

# השלכות ממחקר על הבנות של ילדים בגיאומטריה

## Implications of Research on Children's Understanding of Geometry

מאת: Thomas B. Fox

הופיע ב: Teaching Children Mathematics, Vol. 6, No. 9, May 2000, pp. 572-576

תרגום: ברכה סגליס

בקורס "מתודיקה בהתמחות מתמטיקה" לפרחי הוראה אני נוהג לבקש מהסטודנטים שלי להעריך את רמת החשיבה הגיאומטרית (Geometric Reasoning) של קבוצת תלמידים מבית הספר היסודי. על מנת לעשות זאת הם נותנים לתלמידים משימות המתמקדות בהערכה ובהרחבת ההבנה הגיאומטרית שלהם. משימות פתוחות אלו, ביחד עם מסגרת עבודה שפותחה בעקבות ממצאי מחקר שעסק בחשיבה הגיאומטרית של ילדים, מתוארות במאמר זה. אספקט חשוב של משימות אלו הוא העובדה שהן מתמקדות בדרך שבה התלמידים מבטאים את החשיבה שלהם. מידע זה מסייע לסטודנטים שלי בתכנון שיעורי הגיאומטריה שהם מעבירים לתלמידים אלו בהמשך לאותן משימות. מחקר שבדק חשיבה גיאומטרית הראה שההתאמה בין רמת ההבנה של התלמידים ורמת משימות ההוראה שהם מקבלים הינה חיונית, אם רוצים שתתרחש למידה משמעותית (Crowley 1987).

### מחקרים על חשיבה גיאומטרית שנערכו לאחרונה

רבים מן המחקרים שנערכו לאחרונה בנושא חשיבה גיאומטרית מתמקדים במודל של ואן-הילה (Crowley 1987). לרר ועמיתים (1994) הרחיבו את בסיס הידע של המודל, כחלק מתוכנית מחקר מתמשכת בהוראה מודרכת קוגניטיבית בגיאומטריה (CGI), על ידי עידון והרחבה של הרמות הראשונות בחשיבה גיאומטרית המופיעות לרוב אצל תלמידי בית הספר היסודי, שהן: ויזואליזציה, אנליזה ודדקוציה בלתי פורמלית. הסטודנטים שלי בדקו את תוצאות המשימות שנתנו תוך שימוש במסגרת העבודה הזאת.

### חשיבה גיאומטרית המתבססת על דמיון

הרמה הראשונה שבה תלמידים חושבים על צורה הינה **דמיון** (Resemblance). ברמה זו מסווגים התלמידים את החפצים על בסיס הדמיון שלהם לצורות אחרות כשהם מסתמכים לעיתים קרובות על מאפיינים בלתי רלבנטיים של החפץ. הדמיון יכול להיות **ישיר** או **עקיף**. כאשר הם משתמשים בדמיון ישיר, תלמידים עשויים לסווג מרובע קעור כ-משולש, מכיוון שהוא דומה למשולש "שנדחף פנימה".



הם מסוגלים גם להסתמך על צורות סטריאוטיפיות, כפי שהן מופיעות בדרך כלל בספרי הלימוד. למשל מלבן "צר" לא יסווג כמלבן מכיוון שהוא "צר מדי" יחסית למלבן הטיפוסי דמוי הדלת שהתלמיד

מכיר. כשהתלמידים משתמשים בדמיון עקיף, הם יכולים לשנות בדמיונם את הצורה המוצגת לפנייהם על מנת שתהיה דומה לצורה המוכרת להם (Lehrer et al. 1994). למשל, מרובע קעור יכול להיחשב כמשולש אם התלמיד "מושך לאחור" בדמיונו את שתי הצלעות עד שהוא נראה כמו משולש.

