

آراء الأطفال الصغار حول الاشكال الهندسية

Young Children's Ideas about Geometric Shapes

الكاتبان: Douglas H. Clements and Julie Sarama

Teaching Children Mathematics, Vol. 6 , No. 8 , April 2000, pp. 482-488

ترجمة: كميل ظاهر



يُدخل الطفل، بعد عدة محاولات، مكعباً في ثقب مربع الشكل. ماذا يعرف هو عن الاشكال؟ ماذا سيعرف، اضافة الى ذلك، خلال فترتي الحضانه والمدرسة الابتدائية، وماذا يمكنه ان يتعلم؟ لقد تعلم المربون الكثير عن معرفة الأطفال الصغار بالاشكال. كان ذلك مفاجئاً جداً. سنصف في هذا المقال بحثاً عن تفكير الأطفال الصغار حول الاشكال الهندسية، ونشير الى انعكاساته على التعلم والتعليم.

ماذا يعرف الأطفال عن الاشكال؟

مستويات فهم الهندسة لدى الأطفال

يختلف تفكير الأطفال بالاشكال مع تطورهم. يفهم الأطفال الاشكال في مستوى ما قبل الادراك (Prerecognition level)، لكنهم لا يستطيعون تحديد الاشكال العديدة والتميز بينها. وهم عادة يرسمون نفس المنحنى عندما ينسخون الدوائر او المربعات او المثلثات (Clements and Battista 1992b). وفي المستوى الثاني، البصري، (Visual level)، يتعرف الأطفال على الاشكال وفقاً لمظهرها (Clements and Battista 1992b, Van Hiele 1959/1985). فقد يقولون، مثلاً: ان الشكل "هو مستطيل لانه مثل الباب". يتعرف الأطفال، في المستوى الوصفي (Descriptive level)، على الاشكال ويستطيعون تمييزها حسب صفاتها. ويمكن للطالب، مثلاً، ان يفكر بالمستطيل على انه شكل له ضلعان متساويان، وكل زواياه قائمة. ولان التقدم في مستويات تفكير الأطفال يعتمد على تربيتهم لذا فمن الممكن ان يصلوا الى هذا المستوى من التفكير في الصفوف الاعدادية... او حتى ليس قبل انهاء الثانوية!

الأطفال الذين في مستويات مختلفة يفكرون بالاشكال بطرق مختلفة، ويفسرون الكلمات، مثل /المربع، بمعان مختلفة. بالنسبة لطفل مفكر في مستوى ما قبل الادراك، قد يعني المربع، مربع النموذج الاصلي الافقي فقط. بالنسبة للطفل المفكر في المستوى البصري، فيمكن للمربع ان يعني اشكالا مختلفة "تظهر مثل الاطار المثالي"، ولا يهتم في اي طريقة يتم تدويره. بالنسبة للطفل المفكر في المستوى الوصفي، يجب ان يكون المربع شكلاً مغلقاً ذا اربعة اضلاع متساوية واربع زوايا قائمة. وحتى بالنسبة لهذا الطفل، فانه ليست للمربع علاقة بمجموعة المستطيلات، كما هو الحال لدى المفكرين في المستويات الاعلى. ويمكن لهذه المستويات ان تساعدنا على فهم كيفية تفكير الأطفال بالاشكال. ويمكننا ان نذكر انفسنا ان نسأل ماذا يرى الأطفال عندما ينظرون الى شكل ما. فعندما نقول "مربع" قد يبدو انهم يوافقون معنا على العديد من حالات النماذج الاصلية لكنهم يعنون شيئاً مختلف كلياً. ويمكن للمستويات، ايضاً، ان ترشد المعلمين في توفير فرص تعلم ملائمة للأطفال.

