

מתקפת שברים! ילדים חושבים ומדברים מתמטיקה

Fractions Attack! Children Thinking and Talking Mathematically

מאת: Patricia C. Alcaro, Alice S. Alston, and Nancy Katims

הופיע ב: Teaching children mathematics , Vol. 6, No. 9, May 2000, pp. 562-567

תרגום: ברכה סגליס



כיצד נדע אם ילדים חושבים באופן מתמטי?
כיצד נעצב סביבה שתעורר חשיבה מתמטית?
מה אנו לומדים על ילדים כתוצאה מכך?

מאמר זה חוקר שאלות אלו באמצעות שתי אפיוזדות שצולמו בווידאו, בהן תלמידי כיתה ד' חושבים ומדברים באופן מתמטי תוך כדי התמודדות עם משימת חקר מורכבת מחיי היומיום הנקראת "מתקפת חטיפים". (משימה זו לקוחה מ- PACKETS - תוכנית למתמטיקה של כיתות היסוד הגבוהות, שפותחה על ידי Educational Testing Service [1998] בתמיכת ה- National Science Foundation). משימה זו עוסקת בנושאים מתוך תוכניות הלימודים האזוריות והארציות וכוללת חשיבה על מושגי היחס במספרים שלמים, בשברים ובמספרים עשרוניים. המשימה כוללת גם תהליכים של פתרון בעיות, חשיבה והנמקה, תקשורת וקשרים (על פי הסטנדרטים של ה- NCTM, 1989).

התלמידים עסקו במשימת חקר זו במשך מספר שיעורים, החל מפעילות מקדימה שהציגה את התוכן של המשימה. כחלק מפעילות זו, התלמידים קיבלו עלון שנקרא "ענייני מזון" (Food Matters - באנגלית גם: "האוכל חשוב"), שהכיל את המידע הבא:

- המשמעות של קלוריה.
- האופן שבו קלוריות נשרפות במהלך פעילות גופנית.
- העובדה שמספר הקלוריות הנשרפות במהלך פעילות משתנה בהתאם לסוג הפעילות ולמשך שלה.
- מספר הקלוריות הנשרפות במהלך 10 דקות של פעילות גופנית מסוגים שונים (ראו איור 1).






אחרי פעילות מקדימה זו, התחילו התלמידים לבצע בקבוצות קטנות את משימת החקר. המטלה שקיבלו התלמידים היתה למצוא שיטה כיצד לחשב כמה זמן צריכים אנשים לעשות פעילות גופנית כדי לשרוף את הקלוריות שבחטיפים שהם אוכלים. כל קבוצה קיבלה טבלה, שכללה את חמשת סוגי הפעילות הגופנית שצוינו בעלון ואת מספר הקלוריות שבשבעה סוגים שונים של חטיפים (ראו איור 2).

איור 1: מידע מתוך העלון על פעילות גופנית

FIGURE 1

Exercise data from the brochure

Here's what you can do in just 10 minutes!

Exercise	Walking	Biking	Skating	Jumping rope	Running
					
Calories	25 Cal	40 Cal	50 Cal	60 Cal	80 Cal






Approximate Number of Calories a 90-pound Person Burns in 10 Minutes

© 1998 Educational Testing Service. Reprinted by permission. All rights reserved.

איור 2: טבלת זמני פעילות גופנית עבור החטיפים השונים

FIGURE 2

Exercise Times Needed to Burn off Calories in Snacks

	Walking	Biking	Skating	Jumping rope	Running
12-15 potato chips (150 calories)					
chocolate cookie (55 calories)					
1/6 of 10" apple pie (420 calories)					
1 slice carrot cake (240 calories)					
3/4 cup ice cream (225 calories)					
15 corn chips (120 calories)					
10 oz soda (110 calories)					

© 1998 Educational Testing Service. Reprinted by permission. All rights reserved.