### חשיבה גיאומטרית על פי מאפיינים (Attributes)

כאשר החשיבה של התלמידים מתפתחת, הם מתחילים להתייחס לתכונות המיוחדות של הצורה ולחלקיה, אם כי יתכן שישתמשו בשפה לא פורמלית לתאר זאת. עם זאת, התלמידים אינם מבינים את היחסים שבין התכונות הללו. למשל, תלמידים שאינם מבינים את הקשר שבין הזוויות ומספר הצלעות של צורה נתונה, צריכים לספור את מספר הזוויות של הצורה למרות שהם יודעים את מספר הצלעות שלה. תלמידים שמבינים קשרים מסוג כזה, חושבים ברמות גבוהות יותר (Lehrer et al. 1994). ברמה זו התלמידים מבינים שהמרובע הקעור אינו משולש אלא מרובע מפני שיש לו ארבע צלעות.

### חשיבה גיאומטרית על פי תכונות (Properties)

ברמה הבאה של חשיבה, מנתחים התלמידים את הצורה במונחי התכונות שלה ורואים קשרים בין תכונות אלו. למשל, תלמידים ברמה זו יודעים שריבוע הוא גם מקבילית משום שהוא מרובע עם שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות. הם גם מבינים ששינוי תכונה "מהותית" ("critical") של צורה נתונה, כמו אורך אחת הצלעות, משנה את הסיווג של הצורה ואילו שינוי של "מאפיין לא מהותי" ("noncritical attribute"), כמו הגודל של הצורה, לא משפיע (Lehrer et al. 1994).

## משימות הערכה

פרחי ההוראה שלי מעריכים את רמת החשיבה הגיאומטרית של תלמידיהם באמצעות המשימות הבאות. ביקשתי מפרחי ההוראה להתמקד במיוחד בשאלות מפתחות, המעודדות תלמידים להסביר את החשיבה שלהם. לחלק מן המשימות צרפתי דוגמאות מהחשיבה של תלמידיהם. חשיבה זו נותחה תוך שימוש במסגרת העבודה שתוארה במאמר זה, ובהתאם לכך מוצעות משימות המשך, המבוססות על חשיבה זו.

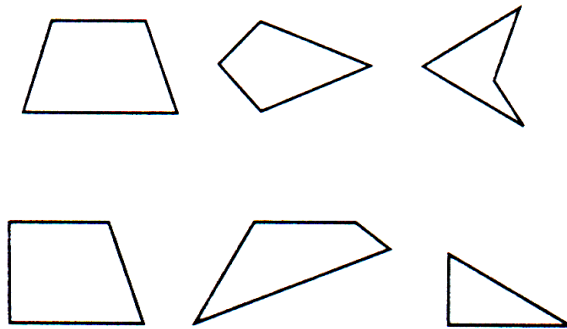
משימות אלו הן משימות פתוחות וניתנות להעברה בקבוצות קטנות או במסגרת של כיתה שלמה. יש לבקש מן התלמידים לתעד בכתב את חשיבתם כדי לסייע להם לקדם אותה וכן על מנת לעזור למורה שלהם לבצע את ההערכה.

### משימה א': השוואת מצולעים


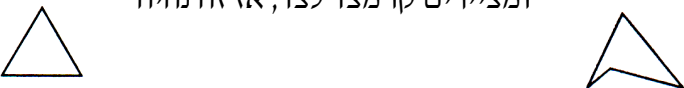
**תאור המשימה:** התלמידים מקבלים איור של שלושה מצולעים ובודקים במה הם שווים ובמה הם שונים זה מזה (מעובד מ Lehrer et al. 1993).



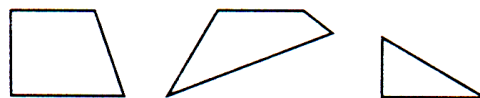
כמו כן הם מתבקשים לציין או לכתוב איזה שתי צורות הכי דומות זו לזו ומדוע. משימה זו עוזרת לקבוע האם התלמיד מתמקד במראה החיצוני של הצורה או בחלקים ובמאפיינים שלה. לרר ועמיתים (1993) מציעים גם להגיש משימה זו עם השלשות הבאות:



