة التساوي تعني أنه يجب عليهم إجراء العملية الحسابية التي تأتي بعد هذه الإشارة، وأن العدد الذي يأتي بعد إشارة التساوي هو جواب العملية الحسابية، كما أشار Erlwanger،Behr ، و Nicholas (1975)؛ Erlwanger و Berlanger (1983)؛ و Anenz-Ludlow و Walgamuth (1998). ولا يرى أطفال المدارس الإبتدائية، عادة، إشارة التساوي على أنها رمز يعبر عن العلاقة "أنه نفس الشيء كـ." ليس هناك تنوع كبير في الكيفية التي يتم فيها استخدام إشارة التساوي في المدارس الإبتدائية. عادة ما تظهر إشارة التساوي في نهاية معادلة ما ويظهر بعدها عدد واحد فقط. في القضايا العددية مثل 10 = 4 + 6 أو 54 =3 - 10- 67، يكون الأطفال على صواب عندما يفكرون بإشارة التساوي على أنها إشارة لإجراء العملية الحسابية.

**الصفّان الأول والثاني**

كارين فولكنر تدرّس حاليًا الصفان الأول والثاني. ويبقى الأطفال، عادة، في نفس الصف لمدة سنتين. تُظهر بقية هذا المقال كيفية تقدّم الأطفال في هذا الصف من ناحية فهمهم للتساوي على مدى السنة والنصف الماضية.

لقد كان حل المسائل الكلامية (القصصية) في صفوف فولكنر، لفترة من الزمن، جزءً لا يتجزأ من تعليم الرياضيات. وطُلب من التلاميذ، على نحو منتظم، أن يكتبوا جمل عددية تبيّن كيفية حلّهم للمسائل الكلامية. لذلك، توقعت فولكنر أن يكون تلاميذها ناجحين عندما طلبت منهم حلّ الجملة العددية $8 + 4 = \boxed{\phantom{00}} + 5$ للمرة الأولى. ولدهشتها، أجاب التلاميذ تمامًا كما أشار البحث إلى إنهم سيجيبون. فقد وضع معظمهم العدد 12 في التربيعة، وقام البعض بتوسيع الجملة العددية عن طريق إضافة = 17. وكان النقاش الذي تلى ذلك مشوقًا، إذ قال معظمهم أن العدد 12 يجب أن يكون داخل التربيعة لأن "ثمانية مُضافة إلى أربعة تساوي إثني عشر." ويوضح الإقتباس التالي النقاش الذي دار بعد أن عمل التلاميذ على حلّ المسألة.

فولكنر: هل 4 + 8 هو نفس الشيء مثل 5 + 12؟

آنّا: كلا.

فولكنر: لماذا، إذًا، وضعت 12 في التربيعة؟

آنّا: لأن 4 + 8 يساوي 12. أترين ذلك؟ (وهي تعدّ على أصابعها) إنها 8، 9، 10، 11، 12.

(هزّ العديد من الأطفال رؤوسهم على أنهم موافقون معها.)

فولكنر: هل حصل أحدكم على جواب آخر؟

آدم: إنه 7.

فولكنر: لماذا؟

آدم: لأنه يجب أن تحصلي على نفس الكمية على كل جانب من إشارة التساوي. هذا ما تعنيه إشارة التساوي.

فولكنر: حسنًا. آدم، هل لك أن تكرر ذلك ثانية؟

(يكرر آدم تفسيره. التلاميذ الآخرون يعتبرون آدم على أنه قائد الصف، ويصغون له بانتباه شديد.)

فولكنر: (مشيرة إلى الجملة العددية على اللوح.) وهكذا آدم، انت تقول أن إشارة التساوي تعني أنه مهما كانت الكمية على جهة واحدة من إشارة التساوي، يجب أن تكون نفس الكمية على الجهة الثانية من إشارة التساوي. (لبقية الصف) ما رأيكم في ما قاله آدم؟

آنّا: نعم، ولكن يجب أن يكون ذلك 12, لأن 12 = 4 + 8.

دان: كلا، ما قاله آدم صحيح. ما يوجد على جانب واحد من إشارة التساوي يجب أن يساوي ما يوجد على الجانب الآخر: 12 = 4 + 8 وَ 12 = 5+7، لذلك العدد 7 يجب أن يكون في التربيعة.