התלמידים השתמשו במגוון של רעיונות מתמטיים ואסטרטגיות כדי למצוא את משך הזמן הנדרש לפעילות הגופנית על מנת לשרוף את כמות הקלוריות שהכיל החטיף שבחרו. לאחר מכן הם בחנו את השיטות שלהם בבדיקת חטיף שני. הקבוצות הסבירו והצדיקו את הפתרונות שלהם במתכונת של מכתבים. כל קבוצה הציגה בפני הכיתה את הפתרונות שלה, את הגישות שבהן נקטה ואת ההסברים. במהלך ימי הפעילות עודדה המורה שיחות עירניות, שבמהלכן התלמידים שאלו שאלות זה על פתרונם של זה, השוו גישות שונות ועבדו ביחד על מנת להבין את המתמטיקה הכרוכה בפתרונות השונים. עיבוד שנערך מצילומי הווידאו של המפגשים תיעד את הפעילות ואת השיח המתמטיים של התלמידים. שתי אפיזודות מתוכו מציעות הדגמות מעניינות במיוחד של התפתחות ההבנה אצל התלמידים, כמו גם הבלבול והתפיסות השגויות שלהם בנוגע להבנת יחס ושבירים.

הבנת יחס: אפיזודה 1

ביום השני לעיסוקם במשימה, ילדי אחת הקבוצות (אלן, קיילי, שרה ופאול) ביטאו חוסר הסכמה ביניהם וביקשו סיוע. הם בחרו את עוגיית השוקולד (55 קלוריות) כחטיף שלהם וגילו שנדרשות פחות מ-10 דקות של קפיצה בחבל על מנת לשרוף את 55 הקלוריות, משום שקפיצה על חבל שורפת 60 קלוריות ב-10 דקות. קיילי ואלן החליטו שיהיה צורך ב- $9\frac{1}{2}$ דקות, והכינו טבלה שתסביר את דרך החשיבה שלהם. פאול לא השתכנע. המורה גייסה את הכיתה כולה כדי לעזור לתלמידים לחשוב על הדילמה שלהם. קיילי ניגשה ללוח וציירה את הטבלה עבור הכיתה, לבדיקה (איור 3 א').

איור 3 א' - הטבלה הראשונה של הקבוצה לקביעת כמות הקלוריות הנשרפות בעת קפיצה על חבל

מס' דקות קפיצה על חבל	7	8	$9\frac{1}{2}$	10
כמות הקלוריות שנשרפות	30	40	55	60

התלמידים ידעו שקפיצה על חבל במשך 10 דקות שורפת 60 קלוריות, והם הניחו שב-9 דקות ישרפו 50 קלוריות. הם הסיקו מכך שחצי מההפרש של 10 הקלוריות, או 5 קלוריות, יתאימו ל- $\frac{1}{2}$ דקה. מכאן שב- $9\frac{1}{2}$ דקות ישרפו 55 קלוריות. הטבלה שלהם הראתה המשכיות של הגיון זה עבור 7 ו-8 דקות.

המורה שאלה את התלמידים איך הם קבעו ש-7 דקות שורפות 30 קלוריות וש-8 דקות שורפות 40 קלוריות. הקבוצה ענתה שהחישוב שלה היה מבוסס על "10 קלוריות לכל דקה אחת". כאשר המורה ביקשה מהתלמידים להתחיל מ-1 דקה ולהראות את הרעיון שלהם, הילדים בנו טבלה אחרת על הלוח כפי שניתן לראות באיור 3 ב'.