### דוגמאות מחשיבת תלמידים:

כאשר התבקשו להשוות את הצורות הבאות, ולתאר דברים דומים ודברים שונים ביחס אליהן, חשב אחד התלמידים בכיתה ב' ששתי הצורות הכי דומות הן המרובע הקעור והמשולש, והסביר ש"אם לוקחים את ה" ומציירים קו מצד לצד, אז זה נהיה"  " 

חשיבה כזו מאפיינת דמיון עקיף. תלמידים אחרים חשבו אף הם ששתי הצורות האחרונות היו הכי דומות. עם זאת, חשיבתם היתה מאופיינת בדמיון ישיר לצורות גיאומטריות ידועות: "שניהם משולשים". עבור תלמידים אלו, משימות המשך מתאימות יכללו את הפעילות של מיון מצולעים, שתתואר בהמשך המאמר. פעילות זו, במיוחד אם היא נערכת במסגרת של קבוצה, יכולה לעודד תלמידים להתמקד במאפיינים של הצורה, ובכך להביאם לרמת החשיבה הגיאומטרית הבאה. כאשר תלמידים נתבקשו לבדוק שלשה אחרת של מצולעים,

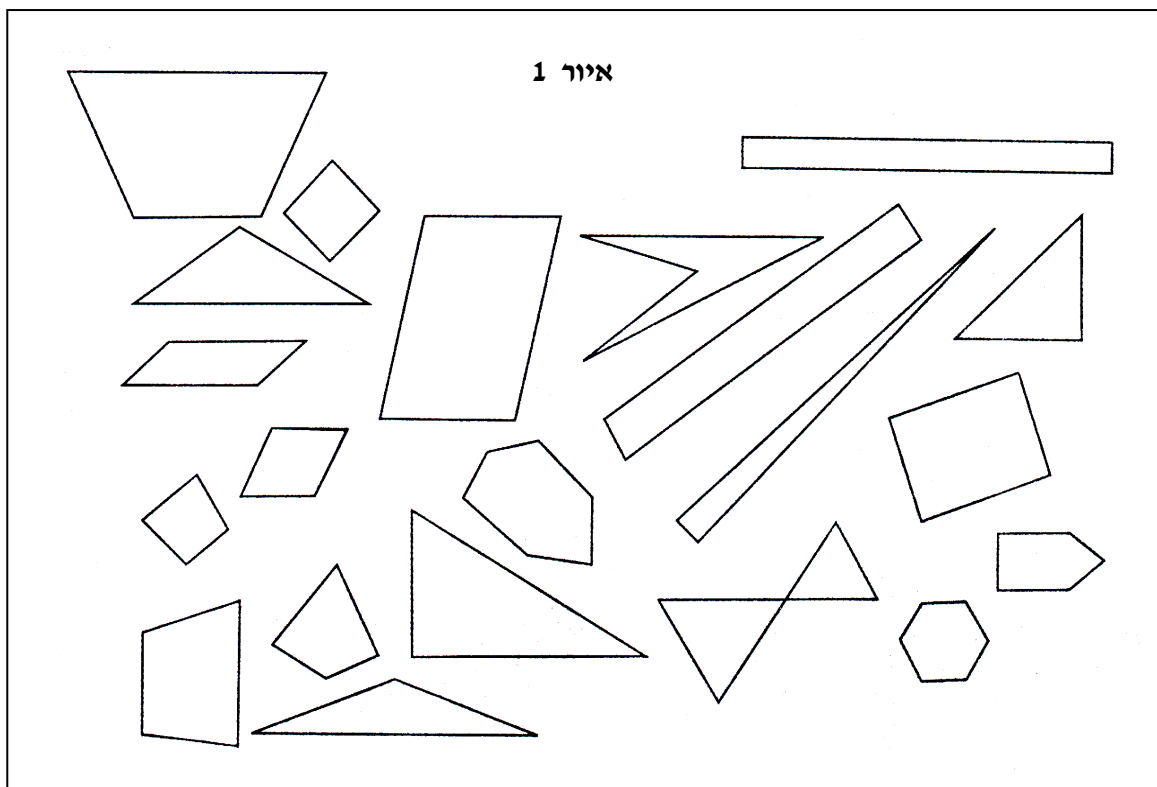


זוג תלמידי כיתה ד' בדקו את מאפייני הצורות. הם זיהו שלשתי הצורות הראשונות משמאל יש ארבע צלעות, וזה מעיד על כך שתלמידים אלו השתמשו במאפייני הצורות כסימן המבחין הראשון. כמה תלמידים נוספים חשבו באותו האופן. עבור תלמידים אלו, מתאימות במיוחד משימות שעוזרות להם להתמקד באופן מפורש יותר בחלקים של המצולעים ובתכונותיהם. משימה כזו הינה המשימה של שמות ותכונות שתתואר בהמשך המאמר.

