

טיפוח הבנה של משתנה עם דגמים

Fostering Understanding of Variable with Patterns

מאת: Jessie C. Store, Kerri D. Richardson, and Tyrette S. Carter

הופיע ב: Teaching Children Mathematics, Vol. 22, No. 7, March

2016

נסו את ארבע האסטרטגיות האלה של דגמים צומחים

להוראת חשיבה אלגברית בבית הספר היסודי.

חישובו על הדרכים שבהן אתם מזמנים לילדים עיסוק ברעיונות אלגבריים. האם הן מסייעות ללומדים לפתח את המושג "משתנה"? מאמר זה מתבסס על מחקר עם שישה מורים בבית ספר יסודי ו-115 תלמידים בכיתות ג', ד' ו-ה', ודן בדרכים בהן מורים יכולים לתמוך בהבנה של המושג "משתנה" כשתלמידים עוסקים בפעילויות חקר של מציאת דגמים. ההמלצות נובעות מראיונות עם מורים ומתצפית על הוראת חשיבה אלגברית לאחר שעות הלימודים בשישה בתי ספר יסודיים במשך שנה אחת.

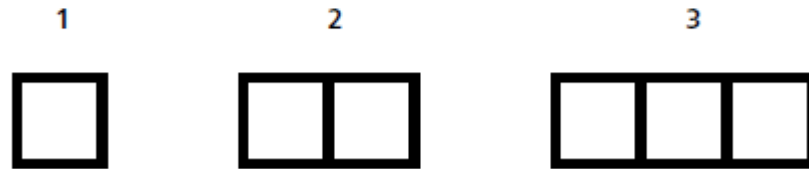
פעילויות של מציאת דגמים

מורים יכולים להציג "מטלות רכבת" בדרכים שונות (ראו איור 1).

אפשר להציג "מטלות רכבת" בדרכים שונות.

(מעובד מתוך Phillips et al. 1991)

אם בכל צד של השולחן הריבועי יושב אדם אחד, כמה אנשים ישבו סביב "רכבת" של שולחן אחד, 2 שולחנות, 3 שולחנות, 10 שולחנות ו-100 שולחנות? מצאו כלל עבור מספר האנשים שיכולים לשבת סביב מספר כלשהו של שולחנות.



לפי גישה אחת תחילה התלמידים מסתכלים על התמונה ובונים את המודלים תוך הרחבת הדגם לשלב 4 בעזרת בנייה בריבועי פלסטיק. לאחר מכן התלמידים אוספים את הנתונים שלהם ומארגנים אותם בטבלאות של קלט-פלט. בהשתמשם במודלים ובטבלאות, תלמידים מגלים דגמים: (א) מספר האנשים גדל בשתיים; (ב) כשמספר השולחנות גדל באחד, מספר האנשים גדל בשתיים; (ג) יש לכפול את מספר השולחנות בשתיים ואז להוסיף שתיים כדי לקבל את מספר האנשים. תלמידים יכולים לייצג כללים אלה בדרכים שונות (ראו **טבלה 1**).

על מנת לאסוף ולארגן נתונים בטבלאות, על התלמידים להבין את הרעיון של קלט ופלט.

כללים המתארים שינוי במספר האנשים	כללים הקשורים למספר השולחנות ולמספר הכסאות או האנשים
<p>כלל א</p> $+2$	<p>כלל ג</p> <p><i>every time you add a table you add 2 more chair</i></p> <p>כל פעם שמוסיפים שולחן מוסיפים עוד 2 כסאות</p>
<p>כלל ב</p> <p><i>you add two more people</i></p> <p>מוסיפים עוד שני אנשים</p>	<p>כלל ד</p> $\times 2 + 2$
	<p>כלל ה</p> $t \times 2 + 2 = p$
	<p>כלל ו</p> <p>הערה: כלל ו הוא שגוי</p> $T + 1 \times 2 = p$

הערת תרגום:

t=tables, כלומר t מציין את מספר השולחנות
p=people, כלומר p מציין את מספר האנשים

תלמידים צפו בדגם אחד או יותר, והאסטרטגיות שלהם השתנו כשהמטלה השתנתה. עם זאת, מטרת מאמר זה היא לדון בארבע דרכים בהן מורים יכולים להשתמש בדגמים צומחים כדי לעזור לתלמידים בבית הספר היסודי להבין את המושג "משתנה".

