חישובים בעל-פה וחוש למספרים

Mental Computation and Number Sense

נכתב ע"י: Judith T. Sowder

הופיע ב: Arithmetic Teacher, Vol. 37, No. 7, March 1990 , pp.18-20

תרגום: ברכה סגליס

בקשו מתלמידים בכתתכם למצוא כמה הם 16 x 25 מבלי להשתמש בניר ועפרון. רובם יאמרו בודאי: "צריך לשים את ה- 16 מתחת ל- 25 ולעשות קו. 6 כפול 5 הם 30. צריך לשים את ה- 0 מתחת ל- 6 ואת ה- 3 מעל ה- 2... " וכך ימשיכו באותו אופן עד שיגיעו לתשובה (שקרוב לודאי תהיה שגויה), או שירגישו אבודים מכיון שיתקשו לזכור איפה כל מספר נמצא. לעיתים נדירות ימצא תלמיד שיאמר משהוא כמו: "4 כפול 4 כפול 25. זה כמו 4 כפול 100. זה יוצא 400". למי מן התלמידים יש לדעתכם הבנה טובה יותר של מספרים?

השגת מיומנות של חישוב בעל-פה באמצעות רפלקציה על המשמעות של המספרים שיש לחשב, הינה אחת מהדרכים הטובות ביותר לפתח חוש למספרים.

נשאלת השאלה: מהו חישוב בעל-פה, כיצד ומתי יש ללמד זאת? הבה נבחון מקרוב שאלה זו.

חישוב בעל-פה מתיחס לביצוע החישוב "בראש שלך". בדרך כלל אין לפותר גישה לנייר ועפרון. יחד עם זאת לעיתים החישוב בעל-פה משולב בחישוב בניר ועפרון או אפילו בחישוב במחשבון.

למשל: אם צריך לחבר 350, 785, 256 ו- 150 ויש בנמצא ניר ועפרון או מחשבון, יתכן שהפותר יעדיף לחשב בראש את 150+350 לפני שהוא מתחיל לרשום את המספרים על הדף או במחשבון.

למרות שבדרך כלל לא נעשה תעוד בכתב של תהליך החישוב שבעל-פה, הרי שהמספרים שיש לחשב הם על פי רוב גלויים בזמן התהליך. זה גם המצב בחיי היום-יום, ולכן מן הראוי שכך יהיה גם בכתה. יש סיבה נוספת לכך שכדאי שהמספרים יהיו גלויים במשך כל זמן תהליך החישוב בעל-פה. פתרון בעיה באופן מנטלי מצריך לעיתים קרובות מרחב זכרון די גדול. פסיכולוגים טוענים (ראה Sowder, 1989) שמרחב הזכרון לטווח קצר מוגבל למדי, הן אצל ילדים והן אצל מבוגרים. המשמעות של עובדה זו היא שאם רוצים לשמור בתוך גבולות סבירים את מספר הדברים שצריך לזכור, אז כדאי להראות באופן גלוי את המספרים שצריך לחשב, במקום לדרוש שגם הם יאוחסנו בזכרון לטווח קצר.

יש לאפשר לתלמידים לעשות חישובים בעל-פה עוד לפני שהם שולטים בחישובים באמצעות אלגוריתמים פורמליים. אם דוחים זאת עד אז, אזי מעודדים בכך את התלמידים לעשות בראש את אותם אלגוריתמים שבעצם נועדו רק לחישוב באמצעות ניר ועפרון. הרבה יותר מהיר למצוא כמה הם 28 + 34 על ידי חשיבה ש: "34 ועוד 20 הם 54, ועוד 8 הם 62" במקום לחשב: "4 ועוד 8 הם 12. רושמים 2 וזוכרים 1. 3 ועוד 2 הם 5 ועוד 1 הם 6. אז זה 62". או למשל השוו מציאת 28 x 7 באמצעות החשיבה ש: "7 פעמים 20 הם 140, ו- 7 פעמים 8 הם 56. ביחד זה 196", לעומת החשיבה ש: 7 פעמים 8 הם 56. רושמים 6 וזוכרים 5, 7 פעמים 2 הם 14, מוסיפים את ה- 5, אז זה יוצא 19 שצריך לרשום ליד ה- 6 וזה יוצא 196". לא רק ששיטת החישוב הראשונה קלה יותר למעקב בכל שלב, היא גם יישום ישיר של תכונות המספר - תכונת הקיבוץ בדוגמא הראשונה ותכונת הפילוג בדוגמא השניה ביחד עם פרוק המספר למרכיביו העשרוניים.