آراء الأطفال حول الاشكال المألوفة

للأطفال الصغار العديد من الآراء حول الاشكال المألوفة. لكن المستويات وحدها لا تعطي المعلمين التفاصيل الكافية. لذلك، أجرينا عددا من الدراسات عن آراء الأطفال الصغار حول الاشكال من اجل اتمام الصورة (Clement et al. 1999; Hannibal 1999). وقد قابلنا خلال هذه الابحاث 128 طفلاً تتراوح اعمارهم بين 3 و 6 سنوات لمدة ساعة خلال عدة جلسات. تعرف الأطفال على الاشكال من بين مجموعة من الاشكال على الورق واشكال خشبية قابلة للتحريك. وقد تم عرض الاشكال في اوضاع مختلفة. تركنا، احياناً، الأطفال يمسكون الاشكال، وطلبنا منهم، احياناً اخرى، ان يتعرفوا على الاشكال الموضوعة في اوضاع مختلفة داخل اطار مستطيل ثابت او طوق دائري. ان استنتاجاتنا من هذه اللقاءات حول الاشكال الاساسية معروضة هنا.

الدوائر: يتعرف الأطفال بدقة على الدوائر، الا ان الأطفال دون جيل ست سنوات غالباً ما يختارون الاشكال "البيضوية" على انها دوائر. ويمكن لمعلمي الطفولة المبكرة ان يفترضوا ان معظم الأطفال يعرفون شيئاً ما عن الدوائر، عدا تلك الحالات الشاذة وقليلة التواتر (فقط 4 بالمئة اجابات خاطئة في اوراق المهام).

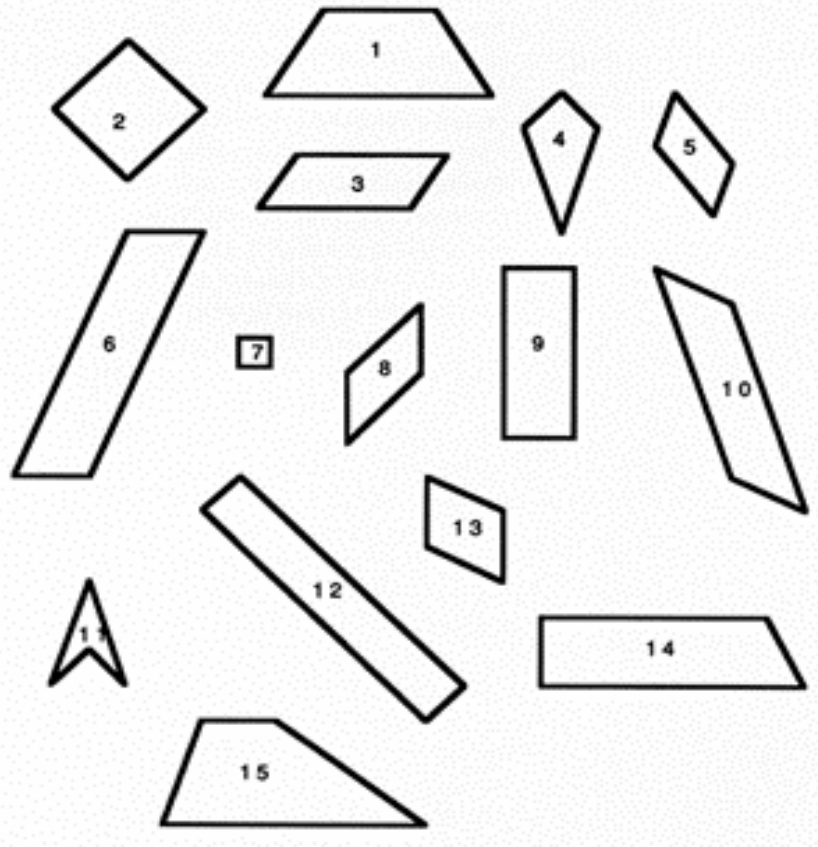
المربعات: يتعرف الأطفال الصغار على المربعات بنفس الدقة، تقريباً، التي يتعرفون فيها على الدوائر (87 بالمئة اجابات صحيحة في اوراق المهام)، غير انه من المرجح ان

يسمي أطفال الروضة المعينات "مربعات". لكنهم كانوا دقيقين مثل الأطفال الأكبر سنّاً في تسمية المربعات "المائلة".

المثلثات: يتعرف الأطفال على المثلثات بدقة اقل (60 بالمئة اجوبة صحيحة). ومن المرجح ان يقبلوا اشكالاً ثلاثية ذات اضلاع منحنية وان يرفضوا مثلثات لكونها "طويلة" جداً او "منحنية" او "الرأس ليس في القمة". بعض الأطفال في سن ثلاث سنوات يقبلون اي شكل ذي "رأس" على انه مثلث.