1. טיפוח הבנה של משתני קלט ופלט

איסוף וארגון נתונים בטבלאות דורש הבנה של הרעיונות של קלט ופלט. המורים במחקר זה השתמשו במכונת מסטיקים (ראו **טבלה 2**) כדי לתמוך בהבנה כזו.

טבלה 2

המורים במחקר זה השתמשו במכונת מסטיקים כדי לעורר עניין בתלמידים. נראה שהרעיון של מכונת מסטיקים עזר למעורבות התלמידים ולהבנתם את המשתלמים של קלט ופלט.

ייצוג של משתני קלט ופלט	פעילות עם מטלות של מציאת דגם								
<p>מכונת מסטיקים.</p>  <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 10px;"> <div style="margin-right: 10px;"> <p>טבלת קלט-פלט למספר השולחנות (t=tables) ולמספר הכיסאות (s=seats)</p> </div> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 10px;">t</td> <td style="padding: 5px 10px;">s</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 10px;">1</td> <td style="padding: 5px 10px;">4</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 10px;">2</td> <td style="padding: 5px 10px;">6</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px 10px;">3</td> <td style="padding: 5px 10px;">8</td> </tr> </table> </div>	t	s	1	4	2	6	3	8	<ul style="list-style-type: none"> • השתמשו במכונת מסטיקים לדיון בשאלה כיצד הפלט תלוי בקלט • זהו מתוך הבעיה את הקלט • זהו את הפלט • ארגנו את הנתונים תוך שימוש בטבלאות של קלט-פלט. • דונו בשאלה: מדוע אפשר (או אי אפשר) להחליף בין הקלט לבין הפלט? לדוגמה, שאלו: מדוע מספר הכיסאות (s) לא יכול להיות משתנה של קלט?
t	s								
1	4								
2	6								
3	8								

המורים ציירו את מכונת המסטיקים על הלוח וביקשו מתלמידים לתאר מה הם צריכים לעשות למכונה כדי לקבל מסטיקים. תלמידים השיבו שמסטיקים לא יוצאים, אלא אם כן מכניסים כסף; וככל שמכניסים יותר כסף, כך מקבלים יותר מסטיקים. דיון זה הוביל למסקנה שהקלט (לדוגמה, רבע דולר) הוא מה שנכנס למכונה, כדי ליצור את הפלט (לדוגמה, מסטיקים). תלמידים דנו גם בשאלה מדוע אין זה הגיוני לכנות את המסטיקים בשם פלט. לאחר שהתלמידים הכירו את הרעיון של משתני קלט ופלט, הם זיהו ושיימו את נתוני הקלט והפלט בסיפורים מתמטיים. לדוגמה, **באיור 1** מספר השולחנות הוא הקלט ומספר האנשים הוא הפלט. המורים אמרו לתלמידים לחשוב על הבחירה שלהם: "האם תוכלו לומר לי מדוע בחרתם בשולחנות כקלט?"