## משימה ב': מיון מצולעים

**תאור המשימה:** התלמידים מתבקשים למיין אוסף של צורות גזורות מקרטון או מנייר בדרך משמעותית כלשהי ולנמק את הדרך שבה מיינו (Fuys, Geddes, and Tischler 1998). אם התלמידים אינם בטוחים כיצד להמשיך במיון, יש לשאול אותם במה שונות הצורות זו מזו ובהתאם לכך למיין אותן. משימה זו יכולה לסייע לגלות האם חשיבת התלמידים כרוכה במראה של הצורה, במאפייניה או בתכונותיה.

על מנת לקבוע בצורה הטובה ביותר מה רמת החשיבה הגיאומטרית של התלמיד ביחס לתת הקבוצות השונות של מצולע כלשהו, יש לכלול במשימה זו דוגמאות מכל תת הקבוצות. למשל, יש לכלול צורות גזורות מסוגים שונים של משולשים שווי צלעות, שווי שוקיים ושוני צלעות. כמו כן חשוב לכלול במשימה זו דוגמאות של מצולעים "טיפוסיים", כפי שנהוג לתת בספרי הלימוד, ביחד עם מצולעים "לא טיפוסיים" כמו משולש "דקי" (ראה איור 1).



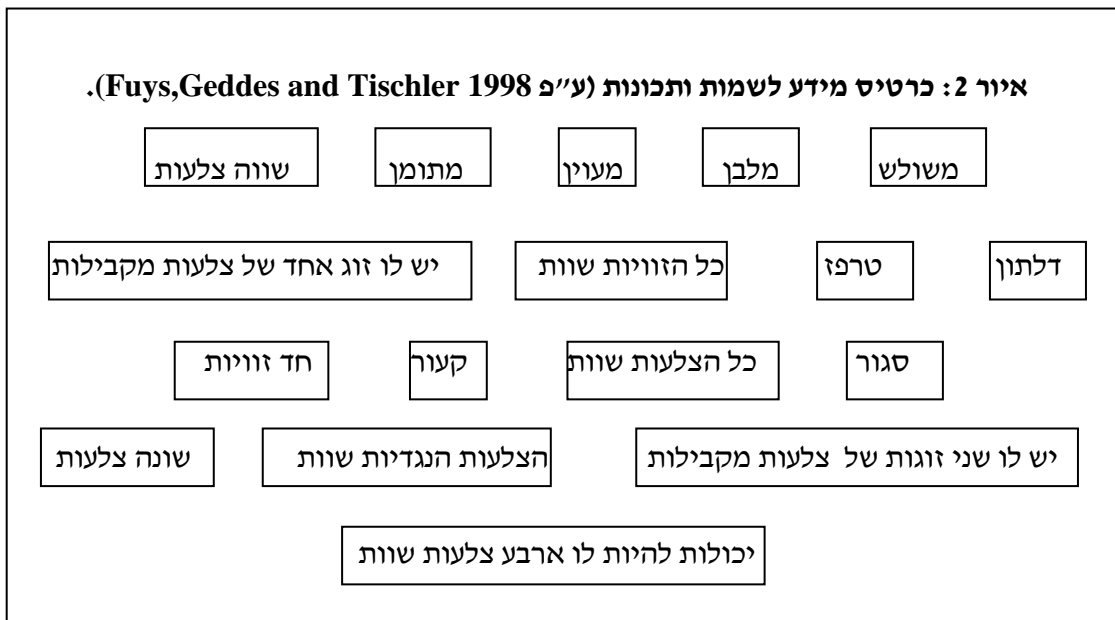
כל שמבחר הצורות הגזורות יהיה גדול יותר כך תגדל האפשרות ללמוד על החשיבה של התלמידים. על מנת לסייע למורה להעריך את חשיבת התלמידים, ניתן לבקש מהם לתעד בכתב את הנימוקים שלהם למיון שעשו, וגם לצייר ולתת שם לקטיגוריות לפיהן מיינו את הצורות.