איור 3 ב' - הטבלה השנייה של הקבוצה לקביעת כמות הקלוריות הנשרפות בעת קפיצה על חבל

מס' דקות קפיצה על חבל	1	2	3	4	5	6
כמות הקלוריות שנשרפות	10	20	30	40	50	60

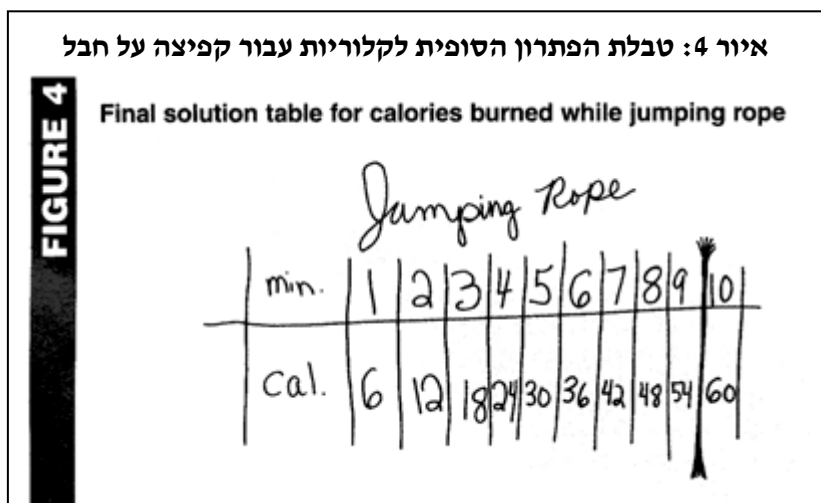
התלמידים נאנחו כאשר נוכחו לדעת שלפי הטבלה החדשה, 6 דקות של קפיצה על חבל שורפות 60 קלוריות, אבל לפי העלון 10 דקות אמורות לשרוף 60 קלוריות. הטבלה הראשונה של הקבוצה הראתה ש- 30 קלוריות נשרפות ב- 7 דקות, אבל הטבלה הזאת הראתה ש- 30 קלוריות נשרפות ב- 3 דקות. בהתבוננות אחורה על הטבלה המקורית של הקבוצה, קבעה הכיתה שהעובדה היחידה שהם ידעו בוודאות היא ש- 10 דקות של קפיצה על חבל שורפות 60 קלוריות. אלן וקייילי הסכימו שיתר המידע שלהם מייצג ניחושים ושהם ידעו שהם אמורים לבדוק את כל הניחושים המתמטיים. כאשר הם בדקו את ההיגיון של שתי הטבלאות שלהם, הם נוכחו לדעת שהניחושים שלהם לא פעלו. אלן הציע רעיון אחר. הוא אמר: "אולי כל מספר אי-זוגי של דקות שורף קלוריות שמסתיימות ב- 5", והחל לחקור רעיון זה באמצעות בניית טבלה שלישית, המופיעה באיור 3 ג'. אך מהר מאוד אלן נוכח לדעת, שגם רעיון זה לא עובד משום ש- 10 דקות של פעילות גופנית הסתכמו רק ב- 50 קלוריות. הכיתה ישבה דמומה למשך מספר שניות, ואז אלן קרא בהתרגשות: "אני חושב שזה סופר בשישיות!"

איור 3 ג' - הטבלה של אלן לקביעת כמות הקלוריות הנשרפות בעת קפיצה על חבל

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	מס' דקות קפיצה על חבל
50	45	40	35	30	25	20	15	10	5	כמות הקלוריות שנשרפות

כשהמורה ביקשה ממנו להסביר רעיון זה, אלן חשב בשקט לזמן מה, ולאחר מכן אמר שהוא לא יכול להסביר זאת. כל התלמידים נראו חושבים בעוצמה רבה על רעיונות אלו. ג'ף, תלמיד אחר בכיתה, הצטרף בהתלהבות לקבוצה שליד הלוח ובנה טבלה שבה הקלוריות הוגדלו בשישיות. התלמידים בקבוצה של אלן השתמשו לאחר מכן בטבלה זו, המופיעה באיור 4, בפתרון הכתוב שלהם.

איור 4: טבלת הפתרון הסופית לקלוריות עבור קפיצה על חבל



כאשר המורה ביקשה מאלן להסביר את הטבלה של ג'ף ואיך הוא ידע שזה יעבוד, אמר אלן שקודם הוא ספר בשמיניות ולא הצליח להגיע ל- 60, אז הוא ספר בשביעיות ושוב לא הצליח להגיע ל- 60. כאשר הוא ספר בשישיות, זה עבד.