Translated and reprinted with permission from *Teaching Children Mathematics*, copyright © 2016
By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved.
NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

תלמידים אחדים השיבו: "כי זה כמו שמכניסים לזה את השולחן", והמשיכו להסביר: "אי-אפשר שיהיו כיסאות לאנשים אם אין קודם את הריבועים לשולחנות". התלמידים מיצו את הנתונים מהסיפורים המתמטיים וארגנו אותם בטבלאות קלט-פלט. הטיעונים עבור הבחירה של קלט ופלט שיקפו את הדיון אודות מכונת המסטיקים, עדות לכך שמכונת המסטיקים טיפחה את הבנת התלמידים של קלט ופלט. בנוסף, המורים העדיפו להשתמש במכונת מסטיקים כי היא משכה את תשומת ליבם של התלמידים. פעילויות אלה (ראו **טבלה 2** לסיכום) עשויות לתמוך בהבנה של משתני קלט ופלט אצל תלמידי כיתות ה' ו-ו', כפי שמומלץ בסטנדרטים, Common Core content standards (CCSSI, 2010), הדורשים מתלמידים לזהות קשרים בין שני משתנים ולסרטט אותם. מיומנויות כאלה דורשות ידע של משתני קלט ופלט כדי למצוא היגיון בקשרים (Yerushalmy, 1997).

2. טיפוח ההבנה שמשנתה משתנה

החל מכיתה ד', הסטנדרטים להוראת מתמטיקה (CCSSI, 2010) דורשים שתלמידים ייצרו דגמים עם משתנה אחד וידעו לנתח אותם. המורים טיפחו הבנה זו בשתי דרכים. בשעה שהתלמידים עבדו על מטלות של מציאת דגמים עם ייצוגים גאומטריים ובניית מודלים, המורים ביקשו מהתלמידים לשים לב למה שקורה בכל בנייה של הדגם, כאשר הייצוג עובר משלב לשלב. לדוגמה, במטלה שבאיור 1, המורים ביקשו מכיתותיהם להתבונן כיצד מספר האנשים גדל בכל פעם שמוסיפים שולחן לרכבת. המורים גם ביקשו מהתלמידים להתבונן בדגמים הנוצרים כשיורדים בטורים של טבלאות הקלט-פלט. בשני המקרים, התלמידים הסבירו שמספר האנשים **תמיד** גדל ב-2 מערך אחד לבא אחריו (ראו **טבלה 1**, **כללים א ו-ב**).

חוקרים רבים (לדוגמה, Martinez-Planel & Gaisman, 2012) טוענים שאלגברה קשה לתלמידים משום שהפעילויות בבית הספר היסודי מתמקדות בעיקר במציאת נעלם או ערכים ספציפיים. מתן אפשרות לתלמידים להתמקד בשינוי במשתנה אחד מאפשר מעבר יעיל ממציאת נעלמים להתמקדות בכמויות משתנות.

3. זיהוי והבנה של קשרים בין שני משתנים

התייחסות למשתנה כאל כמות משתנה חשובה כשמזהים ומבטאים קשרים בין משתנים. עם זאת, התלמידים במחקר זה התמקדו בדרך כלל בדגמים עם משתנה אחד והתקשו בקישור בין שני משתנים. במקרים כאלה, המורים הסכימו לקבל דגמים במשתנה אחד והשתמשו ברמזים המופיעים בטבלה 3, כדי לעודד תלמידים להמשיך לחפש דגמים שונים.

מורה: איזה דגם ראיתם?

תלמיד: הוספת שתיים.

מורה: אתם מוסיפים שתיים. או קי, אם אתם מסתכלים בצורה כזו [מצביעה על הערכים של מספר האנשים בטבלה 3], אתם יכולים לראות שהם מוסיפים שתיים בכל פעם, נכון?
תלמידים: כן.

מורה: כן. כשאתם מסתכלים על הדגם האנכי, הדבר היחידי כשעשיתם זאת היה? מה מצאתם כשעשיתם בצורה כזו?

תלמיד: צריך ללכת כל הדרך עד 100 (כשרוצים למצוא את מספר האנשים סביב רכבת של 100 שולחנות).

מורה: שזה מה שלפעמים אינכם רוצים לעשות. אז חפשו דגם בין שני מספרים אלה [מתייחסת לערכים מתאימים בטבלה 3]. אתם רואים כיצד 1 קשור ל-4? אז אני רוצה שתתחילו לחפש, לא רק עבור הדגם האנכי, אבל אני רוצה שתחפשו גם דגם במאוזן.