المستطيلات: مرة اخرى، معدل الدقة لدى الأطفال منخفض (54 بالمئة). يميل الأطفال الى قبول متوازي الاضلاع "الطويل" او شبه المنحرف قائم الزاوية (انظر الى الشكل 1، الاشكال 3، 6، و 14) على انها مستطيلات. وهكذا، يبدو ان تصور الأطفال للمستطيل هو شكل ذو اربعة اضلاع وله ضلعان طويلان متوازيان وزوايا "قريبة" من زوايا المربع (قائمة). يبدو ان نسبة صغيرة فقط من الأطفال في سن ثلاث سنوات واربع سنوات ليس لديهم اي افكار او تصورات عن المستطيلات او المثلثات.

شكل 1: مجموعة من الاشكال الرباعية



الأفكار المفاجئة، لدى الأطفال عن الاشكال

لقد كان لدينا انطباع جيد حول معرفة اطفال الحضانه بالاشكال، لكننا فوجئنا بما اكتشفناه.

تغييرات طفيفة

لقد كان مفاجئاً مدى *قلة* ما يتعلمه الأطفال عن الاشكال في فترة الحضانه وفترة المدرسة الابتدائية. فأطفال حضانتنا تعرفوا على ما يقارب الـ 60 بالمئة من المثلثات بشكل صحيح. وتراوحت التحصيلات في دراسة كبيرة تم اجراؤها على تلاميذ المدارس الابتدائية الذين قاموا بالمهمة ذاتها بين 64 بالمئة لدى تلاميذ الروضة و 81 بالمئة لدى تلاميذ الصف السادس (Clements and Battista 1992a). وبشكل مشابه، كان تحصيل أطفال الحضانه 54 بالمئة بالنسبة للمستطيلات، وتراوح تحصيل تلاميذ المدرسة الابتدائية بين 63 بالمئة و 68 بالمئة. على الرغم من ان فارق السن بين هذه المجموعات يقارب ثماني سنوات، فان الزيادة في التحصيل للمهمة ذاتها هي قليلة جداً. وربما قد نقوم بعمل افضل اذا قمنا بتعليم المثلثات في كل سنة.

يمكن للفوارق الشخصية ان تكون بارزة

اختر احد ابناء سن ست سنوات، في دراستنا، المستطيلات، بشكل عشوائي، ووصفها بأنها "ذات رؤوس". وللمقارنة، تفوق طفل من ابناء الثلاث سنوات في تحصيله على جميع ابناء الست سنوات في مهمة المستطيلات. ان فرص التعلم الجيدة اهم من مستوى التطور بالنسبة لتعلم الأطفال عن الاشكال.

مع توفر الفرص الجيدة، يطرح الاطفال اسئلة مثيرة ويحلونها

تحدث احدي المعلمات في دراستنا اطفال الروضة بأن يشكلوا اشكالاً مختلفة بواسطة اجسادهم. وحاول طفلان ان يشكلوا معيناً، فجلسا الواحد قبالة الاخر فاتحين ساقيهما بحيث لامست قدما الاول قدمي الثاني ليتشكل معين جيد جداً. واقترح احد الاطفال من الحلقة قائلاً: انه "اذا وضعنا طفلاً آخر في الوسط نحصل على مثلثين!" وفي الحال، استدعى الاطفال طفلاً يدعى راي، لكونه اصغرهم حجماً، وطلبوا منه ان يستلقي في الوسط. لقد طرح الأطفال بانفسهم المشاكل المتعلقة بتفكيك الاشكال وخططوا حلاً خاصة بهم.