בהתייחסות לטבלה של ג'י, הקבוצה מצאה ש- 9 דקות הסתכמו רק ב- 54 קלוריות. אלן אמר מייד שאם 1 דקה היא 6 קלוריות, אז חצי דקה תהיה חצי מ- 6, או 3 קלוריות. כל הכיתה הסכימה שקפיצה על חבל במשך $9\frac{1}{2}$ דקות תשרוף 57 קלוריות.

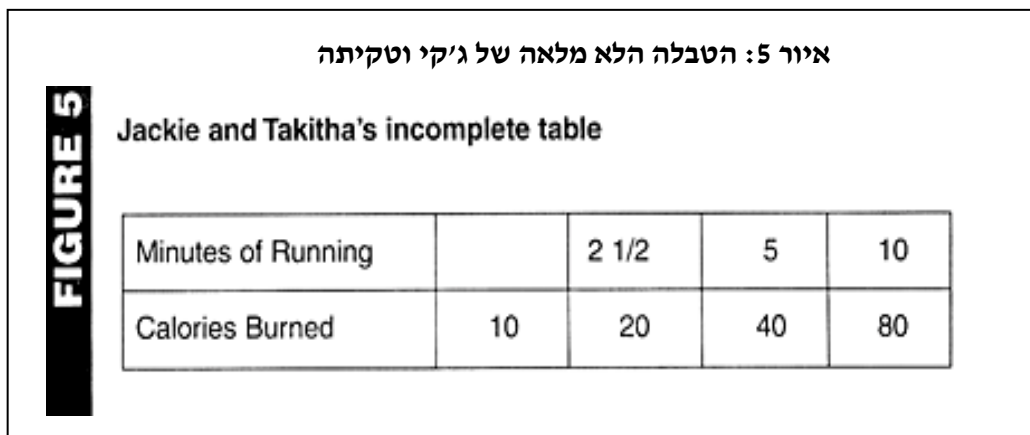
הקבוצות המשיכו לאחר מכן לעבוד על הפתרונות שלהם, כשהם משאירים את הקבוצה של אלן לחשוב על הזמן הנדרש לשריפת 55 הקלוריות שבעוגיית השוקולד. הקבוצה של אלן רשמה אומדן סופי של $9\frac{1}{4}$ דקות בגיליון הפתרונות שלהם.

המתמטיקה שהתגלתה באפיזודה 1

באפיזודה זו התלמידים בנו פתרון שהתבסס על יחסים שווים. תוך כדי התהליך הם הפגינו עדות לחשיבה והנמקה לוגית מתמטית. האתגר שלהם היה למצוא את הדפוס שיאפשר לכל המספרים להיות הגיוניים, כשנתון להם מידע יחיד שהם יודעים שהוא נכון, והוא: ש- 10 דקות של קפיצה על חבל שורפות 60 קלוריות. תוך כדי פתרון הבעיה, הפגינו התלמידים יכולת שימוש בכפל של מספרים שלמים (למשל, "זה סופר בשישיות"), כפל של שברים (למשל, מציאת חצי של 6) ותובנת מספר מתאימה בתחום השבר הפשוט (למשל, קביעת אומדן של $9\frac{1}{4}$ דקות כפתרון משום ש- 9 דקות מתאימות ל- 54 קלוריות ו- $9\frac{1}{2}$ מתאימות ל- 57).