**דוגמא מחשיבת תלמידים:** כאשר התלמידים מיינו צורות כמו אלו המופיעות באיור 1, הם השתמשו בהנמקות שונות. תלמידים רבים השתמשו במספר הצלעות כקריטריון למיון שלהם - דבר המעיד על חשיבה המבוססת על מאפיינים. כדאי לתת לתלמידים אלו את המשימות של הגדרות מצולעים וכרטיסי מושגים (שיתוארו בהמשך המאמר), משום שמשימות אלו מעודדות את התלמידים להתחיל ליצור הגדרות של חלקים ותכונות של מצולעים שונים. יש לבקש מן התלמידים גם למיין את המצולעים שלהם לתת קבוצות. למשל, ניתן לבקש מן התלמידים למיין את קבוצת המרובעים שלהם על מנת

שיגלו יחסים אחדים בין הצורות. פעילות נוספת תהיה המשימה של כרטיסי שמות ותכונות (Fuys, Geddes, and Tischler 1998). במשימה זו התלמידים נדרשים לעשות התאמה בין כרטיסים עם שמות ותכונות לבין המצולעים שהם מיינו קודם (ראה איור 2). מאחר שיתכן שהתלמידים מיינו מצולע מסוים לתת קבוצות אחדות, חשוב לכלול בכרטיסים עותקים אחדים של כל שם ותכונה. למשל, הכרטיס "כל הזוויות שוות" מתאים לשלוש קבוצות שונות: ריבועים, מלבנים ומשולשים שווי צלעות.

### משימה ג': הגדרת מצולעים

**תאור המשימה:** משימה זו עוזרת לזהות את התפיסות - או התפיסות המוגבלות - של התלמידים לגבי מצולעים. התלמידים מתבקשים להגדיר מצולע נתון ולנמק את ההגדרה שלהם (מעובד מ-burger and Shaughnessy 1986). בהתחלה כל תלמיד מתבקש לכתוב הגדרה של צורה גיאומטרית נתונה, ולאחר מכן המורה מנהלת דיון על ההגדרה. על מנת לסייע לתלמידים להבהיר לעצמם את החשיבה שלהם, המורה מציירת צורה המתאימה להגדרה שהתלמיד נותן. אם מהציור של המורה לא מתקבלת התוצאה הרצויה, אזי התלמיד יכול לשנות הגדרה לא נכונה או לא מלאה.



משימה זו מתאימה ביותר לתלמידים שמתחילים לחשוב במושגי התכונות של הצורה. היא דורשת מהתלמידים להתמקד בחלקים של הצורה ובמאפייניה, תוך הגעה להסכמה קבוצתית בדבר המידע המינימלי הנחוץ לשם הגדרה של צורה גיאומטרית נתונה. לאחר מכן יכולים התלמידים לסיים את המשימה של כרטיסי שמות ותכונות שתוארה קודם (איור 2).