يساعد الحاسوب في توسيع حدود ما يمكن للاطفال ان يعملوه بالاشكال الهندسية. تومي هي مثال على ذلك، وهي طفلة حضانة كانت تعمل على برنامج حاسوب يقدم مجموعة ثابتة من الاشكال. ووضعت مثلثين متطابقين على مربع ولونت اجزاءً مختارة من هذا الشكل. ونتج عن هذه العملية مثلث ثالث لم يكن موجوداً في البرنامج! ويمكن للحاسوب ان يكون وسيلة قوية ومرنة (Clements and McMillen 1996). مثال على ذلك هو ميشيل الذي اراد ان يخلق مسدساً (شكل سداسي) بمساعدة المثلثات من برنامج "الاشكال العجيبة". فقد بدأ دون استعمال الحاسوب وعمل بطريقة التجربة والخطأ عاداً الاضلاع وفاحصاً الشكل بعد اضافة كل مثلث. ومقابل ذلك، عند استعماله برمجية "الاشكال" بدلاً في التخطيط (Sarama, Clements, and Vukelic 1996)، فوضع في البداية مثلثين، بعد ان جرهما وقلبهما بمساعدة اداة القلب، وبعدها عدّ بأصبعه حول مركز المسدس غير المكتمل متخيلاً المثلثات الاخرى، وصاح بابتهاج: "اربعة مثلثات اخرى"، وبعد ان اضاف مثلثاً اخر اعلن "ثلاثة مثلثات اخرى!" في حين انه بدون استعمال الحاسوب كان على ميشيل ان يفحص في كل مرة زاد فيها مثلثاً مقابل مسدس جاهز، اذ ان اعماله المقصودة والمخطط لها على الحاسوب قادته ليشكل صوراً ذهنية، اي انه فكك المسدس بمخيلته وتوقع موضع كل مثلث اضاف.

ماذا يمكن ان يشكل صعوبة لدى الاطفال؟

ترتيبات مختلفة، قرارات مختلفة

تؤثر الترتيبات المحددة على قرارات الاطفال. في الترتيب الاول، وضعنا "لا-امثلة" واضحة، مثل الدوائر، مع مجموعة من الاشكال الثلاثية. وتقبل الأطفال المزيد من انواع المثلثات والمزيد من الاشكال "ذات الرؤوس" من غير المثلثات. وبشكل مشابه، تقبل الأطفال المزيد من الاشكال البيضوية على انها دوائر. وهكذا، يتأثر ما يختاره الاطفال بشدة، بالاشكال التي يقارنون بها.

في الترتيب الثاني وضعنا الاشكال الخشبية داخل طوق. وكان الاحتمال ضئيلاً بان يهتم الأطفال بكون الاشكال "طويلة" او "مقلوبة" او ان يلاحظوا ذلك. اي ان عدم وجود اطار مستطيل يُستند عليه اثر على الاشكال التي اختارها الأطفال.

في الترتيب الثالث، طلبنا من الاطفال ان يبرروا اختياراتهم، وعادةً بدّل الاطفال اختياراتهم الى الاختيارات الصحيحة. مثال على ذلك: بنت الخامسة التي زادت تحصيلها بـ 26 بالمئة من النقاط عندما طُلب منها تفسير اختياراتها.

فهم محدود للصفات (للخواص)

على الرغم من ان الحديث عن الاشكال عادة ما يساعد، إلا ان معرفة الاطفال، عادة، محدودة. وكثيراً ما يقول ابناء الاربع سنوات ان للمثلثات "ثلاثة رؤوس" او "ثلاثة اضلاع". ولم يكن نصفهم متأكداً مما يعنيه "رأس" او "ضلع" (Clements 1987). مثال على ذلك، طُلب من تلميذة ان تقف على مثلث من بين عدد من الاشكال التي تم رسم خطوطها على الارض بواسطة شريط لاصق. وقفت التلميذة، في الحال، على المثلث مفسرة ذلك "بان له ثلاث زوايا وثلاثة اضلاع." وعندما سُئلت ماذا عنت بثلاث زوايا اجابت "لا اعرف".

ماذا يمكن للمعلمين ان يفعلوا كي يقدموا المساعدة؟

لنتائج الدراسات التي عرضناها هنا العديد من الانعكاسات على تعليم الهندسة. وتعرض تنمة هذا المقال اقتراحات مستندة الى البحث لتحسين تعليم الاشكال الاساسية ولتعزيز فهم الاطفال لهذه الاشكال.