הבנת המשמעות של שברים: אפיזודה 2

ביום שלמחרת, ג'קי וטקיתה ביקשו את עזרת הכיתה כדי לחשב את מספר הדקות שיצטרך לרוץ אדם שרוצה לשרוף בדיוק 10 קלוריות. כאשר המורה ביקשה מהבנות להסביר מה הן חושבות, ג'קי הצביעה על הטבלה שקבוצתה בנתה ואמרה: "היינו צריכים לשרוף 10 קלוריות והיינו צריכים למצוא חצי של $2\frac{1}{2}$. את רואה בריצה איך זה אומר שב- 10 דקות אנחנו שורפים 80 קלוריות. אנחנו המשכנו לרדת כדי לראות מה נקבל" (ראו איור 5).



הבנות התחילו במידע הנתון, שב- 10 דקות ריצה שורפים 80 קלוריות. לאחר מכן הן חילקו כל מספר ב- 2 כדי למצוא שב- 5 דקות של ריצה שורפים 40 קלוריות, וחזרו על פרוצדורה זו על מנת למצוא שב- $2\frac{1}{2}$ דקות של ריצה שורפים 20 קלוריות. הן חילקו ללא קושי את ה- 20 ב- 2 לקבלת 10 קלוריות וידעו שעליהן לעשות אותו הדבר ל- $2\frac{1}{2}$ הדקות. צורך זה היה בעצם הדילמה שלהן.

גי'קי וטקיתה החליטו לבנות ייצוג מוחשי של $2\frac{1}{2}$ באמצעות רצועות נייר מקופלות. הן חתכו רצועות נייר בגודל שווה לייצוג היחידות השלמות, כשהן מכנות אותן "שלמים". לאחר מכן הן קיפלו וחתכו חלק מן הרצועות לחצי כדי ליצור "חצאים". בזמן שהן ייצרו מספרים עבור הפתרון שלהן, הן הדביקו את הצירופים המתאימים של רצועות הנייר על הלוח.

הכיתה היתה מוכנה כעת לחשוב על הבעיה של גי'קי וטקיתה: "מהו חצי של $2\frac{1}{2}$ "? הכיתה שוב נכנסה לדיון נרחב שהוביל לתיאור הבא:

ג'י'קו: "זה $2\frac{1}{2}$, נכון? אז אנחנו הולכים לקחת חצי [ממנו]. אז אנחנו הולכים לקחת חצי מה- $1/2$. זה

רבע. [היא לקחה את רצועת החצי מן הלוח, קרעה אותה לחצי, והסירה אחת מן החתיכות]. אם לוקחים חצי מזה... וזה שווה ל- $1/2$. לוקחים חצי מזה, וזה עוד $1/2$. אנחנו חותכים כל דבר לחצי". תוך כדי דיבור חתכה בוני רצועת נייר אחת שלמה לשני חלקים שווים והסירה חלק אחד. היא חזרה על פעולה זו ברצועת הנייר השלמה השנייה, כשהיא משאירה על הלוח שתי רצועות של חצי ורצועה אחת של רבע.

מורה: "מה זה חצי של $2\frac{1}{2}$ "?

כיתה: " $1\frac{1}{4}$ ".

מורה: "איך קיבלתם $1\frac{1}{4}$? אני רואה שני חצאים ורבע אחד".

כיתה: "שני חצאים עושים שלם ויש גם רבע, אז זה $1\frac{1}{4}$ ".

מורה: "בסדר. האם תוכלו לכתוב תרגיל על הלוח עם ה- $2\frac{1}{2}$ "?

כיתה: " $2\frac{1}{2} - 1/2 = 1\frac{1}{4}$ ". [בזמן שהכתה דיברה, גי'קי כתבה את התרגיל על הלוח].

מורה: " $2\frac{1}{2} - 1/2 = 1\frac{1}{4}$ "?

המורה ביקשה מן התלמידים לבנות שוב את המודל של $2\frac{1}{2}$ ולחשוב בזהירות על מה שהם עשו כאשר ביצעו את תהליך הפתרון. כשהילדים הסירו חציו מה- $2\frac{1}{2}$ בפעם השנייה, היא עודדה אותם לחשוב מחדש על התרגיל.