تداول التلاميذ في الصف هذه القضية لبعض من الوقت. إن إشارة التساوي هي عبارة عن مصطلح، الرمز الذي اختاره الرياضيون ليمثل فكرة التساوي. ولأنه لا يوجد سبب منطقي يشير إلى إن إشارة التساوي لا تعني "إجراء عملية الحساب"، اعتقدت فولكنر أنه من الملائم أن تخبر الصف أنها توافق على ما قالاه آدم ودان. ولكن، لم يكن كافيًا إعلام الصف بما تعنيه إشارة التساوي للعديد من التلاميذ حتى يصبحون قادرين على تبني الاستخدام العادي للإشارة.

عندها، إختارت فولكنر أن تطور فهم تلاميذها لإشارة التساوي من خلال نقاش القضايا العددية الصحيحة والخاطئة؛ ويستند هذا النقاش إلى عمل Robert Davis (1964). عرضت فولكنر على تلاميذها عدد من القضايا العددية، تشبه إلى حدّ ما القضايا التالية، وسألتهم ما إذا كانت القضايا العددية صحيحة أو خاطئة.

| | | |
|---|---|---|
| 1) 4 + 5 = 9 | 2) 12 - 5 = 9 | 3) 7 = 3 + 4 |
| 4) 8 + 2 = 10 + 4 | 5) 7 + 4 = 15 - 4 | 6) 8 = 8 |

كان ردّ فعل التلاميذ مثيرًا. فقد وافق الجميع على أن القضية الأولى صحيحة وأن الثانية خاطئة. وكان بإمكانهم إثبات ما قالوه بواسطة عدد من الوسائل. لكنهم كانوا متأكدين على نحو أقل بالنسبة لباقي القضايا.

فولكنر: ماذا بشأن القضية التالية؟ 3 + 4 = 7. هل هي صحيحة أم خاطئة؟ (الكثير من التململ، الوجوه المتوترة، والغمغمة في الصف)

غريتشين: نعم. 3 + 4 يساوي 7.

نِد: لكن القضية خاطئة.

آنّا: إنها معكوسة.

فولكنر: دعونا نجرب هذا.(تقوم بتمثيل المسألة، فتعطي أحد التلاميذ سبعة مكعبات وتطلب منه أن يقف إلى أحد جانبيها. وتعطي تلميذًا آخرًا أربعة مكعبات في إحدى يديه وثلاثة مكعبات في اليد الأخرى. ويقف ذلك التلميذ إلى جانبها الآخر) الآن، هل يحمل هذان التلميذان نفس عدد المكعبات؟

الصف: نعم.

فولكنر: هل هنالك فرق إلى أي جانب يقف التلميذان؟ (تطلب فولكنر من التلميذين تبديل مكانهما، وهما يقومان بذلك.)

الصف: كلا، ولكن ...

كما يمكنكم التخيّل، القضية العدديةالرابعة خلقت اضطرابًا لدى العديد من الأطفال. فقد ظنّ بعضهم أن القضية العديدة هي صحيحة لأن 8 + 2 تساوي 10. كان الأطفال ذوو الفهم الراسخ للتساوي قادرين على التفسير أن هذه القضية العددية هي خاطئة لأن 8 + 2 تساوي 10 و 10 + 4 تساوي 14 والـ 10 لا تساوي الـ 14.

وعندما وصلت فولكنر إلى الجملة الأخيرة، 8 = 8، كان الصف في وضع اضطراب. وتكلمت آنّا نيابة عن التلاميذ عندما قالت " حسنًا، نعم الثمانية تساوي الثمانية، ولكن، لا يجوز لك كتابتها بهذه الطريقة". في الأسابيع القليلة المتبقية من السنة الدراسية، استمرت فولكنر في إعطاء الطلاب المسائل ذات إشارة التساوي في مواقع متنوعة.