اعادة النظر في تدريس "الاشكال الاساسية" بواسطة الأمثلة فقط

هل نُقنع الاطفال بالفصل بين المربعات والمستطيلات عندما نقارن باستمرار بينها؟ هل يسبب، احياناً، تدريس الاشكال، بالاساس، عن طريق اعطاء الامثلة بناء آراء متصلة غير ضرورية؟

عرضت معلمة، في احدى الدراسات (Kay 1987)، الحالة العامة للاشكال الرباعية، او الاشكال التي لها اربعة اضلاع. وبعدها عرضت المستطيلات كأشكال رباعية خاصة والمربعات كمستطيلات خاصة، اي انها بحثت في صفات كل مجموعة من الاشكال والعلاقات بينها، مثلاً: المستطيل هو حالة خاصة لشكل رباعي. هي استعملت مصطلحات غير رسمية لإظهارها هذه العلاقة. مثلاً: "هذا مستطيل - مربع". في نهاية التدريس استطاع معظم التلاميذ تحديد خواص الاشكال الرباعية والمستطيلات والمربعات، واستطاع حوالي نصفهم تحديد العلاقة الهرمية بين هذه المجموعات، على الرغم من انه لم يرقم احد بذلك امامهم من قبل. واستنتجت هذه المعلمة ان توجه التدريس النموذجي بواسطة عرض امثلة يلائم الاشكال ذات النماذج القليلة فقط، مثل الدوائر وربما المربعات ايضاً. اما بالنسبة للاشكال الاخرى، خاصة المجموعات التي تستند الى التسلسل الهرمي مثل المثلثات والاشكال الرباعية، فيكون هذا التوجه وحده غير كاف. يمكننا ان نسأل ما هو عمق فهم تلاميذ الصف الاول للعلاقة الهرمية (Clements and Battista 1992b). لكن، يمكننا، ايضاً، ان نسأل حول حكمة التوجه التقليدي العارض للامثال-

قد يضع هذا التوجه الاساس الذي يجب تفنيده لاحقاً من اجل تطوير تفكير هرمي، اي، تفكير منطقي- علاقاتي، تفكير هندسي.

أعطوا للاطفال الفضل على ما يعرفونه

لدى معظم الاطفال العديد من الافكار حول الاشكال في الوقت الذي يدخلون فيه الروضة. غير ان المعلمين لا يطلبون منهم، عادة، توسيع افكارهم. وبينت احدي الدراسات (Thomas 1982) ان حوالي ثلثي تفاعل المعلمين مع طلابهم، أثناء التدريس يكون فقط عن طريق ترديد الطلاب لما يعرفونه، مثل ما يلي:

المعلم: هل يمكنكم ان تقولوا لنا اي نوع من الاشكال هذا الشكل؟

الأطفال: مربع.

المعلم: حسناً. هذا مربع.

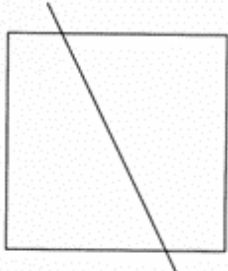
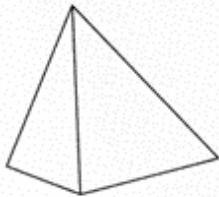
معظم الاسئلة التي يطرحها المعلمون هي اسئلة مغلقة وتتعامل مع الذاكرة فقط. ويطرح بعض التلاميذ الاسئلة، ولكن عندما يقومون بذلك يكون جواب المعلم الصمت. وبدلاً من ذلك يجب على المعلمين ان يبنوا على معرفة التلاميذ وان يطوروا نقاشات ثرية.

تجنبوا الاعتقادات الخاطئة الشائعة

في دراسة توماس (Thomas 1982) لم يُضف معظم المعلمين اي مضمون جديد. لكن، عندما اضافوا شيئاً كانت تلك، عادة، اضافات غير صحيحة، مثل القول بان "كل المعينات هي مربعات". وكان البعض، في احسن الاحوال، غير محظوظ، مثل القول لطفل الذي اختار مستطيلاً مربعاً: "لا، جد مستطيلاً". وشملت اقوال غير مفيدة اخرى مثل انه "ينتج دائماً عن كل مثلثين يوضعان سوية مربع"، وانه "اذا تم قطع مربع الى نصفين ينتج دائماً مثلثين." (انظر الى الشكل 2 لامثلة مناقضة).