פאול: "אני מתכוון ש- $2\frac{1}{2}$ פחות חצי של $2\frac{1}{2}$ שווה ל- $1\frac{1}{4}$ ".

בוני: "אני מבינה".

מורה: "בוני, איזה תרגיל את רואה שם?"

בוני: " $2\frac{1}{2}$... חצי מכל דבר... וזה מה שיצא לנו, נכון? אבל מה שנשאר לנו... מה שלקחנו מה- $2\frac{1}{2}$... היה שני חצאים ורבע".

בוני בנתה מחדש את ה- $2\frac{1}{2}$ תוך שימוש ברצועות נייר לייצוג שני שלמים וחצי אחד. בזמן שהיא הסבירה את הרעיון שלה, היא קרעה כל רצועה לחצי והסירה אחד מן החלקים.

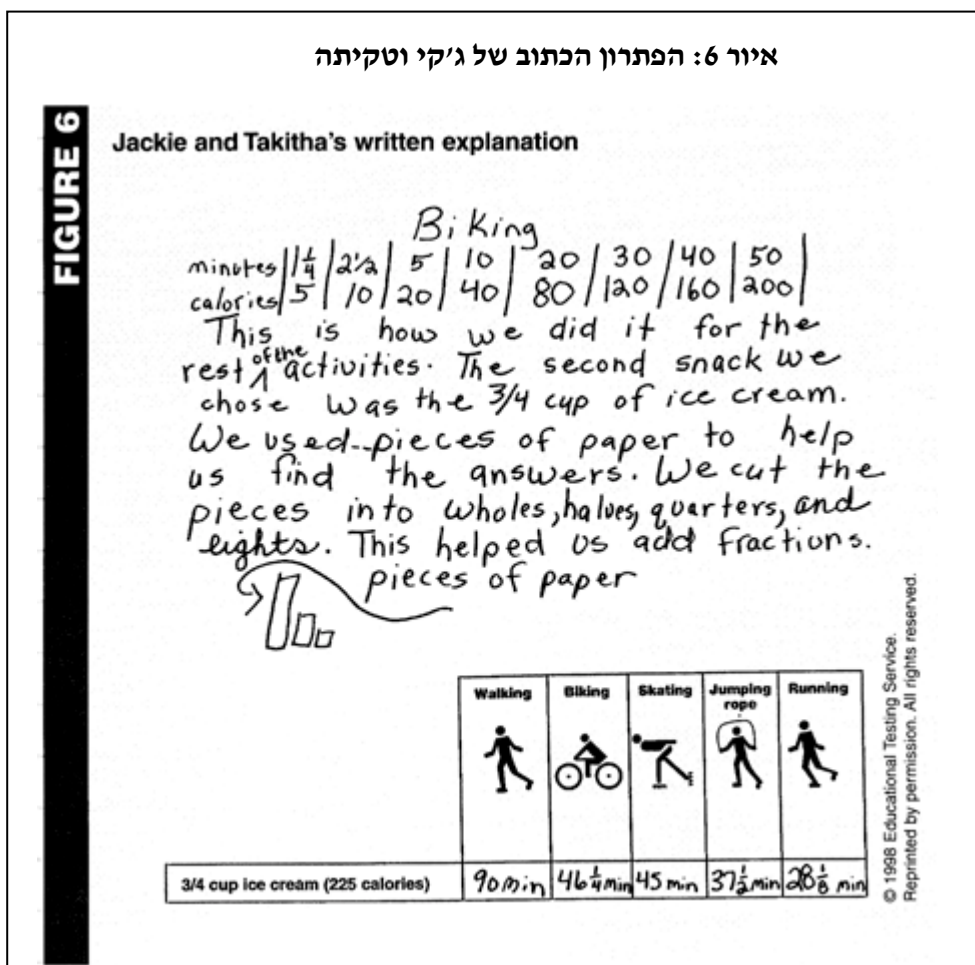
לארה: "שני חצאים הם שלם, בוני".