1

Translated and reprinted with permission from *Arithmetic Teacher*, copyright © 1990 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation.

למרות שברור שאיננו חושבים בעל-פה על המרכיבים והסימנים הקשורים למספרים שאנו מחשבים בראש, כדאי אולי, מדי פעם, להעלות על הכתב את הצעדים של התהליך שעשה התלמיד ולבקש ממנו ומתלמידים אחרים לשוחח על התכונות שבהם השתמשו.

מומחיות בחישובים בעל-פה מושגת רק כאשר משתמשים בפרוצדורות השונות מאלו שנלמדו. אך אין צורך להבהל! הצהרה זו אינה מכוונת לכך שצריך ללמד סדרה שלמה חדשה של פרוצדורות לחישוב.

להיפך, פרוצדורות חדשות אלו מתפתחות כמעט באופן ספונטני אם וכאשר מעודדים תלמידים להשתמש במה שהם יודעים על מתמטיקה. ומאחר שאין שני תלמידים שיודעים בדיוק אותו דבר, הם קרוב לודאי ימציאו פרוצדורות שונות לאותה בעיה. למשל: 28 x 7 ניתן לחשב כך שקודם עושים 25 x 7 , ואח"כ 3 x 7 , ואח"כ חיבור של 175 עם 21 ; או שניתן לעשות 30 x 7 ולהחסיר מן התוצאה פעמיים 7, תוך כדי אמירה 210, 203, 196 ; או שאפשר לחשוב על 28 כ 7 x 4 , כך שהבעיה הופכת להיות 7 x 7 x 4 או 49 x 4. בחירת הפרוצדורה יכולה להיות גם תלויה בהקשר של הבעיה. למשל: אם הבעיה היתה למצוא כמה כסף צריך על מנת לקנות 7 פריטים שעולים 28 סנט כל אחד, זה יהיה טבעי להשתמש בפרוצדורה הראשונה, משום שהתלמיד יכול לחשוב על כך שכל פריט עולה מטבע של רבע דולר (Quarter) ועוד 3 סנט. לעומת זאת, אם הבעיה היא למצוא כמה אנשים היו בשבעה אוטובוסים מלאים, שבכל אוטובוס יש 28 מושבים, התלמידים יכולים לחשוב על 7 שורות של מושבים, שבכל שורה 4 מושבים, לכל אוטובוס, ולכן הפרוצדורה 7 x 7 x 4 יכולה להיות המתאימה.

תהליך זה המאפשר לתלמידים "להמציא" פרוצדורות גורם לפיתוח הבנה טובה יותר של מערכת המספרים, במקום ללמד כללים מסוימים לפתרון סוגים מסוימים של תרגילים, וגם מוביל לעשיית פחות טעויות, משום שפרוצדורה שהינה "בבעלות" התלמיד לא תופעל על ידו בצורה מכנית.

יצירת אקלים כיתתי שבו תלמידים יכולים ורוצים להמציא פרוצדורות משלהם קלה יותר למורה בעלת הבנה טובה של מגוון הפרוצדורות שבהן ניתן להעזר על מנת לפתור בעיה. נושא זה יורחב בקטע הבא.

טיבן של פרוצדורות מנטליות מומצאות

טיבן של פרוצדורות מנטליות מומצאות מתואר ומנותח אצל פלנקט (Plunkett, 1979). הוא קורא לפרוצדורות אלו "אלגוריתמים מנטליים" על מנת להשוותן לאלגוריתמים של נייר ועפרון.

הנתוח שלו ראוי לתשומת לב, במיוחד לאור העובדה שכיום מעודדים עשיית חישובים בעל-פה, הן ככושר חשוב בפני עצמו בתוכנית הלימודים (NCTM 1989) והן כדרך להגברת החוש למספרים (Sowder and Wheeler 1989). פלנקט מתאר אלגוריתמים מנטליים כפרוצדורות הכוללות את המרכיבים הבאים:

1. "הם ***משתנים*** כל הזמן"

ראינו כבר דוגמא לשונות זו כאשר התייחסנו לארבעה מתוך המספר הרב של אלגוריתמים שבהם ניתן לפתור את התרגיל 28 x 7 . פלנקט מציין גם שאלגוריתמים רבים הם בני חלוף, במובן שהם מומצאים באותו רגע עבור בעיה מסוימת ולא בהכרח נשמרים בזכרון לצורך פתרון בעיות בעתיד.