الشكل 2: المثلثات والمربعات

عند وضع مثلثين معاً لا ينتج دائماً مربع، ويمكن تقسيم المربع الى نصفين بطرق عدة



وسّعوا المفاهيم المحدودة التي كثيراً ما يجري "تعليمها"

بدو اننا محاطون، في كل مكان، بأفكار هندسية غير ناجحة! فقد فحصنا عن كثب، كجزء من بحثنا، محلات بيع الالعاب ومحلات بيع الوسائل المساعدة للتعليم وكراسات عن مواد حول "الاشكال". وقد وجدنا ان هذه المواد، باستثناء القليل منها، تعرض فقط "افضل الامثلة" عن المثلثات والمستطيلات والمربعات. معظم المثلثات متساوية الاضلاع او متساوية الساقين ذات قاعدة افقية. ومعظم المستطيلات هي افقية او عمودية، وطولها يصل الى ضعفين او ثلاثة اضعاف عرضها. ولمعظم المربعات قاعدة افقية. وكثيراً ما تكون المواد المنهجية محدودة ايضاً. احد الامثلة على ذلك هو ليئه التي كانت تعمل على برنامج حاسوب طلب منها خلاله ان تختار سمكة من بين عدد من الاشكال. وعندما طُلب منها ان تختار سمكة مربعة اختارت سمكة يظهر جسدها المربع مائلاً بزاوية 45 درجة. واعلن برنامج الحاسوب انها اخطأت، مضيفاً انها اختارت "سمكة معين"!

ساعدوا الأطفال في التحرر من هذه التقييدات عن طريق استخدام مجال واسع من الامثلة واللا-امثلة الجيدة. من اجل القيام بذلك، جربوا الوسائل التالية:

- نوّعوا كبر وموادّ وألوان الامثلة. نوّعوا موضع وابعاد المستطيلات والمثلثات، مثل المستطيلات في **الشكل 1**. بالنسبة للمثلثات، نوّعوا انماطها لتشمل مثلثات غير متساوية الاضلاع، ومثلثات منفرجة الزوايا.
- قارنوا الامثلة بـ اللا-امثلة من اجل تركيز انتباه الأطفال على الخصائص الاساسية (انظر **الشكل 3**)
- شجّعوا الاطفال على تغيير الاشكال بشكل دينامي. مثلاً، بعض برامج الحاسوب تتيح للأطفال التلاعب بالشكل، مثل المثلث المتساوي الساقين، لكنه يبقى دائماً مثلثاً متساوي الساقين (انظر الى **الشكل 4أ، 4ب، و4ج**).

ملاءمة الفعاليات لمستوى تفكير الأطفال بالاشكال

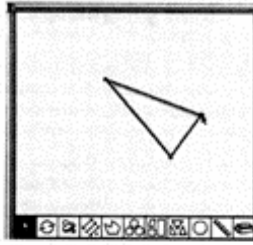
يمكن للأطفال في مستوى ما قبل الادراك ان يعملوا بالاشكال بأفضل طريقة في عالمهم المحيط. ساعد هؤلاء الأطفال على فهم الخصائص المناسبة وغير المناسبة – أمثلة، الموضوع والكبر واللون- للاشكال في فعاليات مثل الفعاليات التالية:

- التعرف على الاشكال في غرفة الصف والمدرسة والمجتمع.
- تصنيف الاشكال وشرح لماذا يعتقدون ان شكلاً معيناً ينتمي لمجموعة معينة.
- نسخ وبناء اشكال عن طريق استعمال تشكيلة واسعة من المواد.
- يستطيع الأطفال، ايضاً، في المستوى البصري، قياس وتلوين وثني وقص الاشكال من اجل تحديد خصائصها. يمكنهم، مثلاً، الانهماك في الفعاليات التالية:
- شرح لماذا ينتمي، او لا ينتمي، شكل معين الى مجموعة اشكال معينة.
- ثني مربع او معين بطرق متنوعة من اجل تحديد تماثله وتساوي الزوايا والاضلاع.
- رسم اشكال بواسطة برنامج "هندسة السلحفاة" (turtle geometry)، التي تساعد الأطفال على التقدم نحو الاشكال بفاعلية وبواسطة اوامر وقياسات رياضية دقيقة؛ او جعل الأطفال يعطون اوامر لبرنامج الحاسوب طفل-سلحفاة (child-turtle) الذي يقوم بالعمل المطلوب.
- استخدام "فاحص الزوايا القائمة" من اجل ايجاد زوايا في غرفة الصف تكون مساوية للزاوية القائمة او اكبر او اصغر منها.
- استخدام الحاسوب لايجاد طرق جديدة لخلق الاشكال (الشكل b5) والتلاعب بها (الشكل 5a) (Clements and Meredith 1998).
- مناقشة الانواع العامة مثل الاشكال الرباعية والمثلثات، وعد اضلاع الاشكال المختلفة من اجل اختيار النوع الذي ينتمون اليه.