בוני: "שני חצאים ורבע. אם שמים את אלה ביחד ככה ואת זה ככה, יש $2\frac{1}{2}$. אבל לקחנו חצי. אז אנחנו לוקחים $2\frac{1}{2}$ פחות שלם אחד ורבע".

בזמן שבוני המשיכה להסביר, היא סידרה מחדש את הרצועות פעם נוספת, כדי להראות את ה- $1/2$. הפעם, בזמן שהסירה את החצאים משתי היחידות, היא הדביקה ביחד את היחידות שנותרו כדי להראות שהכמות שנותרה אכן היתה שלם אחד ועוד רבע. טקיתה, שעמדה לצדה של בוני בעת שהיא המחישה את הבעיה, רשמה את התרגיל הבא על הלוח:

$$2 \frac{1}{2} - 1 \frac{1}{4} = 1 \frac{1}{4}$$

הפתרון הכתוב של הבנות, המופיע באיור 6, מתאר כיצד הן השתמשו באסטרטגיה זו בעקבות בחישובים המתייחסים לחטיפים אחרים ולפעילויות גופניות אחרות. הילדות הפגינו בהצלחה את יכולתן להכליל את אסטרטגיית הפתרון שלהן על קבוצות אחרות של מספרים, פרט ליוצא מן הכלל אחד של טעות חישוב פזיזה בחישוב מספר הדקות של רכיבה על אופניים.



גם פתרונות שיצרו תלמידים אחרים בכיתה הראו שהם למדו מהדיון על שימוש ברצועות נייר. למשל, הקבוצה של בוני ולארה גם כן כללה אוסף של רצועות נייר בפתרון שלה. ההסבר והטבלה שלהם העידו על כך שהם השתמשו ברצועות נייר אלו כדי לעזור להם לחבר את השברים $1/8$, $1/4$, $1/2$ על מנת למצוא איזה חלק של דקת ריצה נדרש כדי לשרוף 7 קלוריות בדיוק.

המתמטיקה שהתגלתה באפיזודה 2

כמו באפיזודה הראשונה, הילדים כאן בנו על ההבנה האינטואיטיבית שלהם בנושא יחס ופרופורציה, אבל תמצית האפיזודה היתה ממוקדת במשמעות השבר. התלמידים חילקו מספר מעורב לשני חלקים שווים. מושג מתמטי זה קשה לטיפול אצל תלמידים, ולעיתים קרובות הוא נלמד כחוק טכני שהם משננים ומפעילים ללא הבנה ממשית. במקרה הזה, מכיוון שהתלמידים החליטו להשתמש בייצוג מוחשי שיעזור להם לפתור את הבעיה שלהם, הם יכלו להגיע לפתרון משמעותי. תוך כדי התהליך, הם הראו את ההבנה שלהם במושגים כמו: "שני רבעים עושים חצי", "שני חצאים עושים שלם" ו"חצי מ-5 הוא $2\frac{1}{2}$ ". באותה מידה יש חשיבות לכך שהתלמידים היו מסוגלים להשתמש ברצועות הנייר כמכשיר שעוזר להם בפתרון בעיות דומות.