Translated and reprinted with permission from *Arithmetic Teacher*, copyright © 1990 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation.

2. "הם **גמישים** וניתן להתאימם למספרים שבהם עוסקים"

פלנקט מבקש מאיתנו לשקול האם היינו משתמשים באותו אלגוריתם לחישוב התרגילים הבאים: 79 - 83, 51 - 83, 7 - 83. בכל דרך שבה נענה על שאלה זו, ברור שלא נוכל למצוא אלגוריתם אחד שיאפשר לפתור את כל שלושת תרגילי החיסור בקלות וביעילות. 79 - 83 ניתן לפתור ביעילות באמצעות ספירה לאחור של אחדות מ- 83 עד 79, או שניתן להבחין בהפרש קטן כזה באופן מיידי. את התרגיל 51 - 83 ניתן גם כן לפתור ביעילות על ידי ספירה לאחור, אבל לא באחדות! יתכן שנספור לאחור בעשרות,53, 63, 73 ולאחר מכן בדילוג של 2 עד שנגיע ל 51, ולכן התשובה היא 32. אבל את התרגיל 7 - 83 לא ניתן לפתור ביעילות באמצעות ספירה לאחור בעשרות או באחדות עד שנגיע ל 7. במקום זה נעדיף לחשוב על 4 - 3 - 83 או 3 + 10 - 83.

3. "הם שיטות **פעילות** במובן שהמשתמש עושה בכל פעם החלטה של בחירת השיטה מתוך מודעות ויש לו שליטה על החישובים שהוא עושה"

לתלמיד יש *בעלות* על השיטה שהמציא לצורך פתרון הבעיה העכשוית. במקום שנלמד את התלמידים שיטות ספציפיות, נעשה להם שרות טוב יותר אם נלמד אותם להיות פתוחים לחפש דרכים שונות להתמודדות עם בעיה ולעשות רפלקציה על הדרכים השונות הללו ביחס לקלות וליעילות שלהן. רפלקציה כזו תוביל אותם לעשות בחירות טובות יותר בבעיות בעתיד.

4. "הם בדרך כלל **הוליסטים**, במובן שהם עובדים עם מספרים שלמים ולא עם ספרות של אחדות, עשרות וכו' בנפרד. למשל: 4 x 35 = 2 x 70 = <u>140</u>,

4 x 28 ⟶ 4 x 30 = 120, - 8, <u>112</u>"

האלגוריתמים הכתובים המקובלים עובדים עם ספרות ולא עם מספרים שלמים. כאשר מלמדים תלמידים למצוא כמה הם 3 x 789, אומרים להם למצוא קודם כמה הם 3 x 9, אח"כ 3 x 8, ואח"כ 3 x 7. סביר יותר שתלמיד שישתמש באלגוריתם בעל-פה מתאים, יחשוב על 789 כמספר המורכב מחלקים ולא מספרות, למשל, 9 + 80 + 700, או 11 - 800 ויפעיל עליו את חוק הפילוג בכפל של 3.

5. הם לעיתים קרובות **מובנים** (Constructive), הם מתחילים מצד אחד של השאלה ומתקדמים לכוון התשובה. למשל: 37 + 28 ⟶ 37, 47, 57, 67, <u>65</u>"

ניתן גם "ללכת" ממספר אחד לשני ולבנות את התשובה תוך כדי התהליך. לדוגמא: 89 - 324. ניתן להתחיל מ 89 ולעלות עד 324, ולהתקרב להפרש ככל שמתקדמים: 89 ועוד 11, ועוד 200 (כעת אנחנו ב 211), ועוד 24 (אז זה סה"כ 235). שימו לב שבתהליך זה משתמשים במספרים שלמים ולא רק בספרות שמהן מורכבים המספרים. תלמיד שמשתמש באלגוריתם הכתוב המקובל היה קודם מוצא כמה הם 9 - 14, אח"כ 8 - 11, קרוב לודאי מבלי לחשוב על כך ש 9 - 14 עוסק באחדות ואילו 8 - 11 עוסק בעשרות.