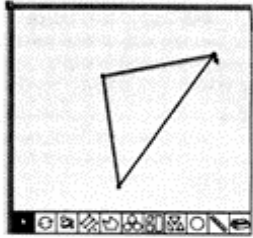
الشكل 4- التلاعب بشكل من نوع

معين في برمجة Math Van

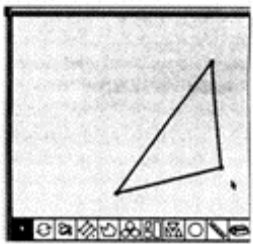
تتيح هذه البرمجة للأطفال ان يرسموا اشكالاً من انواع معينة والتلاعب بها. هنا قام الأطفال بتعريف مثلثات متساوية الساقين. اللون المزدوج على الساقين المتساويين يمثل تساويهما (a). يستطيع الأطفال إزاحة وقلب وإدارة هذا المثلث بأي صورة يريدون لكنه يبقى مثلثاً متساوي الساقين (b) و (c).



(a)



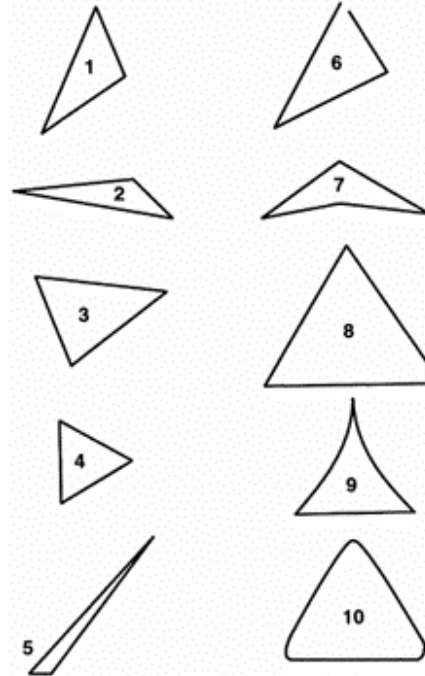
(b)



(c)

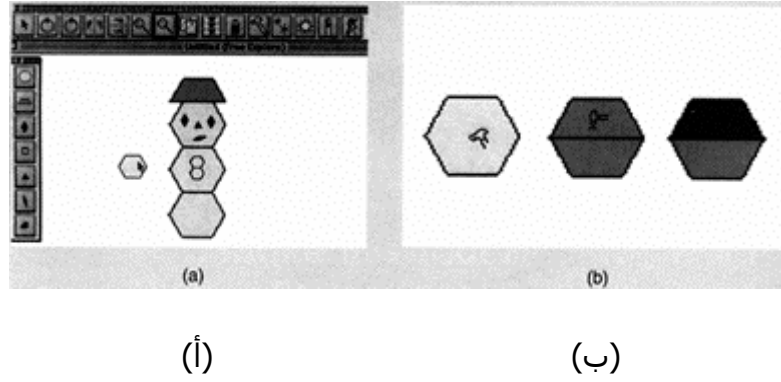
الشكل 3- مثلثات مضللة

تحتوي صفحة المثلثات المضللة على مثلثات (5-1) وعلى لا-مثلثات (6-10). وتظهر هذه المثلثات بازواج من اجل التأكيد على التناقضات. امثلة: الشكل 1 هو مثلث بينما الشكل 6 هو ليس بمثلث لانه غير مغلق. لا توجد للشكل 2 قاعدة افقية وهو غير متمثل، لكنه مثلث؛ والشكلان 7 و8 هما ليسا مثلثين لان لكل منهما اربعة اضلاع.