# حول الرياضيات

ينبغي على الأطفال أن يفهموا أن التساوي هي علاقة تعبّر عن فكرة أن تعبيرين رياضيين لهما ذات القيمة. من المهم أن يفهم الأطفال هذه الفكرة لسببين. الأول، يحتاج الأطفال إلى هذا الفهم للتفكير في العلاقات التي تعبّر عنها القضايا العددية. مثلاً، القضية العددية 1 + 7 + 7 = 8 + 7 تعبر عن علاقة رياضية مركزية بالنسبة لعلم الحساب. وعندما يقول الطفل" أنا لا أذكر ماذا يساوي 7 زائد 8، لكنني أعرف أن 7 زائد 7 يساوي 14 وعند إضافة 1 يصبح 15،" فأنه يفسّر علاقة هامة جدًا تعبّر عنها قضية عددية. سيكون لدى الأطفال الذين يفهمون التساوي طريقة معينة في عرض مثل هذه الأفكار الحسابية؛ وهكذا، سيكون باستطاعتهم التواصل والتعمق أكثر في هذه الأفكار. الطفل الذي تُتاح له العديد من الفرص للتعبير عن القضايا العددية مثل 1 + 10 – 17 = 9 – 17 والتفكير فيها، قد يكون قادرًا على استخدام نفس المبدأ الرياضي لحل مسائل أكثر صعوبة، مثل 18 - 45 ، عن طريق التعبير عنها بواسطة 45-18=45-20+2. ويُظهر هذا المثال حسنات دمج تعليم الحساب وتدريس الجبر. وعند القيام بذلك، يمكن للمعلمات أن يساعدن الأطفال على زيادة فهمهم للحساب في نفس الوقت الذي يتعلمون فيه مفاهيم الجبر.

السبب الثاني لكون فهم التساوي كعلاقة أمرًا هامًا هو إن عدم وجود مثل هذا الفهم يشكل أحد العوائق الرئيسية التي تواجه التلاميذ عندما ينتقلون من الحساب إلى الجبر (Kieran 1981; Matz 1982). فكّر، على سبيل المثال، في المعادلة 4x+27=87 كيف تبدأ في حل هذه المعادلة؟ ربما ستتضمن خطوتك الأولى طرح الـ 27 من 87. لماذا نقوم بذلك؟ قد نقوم بذلك لأننا نطرح 27 من كلا جانبي المعادلة. إذا كانت إشارة التساوي تعبر عن العلاقة بين تعبيرين، فمن المنطق أنه إذا كانت الكميتان متساويتين، يجب أن تكون الكمية الأولى ناقص 27 تساوي الكمية الثانية ناقص 27. ماذا عن الأطفال الذين يعتقدون أن إشارة التساوي تعني أن عليهم عمل شيء ما؟ ما هي فرصهم بأن يكونوا قادرين على فهم المنطق في أن طرح 27 من كلا جانبي المعادلة يحافظ على علاقة التساوي؟ يمكن لهؤلاء التلاميذ أن يحاولوا تذكر سلسلة من القواعد لحل المعادلات فقط. ولأن مثل هذه القواعد غير مغروسة في الفهم، على الأغلب أن يتذكرها التلاميذ على نحو خاطئ وألا يكون باستطاعتهم تطبيقها بمرونة. ولهذه الأسباب، يجب على الأطفال أن يفهموا أن التساوي هي علاقة وليس إشارة لعمل شيء ما.

## السنة التالية

في فصل الخريف، طرحت فولكنر نفس المسألة، $8 + 4 = \square + 5$، على تلاميذها. وحلّ بعض التلاميذ الذين كانوا في الصف في فصل الربيع السابق المسألة حلاً صحيحًا، ولكن ليس جميعهم. ووضع العديد من تلاميذ الصف الأول الجدد العدد 12 في التربيعة باعتزاز؛ حدّق الآخرون في الجملة العددية بذهول ثم طلبوا المساعدة. وتلى ذلك نقاش يشبه النقاش الذي دار في فصل الربيع السابق. ولكن، هذه المرة فهم بعض الأطفال فكرة التساوي وفسّروا بحماس لماذا يجب وضع العدد 7 في التربيعة. وأعطت ليلي التفسير الأكثر حيوية إذ قالت أن "إشارة التساوي تعني إنه يجب أن يكون هنالك تعادل. يجب أن تكون الكميتان نفسها على طرفي إشارة التساوي. إنها مثل لعبة "السي-سو". يجب أن تكون متعادلة."