רמזים כמו שאלות אלה יכולים לעודד תלמידים לקשר בין משתנים של קלט ופלט.

טבלה 3

טבלת קלט-פלט עבור המטלה באיור 1		שאלות לעידוד הקישור בין משתני הקלט והפלט
שולחנות	אנשים	
1	4	<ul style="list-style-type: none"> מהו הדגם בטבלת ה-t? מבחינה מתמטית, מה קורה ל-1 כדי שישתנה ל-4? האם זה עובד עבור הקלט של 2 ו-3? מה יהיה הפלט כשהקלט הוא 100? כיצד אתם יודעים שהכלל שלכם יעבוד תמיד?
2	6	
3	8	



מכונת מסטיקים מהווה הקשר בחר לעיסוק התלמידים בחשיבה אלגברית.

בתגובה לרמזים שעודדו את התלמידים לחשוב על הקשר בין מספר השולחנות לבין מספר האנשים, תלמידים אמרו שכל פעם שמוסיפים שולחן אחד, מספר האנשים גדל בשתיים (ראו

Translated and reprinted with permission from *Teaching Children Mathematics*, copyright © 2016 By the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation

טבלה 1, כלל ג. זה מעיד על שימת לב לשינוי בו-זמני (co-variation) של מספר השולחנות ושל מספר האנשים כמשתנים. חשיבה של השתנות בו-זמנית חשובה, משום שהיא מביאה להתמקדות בקצב השינוי של כל משתנה ויכולה להוות שלב מעבר חשוב במציאת קשרים בין ערכים מתאימים של שני משתנים. תלמידים גם קישרו בין מספר השולחנות לבין מספר האנשים על-ידי חיפוש קשר בין שני ערכים מתאימים (לדוגמה, 1 ו-4 או 2 ו-6 מטבלת הקלט-פלט בטבלה 2). מהתמקדות זו, פיתחו תלמידים אחדים כללים כמו הכלל: $s = 2t + 2$, t מייצג את מספר השולחנות ו-s מייצג את מספר האנשים והכיסאות (ראו כללים ד ו-ה בטבלה 1). מורים חייבים להדגיש שהכללים המראים קשר בין משתני הקלט והפלט צריכים להתאים לכל הערכים.

מציאת קשרים בין משתנים נותנת הזדמנות להתחיל להבין את ההבדל בין ביטויים עם נעלמים שבהם כל אות מייצגת מספר אחד ספציפי (לדוגמה, $p = 2 + 3 \times 2$) לבין ביטויים שבהם ערך האות יכול להשתנות (לדוגמה, $p = 2 + 2t$). מורים ותלמידים יכולים להשתמש בערכים שלא נמצאים בטבלאות הקלט-פלט כדי לטפח הבנה של ביטויים אלה. במחקר הנוכחי תלמידים ומורים הציעו למצוא את מספר האנשים המתאים למספר גדול של שולחנות. מורים שאלו שאלות כגון: "כמה אנשים ישבו סביב רכבת של 500 שולחנות?".

הנה דוגמה נוספת מהכיתה:

מורה: או קי, ספרי לנו מה את עושה (הסבירי את החשיבה שלך).

תלמידה: $4 \times 2 + 2 = 10$, $3 \times 2 + 2 = 8$, $2 \times 2 + 2 = 6$, $1 \times 2 + 2 = 4$ ואז $100 \times 2 + 2 = 202$.

מורה: או קי.

תלמידה: 200 זה 402, ומשהו כמו 50,000 יהיה 100,002.