الشكل 5- التلاعب بالاشكال في برمجة الاشكال

تتيح برمجة الاشكال للأطفال التلاعب بالاشكال بطرق غير ممكنة في الاشكال العجبية العادية، مثل تحديد اشكال يمكن ان تضاعف ذاتها (شكل 5 أ). كذلك يمكنها تكبير او تصغير الاشكال، كما فعلت لينه عند صنع رجل الثلج. يمكن تكسير الاشكال وتقسيمها الى اجزاء (شكل 5 ب).



الاستنتاجات

ان قدرة البالغ على "الرؤية" الفورية للاشكال في عالمه، هي نتيجة لمعرفة هندسية وليس المصدر لمعرفتها. ان مصدر هذه المعرفة هو تلاعبنا المبكر والفعال في عالمنا. يتعلم الأطفال الصغار الكثير عن الاشكال. لذا يجب البدء بتدريس الهندسة في جيل مبكر، ويبين بحثنا وبحث غاغاتسي وباترونيس (1990) ان مفاهيم الأطفال الصغار حول الاشكال تستقر في حوالي جيل ست سنوات، لكنها ليست دقيقة بالضرورة. ونستطيع ان نعمل الكثير، كمعلمين، من اجل الاضافة الى المنهاج الذي عادة ما يكون جزءا من المشكلة بدلاً من ان يكون الحل.

المراجع

Clements, Douglas H. Longitudinal Study of the Effects of Logo Programming on Cognitive Abilities and Achievement". *Journal of Educational Computing Research* 3 (1987) 73-94.

Clements, Douglas H., and Michael T. Battista. *The Development of a Logo-Based Elementary School Geometry Curriculum*. Final Report: NSF Grant No.MDR-8651668. Buffalo, N.Y./Kent, Ohio: State University of New York at Buffalo/Kent State University, 1992a.

Clements, Douglas H., and Michael T. Battista "Geometry and Spatial Reasoning". In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, edited by Douglas A. Grouws, 420-64. New York: Macmillan, 1992b.

Clements, Douglas H., and Sue McMillen. "Rethinking 'Concrete' Manipulatives". *Teaching Children Mathematics* 2 (January 1996): 270-79.

Clements, Douglas H., and Julie Sarama Meredith. *Shapes- Making Shapes*. Palo Alto, California: Dale Seymour Publications, 1998.

Clements, Douglas H., Sudha Swaminathan, Mary Anne Zeitler Hannibal, and Julie Sarama. "Young Children's Concepts of Shape". *Journal for Research in Mathematics Education* 30 (March 1999): 192-212.

Gagatsis, A., and T. Patronis. "Using Geometrical Models in a Process of Reflective Thinking in Learning and Teaching Mathematics". *Educational Studies in Mathematics* 21 (1990): 29-54.

Hannibal, Mary Anne. "Young Children's Developing Understanding of Geometric Shapes." *Teaching Children Mathematics* 2 (February 1999): 353-57.

Kay, Cynthia S. "Is a Square a Rectangle? The Development of First-Grade Students' Understanding of Quadrilaterals with Implications for the van Hiele Theory of the Development Geometric Thought". *Dissertation Abstracts International* 47 (1987): 2934A. University Microfilms No. DA8626590.

Mc-Graw-Hill School Division. Math Van. New York: Mc-Graw-Hill, 1997. Software.

Sarama, Julie, Douglas H. Clements, and Elaine Bruno Vukelic. "The Role of Computer Manipulative in Fostering Specific Psychological/Mathematical Processes." In *Proceedings of the Eighteenth Annual Meeting of the North America Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, edited by E. Jakubowski, D. Watkins, and H. Biske, 567-72. Columbus, Ohio: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education, 1996.

Thomas, Betsy. "An Abstract of Kindergarten Teaching's Elicitation and Utilization of Children's Prior Knowledge in the Teaching of Shape Concepts." Unpublished manuscript' School of Education, Health, Nursing and Art Professions, New York University, 1982.

van Hiele, Pierre M. "The Child's Thought and Geometry." in *English Translation of Selected Writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*, edited by D. Fuys, D. Geddes, and R. Tischler, 243-52. Brooklyn, N.Y.: Brooklyn College, School of Education 1959/1985. ERIC Document Reproduction Service No. 289 697.