תצפיות מסכמות

כאשר עשתה המורה הערכה של ביצוע התלמידים בפעילות זו היא גילתה מספר אבחנות חשובות. לדוגמא: היא הבחינה בכך שלמרות שנראה היה שהתלמידים מבינים את מושג היחס כאשר השתמשו בטבלה, הרי שהם לא טרחו לבדוק האם התשובות הראשוניות שלהם היו הגיוניות. אם היו משאירים את התלמידים באפיזודה הראשונה ללא תהיות, הם היו מגישים למורה את הטבלאות הלא בדוקות שלהם בשביעות רצון. עם זאת, כאשר המורה ביקשה מהכיתה לחשוב ביחד על הערכים שהוכנסו בטבלה הראשונה, עסקו התלמידים בתהליך של חשיבה והנמקה, שהסתיים בפתרונות הגיוניים. האפיזודה השנייה תרמה הארה חשובה אודות האופי השברירי של האופן שבו תלמידים תופסים מושגים מסוימים. אפילו אחרי בדיקה והוכחה מוחשית שחצי של $2\frac{1}{2}$ הוא $1\frac{1}{4}$, התקשו התלמידים לבטא פעולה זו כתרגיל. בדוגמה זו, למרות שנראה היה שהתלמידים שלטו במושג, הרי שהביטוי הסימבולי הראשון שלהם העיד על כך שהבנתם עדיין לא הושלמה. חשוב שמחנכים יעזרו לתלמידים לקשר בין ייצוגים מוחשיים, מילוליים וסימבוליים בדרכים הבונות משמעות ומסייעות לתלמידים לפתח דיוק בשימוש של השפה המתמטית. לשתי האפיזודות יש מאפיינים מעניינים משותפים, חלקם משקפים התנהגויות של תלמידים וחלקם התנהגויות של מורים. שתי האפיזודות מתארות עוצמה של חשיבה מתמטית מצד התלמידים.

התלמידים:

- העלו ופתרו שאלות מתמטיות משלהם.
- לא נרתעו מהאופי המתגר של כמה מן השאלות.
- עברו דרך סדרה של נסיונות והחזיקו מעמד עד לפתרון המוצלח.
- השתמשו בחישובים בסיסיים ובמיומנויות בד בבד עם הגיון, הנמקה וחשיבה ברמה גבוהה.
- נתנו כבוד לרעיונות של זולתם ועבדו ביחד לבנות פתרון, תוך הפגנת שיתוף פעולה אמיתי במקום תחרותיות באינטראקציות שלהם.
- היו מוכנים להודות כאשר הם לא הבינו משהו.

המורה שיחקה גם היא תפקיד חשוב, בכך שדאגה:

- להביא את הכיתה כולה ביחד לעזור לקבוצה בודדת להתמודד עם בעיה מאתגרת.
- להשתמש בטכניקה הפשוטה של אמירת "אני לא מבינה" או "אני מבולבלת" על מנת לעודד תלמידים להסביר את חשיבתם בצורה ברורה יותר.
- לא להניח שהתלמידים מבינים ולהתעקש שהם יבהירו את ההיגדים שלהם בכל שלב בדרך.
- להבטיח שכל התלמידים הבינו כל שלב בתהליך, ולבקש מתלמידים אחרים להסביר רעיון במקום להסביר זאת בעצמה.

יש להודות שעבור כיתה זו, מושגים מסוימים הקשורים בשברים הם עדיין שבריריים, אבל נראה היה שהתלמידים ייצרו ייצוגים מנטליים רבי עוצמה לגבי האופן שבו תהליכים מתמטיים אלו פועלים. כאשר מורים מקבלים החלטות לגבי האופן שבו יכסו את תוכנית הלימודים המוטלת עליהם, סוג כזה של משימה יכול להיות בעל עזר רב. פעילויות כאלה יכולות לשמש הן ככלי הוראה והן ככלי הערכה, במטרה לגלות ולתעד כיצד תלמידים בונים מודלים של רעיונות מתמטיים, המסייעים להם לתת משמעות הגיונית למיומנויות בסיסיות ולפרוצדורות, ולאחר מכן משתמשים במודלים אלו במצבים מתמטיים לא מוכרים הדורשים רמות חשיבה גבוהות יותר (Lesh and Lamon 1992).

ביבליוגרפיה

Educational Testing Service (ETS). PACKETS Program for Upper Elementary Mathematics. Princeton, N.J.: ETS, 1998.

Lesh, Richard, and Susan J. Lamon. "Assessing Authentic Mathematical Performance". In: *Assessment of Authentic Performance in School Mathematics*, edited by Richard Lesh and Susan J. Lamon., 17-62. Washington, D.C.: American Association for the Advancement of Science 1992.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM, 1989.