שינוי מספר השולחנות ומציאת מספר האנשים המתאים להם תומכים בהשקפה שמשתנה מייצג כל מספר שהוא שהגייוני בהקשר של השאלה. לדוגמה, מאחר ומספר שולחנות יכול להיות רק מספר שלם חיובי, מספר השולחנות כמשתנה מייצג כל מספר שלם חיובי. יתרה מזאת, מציאת מספר האנשים מאפשר לתלמידים ליישם את הידע שלהם במציאת נעלמים (לדוגמה, כשמשתמשים בכלל $p = 2 + 2t$, כדי למצוא את p כאשר t הוא 50, הביטוי יהיה $p = 2 + 2 \times 50$). המטלה באיור 1 מדגישה את חשיבות ההקשר של הבעיה, כאשר מחפשים היגיון או שופטים את מידת הסבירות של סיטואציות מתמטיות. תלמידים יכולים לדון בשאלה: האם שימוש בשברים הוא הגיוני בהקשר של הבעיה? באופן דומה, תלמידים המפתחים הבנה של מספרים שליליים יכולים לעסוק בדיון על טווח המספרים ההגייוני עבור

הבעיה. מורים גם יכולים לשאול את התלמידים אם הכללים שלהם עובדים כשהקלט הוא אפס או מה יקרה כשמספר השולחנות הוא אפס. הדגשת ההקשר של הבעיה מוסיף לטיפוח ההבנה שמשנתה מייצג כל מספר שהוא הגיוני בתוך ההקשר של הבעיה, ובכך נמנעת הכללת יתר שמשנתה פשוט מייצג כל מספר.

4. עידוד שימוש בשמות המשתנים כאשר מבטאים קשרים בין קבוצות נתונים

לתלמידים הייתה נטייה לא להשתמש בשמות משתנים כשביטאו את הכללים שלהם (ראו **טבלה 1, כלל א וכלל ד**). כדאי למורים לעודד את התלמידים להשתמש בשמות המשתנים כשהם מבטאים את הכללים שלהם והם יכולים לעשות זאת על ידי הצגת שאלות לתלמידים כמו אלה שבשיחה שלהלן.

מורה: מהו הכלל שלך?

תלמידה: כפול שתיים ועוד שתיים [מראה למורה את הכלל שלה על דף הפעילות].

מורה: האם חברייך יוכלו להבין זאת? מה את כופלת?

תלמידה: את מספר השולחנות ואז מוסיפה שתיים.

מורה: מה את מנסה לקבל?

תלמידה: את מספר האנשים שיכולים לשבת סביב השולחן.

מורה: אז בסדר. האם תוכלי לכלול מספיק פרטים, כך שמי שאינו כאן יוכל להבין את הכלל שלך?

שמות המשתנים שבהם השתמשו תלמידים כללו הן אותיות והן מילים. ראו **באיור 2** דוגמאות לשאלות המעודדות שימוש בשמות של משתנים. למרות שחלק מהתלמידים כתבו $2t + 2 = p$, כאשר t מייצג את מספר השולחנות ו- p מייצג את מספר האנשים, אחרים כתבו **מספר האנשים = 2 + מספר השולחנות** $\times 2$. התייחסות למילים של תלמידים, המבטאות את שמות המשתנים, חשובה על מנת להעריך אם תלמידים מפרשים סמלים בביטויים כמשתנים או כשמות של אובייקטים (כלומר, בדיקה האם תלמידים קוראים את $2t$ כמספר השולחנות כפול שתיים או כשני שולחנות). יתרה מזאת, שימוש בשמות משתנים הופך את הכללים לנגישים יותר לעמיתים.

מתן אפשרות למילים של התלמידים לבטא שמות של משתנים מהווה דרך להעריך אם תלמידים מפרשים סמלים בביטויים כמשתנים או כשמות של אובייקטים.