**דוגמא מחשיבת תלמידים:** כאשר תלמידי כיתה ה' התבקשו להגדיר מלבן, תלמיד אחד ציין ש"יש לו ארבע צלעות. זה מצולע וכל ארבע הצלעות שלו הן זוויות ישרות, ויש לו שני זוגות של קווים מקבילים, וההבדל היחידי הוא ששני קווים קצרים יותר משני הקווים האחרים". הגדרה זו מתארת את המלבן הטיפוסי, מאחר שהיא כוללת מאפיינים שלא קיימים בהכרח בכל המלבנים. על סמך מידע זה, יכולה

המורה שלהם להמשיך להתעמת עם התפיסה השגויה, אולי באמצעות בניית כרטיס מושג שבו יוצג מגוון רחב של מלבנים, כדי מנת לעזור לתלמידים לגלות את הרבגוניות של מלבנים.

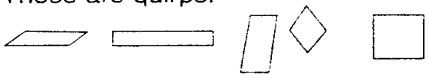
משימה ד': כרטיס מושג

**תאור המשימה:** התלמידים בודקים כרטיס המציג דוגמאות ודוגמאות שליליות של צורה גיאומטרית מסוימת בעלת שם מדומה, למשל **מצודי** (quirp) (מעובד מתוך Geddes and Fortunato 1993). לאחר מכן התלמידים מתבקשים לזהות **מצודים** מתוך מגוון של צורות ולתת הגדרה של **מצודי**. דוגמה של כרטיס מושג, שבו מופיעות תשובות התלמיד, נמצאת באיור 3. משימה זו הינה "דרך יעילה לערוך לתלמידים הכרות עם מושג ולהביא למודעות שלהם את האפיונים המיוחדים שלו" (Geddes

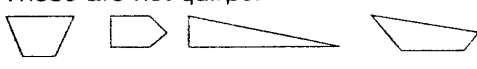
**איור 3**

**Items examined as part of the Concept Card task**

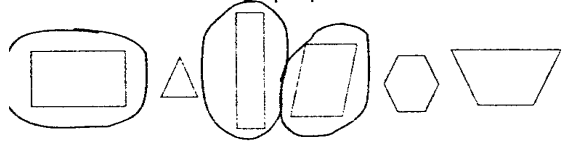
These are quirps:




These are not quirps:



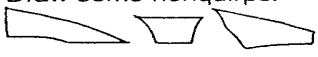
Which of these are quirps?



Draw some quirps.



Draw some nonquirps.



What is a quirp?

**a shape with 4 sides**

(and Fortunato 1993, 204). משימה זו גם דורשת מהתלמידים להתקדם מעבר להסתמכות על עובדות שרכשו באמצעות שינון צורות גיאומטריות סטנדרטיות. המורים יכולים לבנות כרטיסי מושג שונים עבור מגוון של מצולעים ושל תת הקבוצות שלהם, תוך מתן שם מדומה שונה לכל סוג של מצולע.

כדי לבנות כרטיס מושג צריך קודם לבחור סוג של מצולע ולתת לו שם חדש מדומה. לאחר מכן יש לצייר דוגמאות של אותו מצולע ושל המצולעים השייכים לאותה קבוצה, ולבסוף ליצור דוגמאות שליליות של מצולעים מקבוצות אחרות לשם הבחנה בין סוגים אחרים לסוג המצולעים המופיעים

בכרטיס המושג. למשל, אם רוצים לבנות כרטיס מושג למלבנים, יש לכלול בדוגמאות גם מלבנים וגם ריבועים. הדוגמאות השליליות צריכות לכלול טרפזים, מקביליות, מעוינים ודלתונים, בנוסף למרובעים שאינם מתאימים לאף אחת מן הקבוצות הללו, כמו מרובע קעור. דוגמה נוספת לכרטיס מושג ניתן למצוא אצל Geddes and Fortunato (208, 1993). כפעילות המשך, ניתן גם לבקש מהתלמידים לבנות כרטיסי מושג משלהם עבור סוגים שונים של מצולעים. משימה כזו תעזור למורה לקבוע באיזו מידה התלמידים מבינים סוג מסוים של מצולע, ואת היחס בינו לבין מצולעים אחרים.