6. "נדרשת בהם **הבנה** לאורך כל הדרך"

תלמיד המבצע חישוב בעל-פה באמצעות בחירת השיטה המתאימה לבעיה ושמוש בתכונות של המספרים והפעולות בצורה נכונה, מפגין הבנה הן למספרים (חוש למספרים) והן לפעולות על מספרים. מאידך, ככל שתלמידים חוקרים ומגלים שיטות חדשות, כך גדלה הבנתם למספרים ולפעולות על מספרים.

7. "לעיתים קרובות הם מספקים **קרוב ראשוני** (early approximation) של התשובה המדויקת.

זה קורה משום שבדרך כלל הספרה השמאלית ביותר מחושבת תחילה, אבל בתוך קונטקסט של מספרים שלמים. למשל: 145 + 37 ⟶ 175, <u>182</u>. 34 x 4 ⟶ 120, <u>136</u>."

3
Translated and reprinted with permission from *Arithmetic Teacher*, copyright © 1990 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation.

מאפיין אחרון זה של האלגוריתמים המנטליים מוביל אותנו לחשוב על התפקיד של התאמנות בחישובים בעל-פה בפיתוח הכושר לעשיית אומדנים לחישובים. לעיתים קרובות, כאשר צריך לעשות אומדן לחישוב, מחפשים קודם את הקרוב למספרים המקוריים ורק אח״כ עושים חישוב בעל-פה. ברור, אם כך, שלא ניתן לעשות אומדנים חישוביים ללא הכושר לעשות חישובים מנטליים, ומציאת קרוב ראשוני תמיד עוזר .

למשל: אם רוצים לאמוד 529 x 8 , ניתן לעגל את 529 ל 530, ואז לחשב בראש 530 x 8 . הצעד הראשון בחישוב זה יהיה קרוב לודאי, מציאת

500 x 8 שהם 4000, ואח״כ הוספת 30 x 8 שהם 240. במקרה זה 4000 הוא קרוב ראשוני של התוצאה.

מסקנות

אנו נכנסים לתקופה שבה הרבה ממה שמקובל היה ללמד בתחום המתמטיקה לכתות היסוד ניתן לבצע באמצעות מחשבון לא יקר. כיום עוסקים בקבלת החלטות לגבי מה שעדיין הכרחי ללמד ומה לא. אחד הנושאים שהמחשבון אינו יכול להחליף הוא התפתחות ההבנה על מהות המספרים. למעשה, הבנה כזאת הינה מרכיב בסיסי להתמחות בשימוש במחשבון. בעבר, לא כל כך הצלחנו לפתח כראוי את המושגים הקשורים למספר . יתכן שזה נובע מכך שמרבית המתמטיקה שנלמדה בכתות היסוד עד היום, ניתנת ללימוד בשיטה של שינון פרוצדורות, או משום שהמורים מרגישים שהם צריכים להספיק הרבה חומר ולכן אין להם זמן לעצור ולעבוד על הבנה. הגברת הדגש על חישובים בעל-פה במספרים שלמים יועיל מאוד לפיתוח החוש למספרים הנחוץ להבנת החשבון, לעשיית אומדן, לפעילות עם הטכנולוגיה, ובאופן כללי, לתפקוד טוב יותר כאשר עוסקים במספרים בחיי היום יום.

ביבליוגרפיה

National Council of Teachers of Mathematics. Commission on Standards for School Mathematics. Curriculum and Evaluation Standards for school Mathematics. Reston. Va The Council, 1989.

Plunkett, Stuart, “Decomposition and All That Rot.” Mathematics in School 8 (May 1979): 2-5.

Sowder, Judith T. “Research into Practice: Developing Understanding of Computational Estimation.” Arithmetic Teacher 36 (January 1989): 25-27

Sowder, Judith T., and Margariete M. Wheeler. “The Development of Concepts and Strategies Used in Computational Estimation.” Journal for Research in Mathematics Education 20 (March 1989):130-146.

Translated and reprinted with permission from *Arithmetic Teacher*, copyright © 1990 by the National Council of Teachers of Mathematics, Inc. www.nctm.org. All rights reserved. NCTM is not responsible for the accuracy or quality of the translation.