משפטים לעידוד תלמידים להשתמש בשמות משתנים ולהבין אותם

- החליטו כיצד לשיים את המשתנים שלהם.
- השוו בין שמות המשתנים שלכם ודונו בשאלה אם הם מתאימים.
- עבור הכלל "כפול שתיים ועוד שתיים", מה אתם כופלים ומה אתם מנסיים לקבל? (הערה: שנו משפט זה כדי להתאים להקשר ולפעולות הכלולים בכללים שונים).
- תנו יותר פרטים כדי שאחרים יוכלו להשתמש בכלל שלכם מבלי להתבלבל.
- קראו בקול את הכלל שלכם או כתבו מחדש את הכלל שלכם כמשפט.
- כיצד ניתן להשוות בים הערים של הקלט והפלט עבור שמות המשתנים השונים?

אחת התפיסות השגויות שיכולות להיות לתלמידים אודות משתנים היא שאותיות שונות תמיד מייצגות ערכים שונים. הם יכולים לפרש את $p=s$ כשגיאה (Stephens, 2005). שימוש בשמות משתנים יוצר הזדמנויות לתלמידים להבין שאותיות שונות יכולות לייצג אותם ערכים או משתנים. במחקר הנוכחי תלמידים נתנו שמות למשתנים באופן אינדיבידואלי. לדוגמה, תלמידים כתבו s או p כמשתני פלט עבור המטלה באיור 1. במהלך הדיונים בקבוצות, המורה שאלה על הדרכים השונות שבהן תלמידים נתנו שמות למשתנים (ראו טבלה 4). לאחר השיתוף בשמות שונים למשתנים, התקיים דיון על איך העובדה שלמרות שיש שמות שונים למשתנה הנתונים אינם משתנים. בפעילות זו התלמידים נחשפו לרעיון שלאותם משתנים יכולים להיות שמות שונים, ולכן s יכול להיות שווה ל- p . פעילות זו גם עזרה לתלמידים להבין את החשיבה של עמיתיהם.

דיון על חשיבת התלמידים אודות $2t + 2 = p$ ושיתוף של שמות שונים למשתנים חשפו את התלמידים לרעיון שלאותם משתנים יכולים להיות שמות שונים.

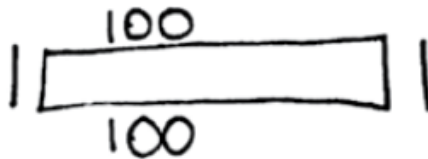
Student reasoning about $2t + 2 = p$

מאין באים
ה- $2t$
וה- $+2$?

The $2t$ comes from the top and the bottom of the table. The 2 comes from the sides of the table.

ה- $2t$ בא מהחלק העליון והתחתון של השולחן. ה- 2 בא מהצדדים של השולחן.

כמה אנשים יכולים לשבת סביב רכבת של 100 שולחנות ריבועיים?



Rule- ^{there are} One hundred people on each sides of the one hundred tables and 2 extra people to go on each end of the ~~one~~ hundred tables, there for there are two hundred and two people at one hundred square tables. □

כלל - מאה אנשים בכל צד של מאה שולחנות ו-2 אנשים נוספים שאינם בכל קצה של מאה שולחנות ולכן יש מאתיים ושניים אנשים במאה שולחנות ריבועיים.

דיון ומסקנות

תלמידים יכולים ללמוד בצורה משמעותית את המושג "משתנה" תוך קישורו לרעיונות אחרים. הרעיונות של התלמידים נותנים הזדמנויות עשירות לקישורים מתמטיים. לדוגמה, תלמידים אחדים הסבירו שעל מנת למצוא את מספר האנשים, אפשר להוסיף אחד למספר השולחנות ואחר-כך לכפול את התשובה בשניים, אבל הם כתבו את הכלל הזה כך: $T + 1 \times 2 = P$ (ראו טבלה 1, כלל ו). על-פי סדר הפעולות, ביטוי מילולי זה תורגם בצורה שגויה לכלל הכתוב בשפת המתמטיקה. זה נתן הזדמנות – הזדמנות שהוחמצה במחקר שלנו – להצגת השימוש בסוגריים כדי להראות את סדר הפעולות ולעודד תלמידים לכתוב את הכללים שלהם בצורה נכונה כך: $2(T + 1) = P$ או כך: $2(T + 1) = P$, תלוי ברמת המוכנות של התלמידים.