كان نقاش الصف هذا واحدًا من عدد من النقاشات حول القضايا العددية المفتوحة. وكان لكل نقاش تلاميذه المرتابين، بالإضافة إلى التلاميذ الذين عادوا وفسروا فكرة أنه يجب على كل طرف من إشارة التساوي أن يحتوي على كمية متساوية. وبينما أصغت فولكنر للنقاشات، ولاحظت من المتكلم، وراقبت تعابير الوجوه، بدا أن التلاميذ قد بدأوا في فهم التساوي لكن لم يكن من السهل فهم هذه الفكرة وبسرعة. وكانت فولكنر مقتنعة أن فكرة التساوي ستستغرق وقتًا حتى يفهمها جميع الأطفال، لذلك عادت إليها على نحو متكرر مع تقدم السنة الدراسية.

قامت فولكنر بدمج النقاش حول التساوي خلال السنة الدراسية بطريقتين. أولاً، واصلت عرض القضايا العددية المفتوحة بحيث قامت بتنويع موقع العدد المجهول. بعض الأمثلة على القضايا العددية هذه هي: $\square = 5 + 9$ ، $7 + 8 = \square + 10$ ، وَ $7 + \square = 6 + 4$ .

وثانيًا، قامت بعرض قضايا عددية صحيحة وخاطئة، مثل التي وردت في الأمثلة ، لتشجيع الأطفال على التفكير في معنى إشارة التساوي. كذلك جعلت الأطفال يكتبون قضايا عددية صحيحة وخاطئة. إن المهام التي استخدمتها فولكنر لبناء فهم الأطفال للتساوي كانت، أيضًا، المهام التي بنت فهمهم للعمليات الحسابية.

مع تقدم السنة الدراسية، بدأ المزيد من الأطفال بفهم التساوي. وفي آذار كان للصف هذا النقاش:

فولكنر: أنظروا إلى القضية العددية التالية: $10 + \square = 9 + 8$. ماذا يجب أن نضع في التربيعة الفارغة؟

كاري: يجب أن نضع 17.

سكيب: ولكن، 9 + 8 تساوي 17, وَ 10 + 17 يساوي 27, وهكذا، ليس من الصحيح أن نضع 17 في التربيعة.

ميرا: هذا صحيح؛ 10 + 17 لا يساوي 17.

نِد: أعتقد أنه يجب أن نضع 7 في التربيعة 10 + 7 يساوي 17 و 9 + 8 يساوي 17. كلا الجانبين متعادلان. (يوافق الصف، بشكل عام، غير أن كاري غير مقتنعة حتى الآن)

فولكنر: فكروا بما نعرفه عن إشارة التساوي. أنظروا إلى هذه القضية العددية:

$\square + 4897 = 4898 + 3$ هل يمكنكم معرفة العدد الذي في التربيعة، حتى بدون إجراء عملية الجمع؟

لاري: أعتقد أنه يجب وضع 4 في التربيعة؛ 4897 أصغر بـ 1 من 4898، لذلك نحتاج إلى إضافة 1 إلى الـ 3.

فولكنر: هل فعل أحد منكم ذلك بطريقة مختلفة؟ (يهزّ الأطفال رؤوسهم. ويوافق الصف، بشكل عام، على أن طريقة هاري تعطي الجواب الصحيح وعلى أنها سهلة.)

وفّرت مثل هذه النقاشات حول القضايا العددية سياقًا هامًا للأطفال لمناقشة التساوي خلال السنة الدراسية. ومع تقدم السنة، أصبحت النقاشات حول التساوي متداخلة بالنقاشات حول المفاهيم الجبرية الحسابية الأخرى. وفي المثال التالي، يناقش الأطفال قضية أكثر إحكامًا وتتضمن فهمًا للمتغيرات وللعمليات، إضافة إلى التساوي.