**דוגמה מחשיבת תלמידים:** התלמיד שמילא את כרטיס המושג המופיע באיור 3 היה מסוגל לזהות בהצלחה – ולצייר – מצודים, או מקביליות. יחד עם זאת, הוא התקשה לכתוב הגדרה מלאה של הצורה. מאחר שעיקר הקושי שלו היה בניסוח ההגדרה, המורה יכלה לתת לו כמשימת המשך את המשימה של הגדרת מצולעים שתוארה קודם, ובכך לסייע לתלמיד להתמקד בצורה מכוונת יותר בתכונות המהותיות ובמאפיינים המהותיים של מקביליות.

## רעיונות למחקר פעולה

על מנת להתייחס לרעיונות שנדונו כאן, בקשו מן התלמידים להשוות בין שלושת המצולעים הבאים:



- המידע שיתקבל משלישייה מסוימת זו יוכל לסייע בקביעה האם התלמידים משתמשים בקריטריון של דמיון כשהם חושבים על מצולעים. על סמך התוצאות העולות ממשימה זו, יכולים המורים לבחור מתוך המשימות האחרות שתוארו כאן. אנו מציעים מספר אפשרויות של מחקרי פעולה:
- לאחר שהתלמידים סיימו משימה אחת או יותר, המורים יכולים לשקול ולתאר את ההשפעה של רקע, תכונות ותחומי עניין של התלמידים על הפירושים שהם נתנו במשימות השונות. בדיקת הקשר שבין התוצאות של משימות ההערכה לבין תכונות אישיות של תלמידים יכולה לסייע למורים בבחירת פעילויות תיקון או הרחבה המתאימות לאותם תלמידים.
  - מורים יכולים לבדוק את הקשר בין התוצאות של המשימות הללו לבין הביצוע של התלמיד במשימות הערכה מתמטיות אחרות. למשל, ניתן להשוות תיאורים של ביצועי תלמידים בבניות גיאומטריות בלוח מסמרים לתוצאות של משימת הגדרת מצולעים על מנת לבחון הבדלים בין יכולת ויזואלית ליכולת ביצועית.
  - מורים יכולים לפתח גרסה מצומצמת של ניתוח מקרה (Case study) עבור תלמיד שהערכת המשימות שעשה מצביעה על כך שהוא נמצא מעל או מתחת ל"נורמה". הם יכולים לתעד את השינוי שהתרחש אצל התלמיד מעבר לזמן, לאחר שהשלים יחידת הוראה שתוכננה עבורו.

## ביבליוגרפיה

- Burger, William F., and J. Michael Shaughnessy. "Characterizing the Van Hiele Levels of Development In Geometry". *Journal for Research in Mathematics Education* 17 (January 1986): 31-48.
- Crowley, Mary L. "Van Hiele Model of the Development of Geometric Thought". In *Learning and Teaching Geometry, K-12, 1987 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)*, edited by Mary Montgomery Lindquist and Albert P. Shulte, 1-16. Reston, Va.:NCTM, 1987.
- Fuys, David, Dorothy Geddes, and Rosamond Tischler. "Van Hiele model of Thinking in Geometry among Adolescents". *Journal for Research in Mathematics Education*, Monograph Series No. 3. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1988.
- Geddes, Dorothy, and Irene Fortunato. "Geometry: Research, and Classroom Activities." In *Research Ideas for the Classroom: Middle Grade Mathematics*, edited by Douglas T. Owens, 199-222. New York: Macmillan Publishing Co., 1993.
- Lehrer, Richard, Elizabeth Fennema, Thomas Carpenter, and Ellen Ansell. "Review of NCRSME Research." In *NCRSME Research Review: The Teaching and Learning of Mathematics*, 10-13, Madison, Wis.: National Center for Research in Mathematical Sciences Education Research, Wisconsin Center for Education Research, 1994.
- Lehrer, Richard, H. Osana, Cathy Jacobson, and Mazie Jenkins, "Children's Conceptions of Geometry in the Primary Grades." Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Atlanta, Georgia, 1993.