טיפוח ההבנה של משתנה דורשת יצירת קשרים בין הכללים שהתלמידים יוצרים וההקשר של הבעיה. במחקר הנוכחי, נתבקשו התלמידים להסביר כיצד ה- $2t$ וה- $+2$ מהביטוי $2t + 2 = p$ קשורים לבעיה. כפי שהסבירו מספר תלמידים, המקדם של t מייצג את מספר

האנשים שכל שולחן "תורם" לרכבת, וה-2+ מייצג את מספר האנשים הכולל משני צדי הרכבת (ראו טבלה 4).

המטלה הנדונה כאן יכולה להתאים לתלמידים בבית ספר יסודי. היא תומכת בהבנה של היבטים שונים של משתנה, ובכך מונעת תפיסות שגויות של תלמידים המופיעות בדרך כלל בכיתות גבוהות יותר, ומאפשרת הבנה גמישה המהווה את הליבה של החשיבה האלגברית (Ursini & Trigueros, 2001). חשיבה אלגברית נובעת מהזדמנויות למידה שתלויות גם בתשומת ליבם של המורים לחשיבת התלמידים ומהדרך בה הדיונים הכיתתיים מתנהלים. לפיכך, הפעילויות בהן דנים במאמר זה עובדות יחד עם פעילויות מומלצות אחרות. דרכים נוספות בהן תלמידי בית ספר יסודי יכולים לחקור משתנים כוללות את מערך השיעור של Klein (2015) באתר של NCTM, המתאר פעילות שבה תלמידים מתאימים מספרים לאותיות האלף-בית בדרכים שונות ומחשבים את ערך השמות שלהם.

Common Core State Standards Initiative (CCSSI). 2010. *Common Core State Standards for Mathematics* (CCSSM). Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards.pdf

Klein, Rosemary. 2015. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Lessons and Resources, Grade 4*. "Lesson on Variables." http://old.nctm.org/resources/content.aspx?menu_id=598&id=12152

Martinez-Planell, Rafael, and Maria Trigueros Gaisman. 2012. "Students' Understanding of the General Notion of a Function of Two Variables." *Educational Studies in Mathematics* 81 (3): 365–84.

Phillips, Elizabeth Difanis, Theodore Gardella, Constance Kelly, and Jacqueline Stewart. 1991. *Patterns and Functions: Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics Addenda Series, Grades 5–8*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Stephens, Ana C. 2005. "Developing Students Understanding of Variable." *Mathematics Teaching in the Middle School* 11 (September): 96–100.

Ursini, Sonia, and Maria Trigueros. 2001. "A Model for the Uses of Variable in Elementary Algebra." Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME25, Vol. 4, edited by Marja van den Heuvel-Panhuizen, pp. 327–34. Freudenthal Institute. Utrecht, The Netherlands.

Yerushalmy, Michal. 1997. "Designing Representations: Reasoning about Functions of Two Variables." *Journal for Research in Mathematics Education* 28 (July): 431–66.



Jessie C. Store, storejc@alma.edu, an assistant professor of education at Alma College in Alma, Michigan, is interested in students' mathematical thinking and how to support it. Kerri D. Richardson, kerri_richardson@uncg.edu, an associate professor of mathematics education at the University of North Carolina at Greensboro, is interested in how teachers use representations to improve students' understanding of mathematical content. Tyrette S. Carter, tscarte1@ncat.edu, teaches mathematics elementary education courses at North Carolina Agricultural and Technical State University in Greensboro. She is interested in geometric and algebraic thinking and enjoys preparing preservice and in-service teachers to think critically about the mathematics they teach.