طلبت فولكنر من الصف النظر إلى القضية $a = b + 2$. وقالت أن القضية صحيحة، ثم سألت الصف أيهما أكبر، $a$ أم $b$ ؟ الأطفال الذين يعتبرون إشارة التساوي بأنها إشارة لفعل شيء ما سيواجهون مشكلة في هذه المسألة. فهم قد يعتقدون أن $b$ هو أكبر بسبب إضافة 2 لـ $b$ وعدم إضافة أي شيء لـ $a$ . وافق الصف، أولاً، على أن $a$ وَ $b$ هما رمزان لمتغيرين، مثلهما مثل المربع (تربيعة) أو المثلث. بعد ذلك، وافق الصف بسرعة على أن $a$ هو الأكبر. ودلّت نقاشاتهم الداعمة لهذا الموقف، بشكل واضح، على فهمهم المحكم لمفهوم التساوي.

فولكنر: لماذا تعتقدون أن a هو الأكبر؟
آنّا: لقد قاموا بفصل b وَ 2 عن بعضهما البعض؛ a يجمعهما معًا.
جيري: أعتقد أن a (هو الأكبر). بالإضافة إلى ذلك، 2 هو جزء من a.
مايا: نعم، يجب أن يكون a أكبر، لأنه مهما كان b + 2 فإنه أكبر من b ، لأنك تجمعهما.
آنّا: حسنًأ؛ في الـ a يوجد الـ 2 + ولا يوجد ذلك في الـ b .
ليلي: يجب أن يكونان معًا نفس الشيء b + 2 يجب أن يكون نفس الشيء مثل a .

## الخلاصة

تشير مثل هذه النقاشات، التي تشمل أعدادًا متزايدة من الأطفال، إلى أنهم تعلموا رؤية إشارة التساوي على أنها رمز يصف علاقة ما بدلاً من رؤيتها كإشارة "قم بذلك". وبسبب كتابة هذا المقال قبل نهاية السنة الدراسية، لم نقم بجمع معطيات تلخيصية حول فهم الأطفال للمسألة 5 + $\square$ = 4 + 8 في هذا الصف. ولكن، في دراسة تجريبية شملت مجموعة من الصفين الأول والثاني في نفس المدينة، وجدنا أن 14 طفلاً من أصل 16 أجابوا إجابة صحيحة إنه يجب وضع العدد 7 في التربيعة.

عندما نفكر في إدخالنا لفكرة التساوي وإشارة التساوي لهذا الصف وللصفوف الأخرى، تتواصل دهشتنا من الإهتمام والإثارة التي يضفيهما الأطفال على النقاش. فليلي تستخدم استعارة "السي-سو" بحماسة طفل مستعد للعب على هذه اللعبة. وسكيب غضب عندما قام أحدهم بملء الفراغ بحيث كانت النتيجة 27 = 17. هذه ليست تعليقات مملة لأطفال يتطلعون للفرصة بين الدروس وإنما مساهمات مثيرة لأطفال يستكشفون عالمًا جديدًا من التفكير والتواصل بطريقة رياضية، وهم يستمتعون بقوة تلك المعرفة. هؤلاء الأطفال يطورون فهمًا للتساوي من خلال تعلمهم عن الأعداد والعمليات الحسابية. وسيتيح لهم هذا الفهم التفكير في التساوي، وسيضع أسسًا راسخة لتعلم الجبر في المستقبل.

## المصادر

Anenz-Ludlow, Adalira, and Catherine Walgamuth. "Third Graders` Interpretations of Equality and the Equal Symbol". Educational Studies in Mathematics 35 (1998); 153-187.

Behr, Merlyn, Stanley Erwanger, and Eugene Nichols. How Children View Equality Sentences. PMDC Technical Report, no.3, Tallahasse, Fla.: Florida State University, 1975. ERIC No. ED 144802.

Davis, Robert B. Discovery in Mathematics: A Text for Teachers. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing co., 1994.

Erlwanger, Stanley, and Maurice Berlanger. "Interpretations of the Equal Sign among Elementary School Children". In: Proceedings of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Montreal: 1983.

Kieran, Carolyn. "Concepts Associated with the Equality Symbol". Educational Studies in Mathematics 12 (August 1981): 317-326.

Matz, Marilyn. "Towards a Process Model for School Algebra Errors". In: Intelligant Tutoring Systems, edited by Derick Sleeman and John Seeley Brown,25-50, New York: Academic Press, 1982.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Principles and Standards for school Mathematics: Discussion Draft, Reston, Va.: NCTM 1998.