

ראשית הגיאומטריה

The Earliest Geometry

מאת : Douglas H. Clements and Julie Sarama

Teaching Children Mathematics, Vol. 7, No. 2, October 2000 , pp. 82-86

תרגום : ברכה סגליס

"הסטנדרטים של מספר וגיאומטריה הם הגרעין של לימוד המתמטיקה בשנים הראשונות".

"At the core of mathematics in the early years are the Number and Geometry Standards".

(NCTM 2000 p. 77)

מאמר זה בוחן פעילויות ודרכי חשיבה של ילדים בתחום הגיאומטריה בהתאם לנאמר בפרק העוסק בגיל הרך במסמך "עקרונות וסטנדרטים עבור מתמטיקה בבית הספר". בהתאם למסמך זה, הסטנדרטים לגיאומטריה עבור גילאי גן עד י"ב מכוונים לארבעה תחומים עיקריים: תכונות של צורות, יחסי מקום ומרחב, טרנספורמציות וסימטריה, וויזואליזציה (Visualization). בהמשך המאמר נציין, עבור כל תחום, את מטרת הסטנדרט ואת ציפיותיו לגבי הגיל הרך. לאחר מכן נציג קטעי מחקרים ודוגמאות של פעילויות לתלמידים העוסקות בפיתוח רעיונות הקשורים לתחום.

צורות ותכונותיהן

מסמך הסטנדרטים של ה-NCTM מציין שתוכניות ההוראה לגילאי גן עד י"ב צריכות לאפשר לתלמידים "לנתח מאפיינים ותכונות של צורות גיאומטריות דו-ממדיות ותלת-ממדיות ולפתח נימוקים מתמטיים אודות יחסים גיאומטריים" (עמ' 96).
לגבי השנים הראשונות, הציפיות הן שילדים יוכלו:

- לזהות, לשיים, לבנות, לצייר, להשוות ולמייין צורות דו-ממדיות ותלת-ממדיות.
- לתאר מאפיינים וחלקים של צורות דו-ממדיות ותלת-ממדיות.
- לחקור ולנבא את התוצאות של הרכבת צורות ושל הפרדת צורות.

ידע אודות צורות אצל ילדים צעירים

ילדים מתחילים לגבש מושגים של צורות הרבה לפני שהם נכנסים לבית הספר. הם עשויים להתחלה ללמוד לזהות צורות לפי המראה הכללי שלהן, כשהם מציינים, למשל, שצורה נתונה הינה מלבן משום ש"היא נראית כמו דלת". או שהם עשויים להתמקד בהיבט אחד של הצורה, למשל, כינוי צורה בשם משולש משום שהיא "חדה". ילדים יכולים לבצע היטב משימות כאשר הם משתמשים בחשיבה כזו. לדוגמה: הם מזהים בדיוקנות עיגולים וריבועים, גם כאשר יש להם מסיחים "מכשילים". אומנם הם לא מצליחים באותה מידה לזהות מלבנים ומשולשים, אבל הם עדיין מזהים נכון 50 עד 60 אחוז מהם. יחד עם זאת, לעתים קרובות הם מאמינים שריבועים שאינם מונחים במאוזן אינם נחשבים ריבועים.

האם המורים צריכים לעסוק ברעיונות אלו עם ילדים צעירים? כן! הרעיונות של ילדים צעירים אודות צורות - כולל רעיונות מצומצמים - מתייצבים עד גיל שש. אם ילדים בני שש מאמינים, למשל, שמשולשים שאינם שווי-שוקיים אינם משולשים, קרוב לודאי שהם ימשיכו להאמין בתפיסה שגויה זו במשך השנים הבאות - למרות מה שהמורה או ספר הלימוד יאמרו. בנוסף, גם ילדים צעירים מאוד יכולים ללמוד לשיים ולמייין צורות בדייקנות ולתאר את החלקים ואת המאפיינים שלהן. אחד הנבדקים הצעירים ביותר במחקר שערכנו, בן שלוש, קיבל ציון יותר גבוה במשימה כזו מאשר כל הילדים בני השש! לילדים כמוהו היו התנסויות עשירות בצורות מגוונות והם ניהלו שיחות על המאפיינים שלהן. איזה סוגי התנסויות יכולות המורות לספק לילדים?

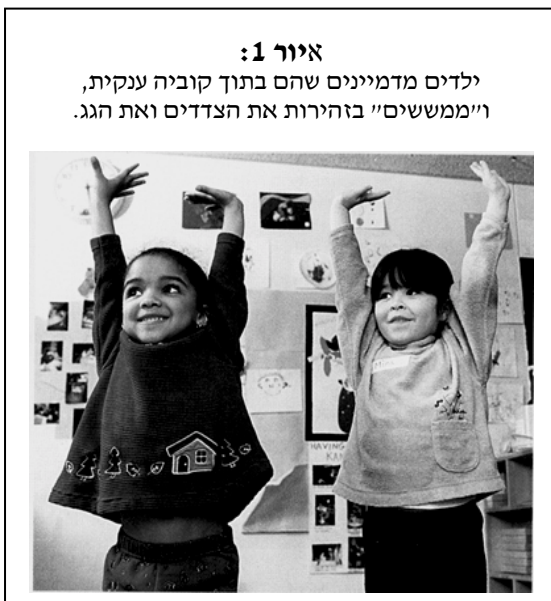
גיאומטריה כל יום

פעילות אחת המעודדת ילדים לתאר מאפיינים של צורות כרוכה בשימוש בצבעי בד או בסרטי הדבקה לשם יצירת צורה על השטיח. הילדים נשאלים אם הם רוצים לעמוד מחוץ לצורה או בתוכה ולשיר שיר. על מנת לקבל רשות לעמוד במקום שבחרו, הם צריכים לענות על שאלה כמו "איך את/ה יודעת שהצורה היא משולש"? כדי לענות נכון, הילדים צריכים לתאר את צלעות הצורה ואת הזוויות שלה. פעילות דומה נעשית בצורות המודבקות על שולחנות הכיתה. התלמידים נדרשים להסתדר בשורות על פי הצורות המודבקות על שולחנותיהם. הצורות מוחלפות מידי שבוע.

להיכנס לצורה

אחרי זיהוי של מספר צורות תלת-ממדיות ושיחה עליהן, בקשו מן הילדים לדמייין שהם נמצאים בתוך אחת הצורות. למשל, לאחר הצגת קופסת שימורים, אמרו לילדים: "דמיינו לעצמכם שאתם נמצאים בתוך גליל כזה. האצבעות שלכם נוגעות בחלק הפנימי של הגליל שלכם. עצמו את עיניכם, ותגעו בגליל שלכם. כעת תגעו בחלק העליון של הגליל. לכו סביב החלק העליון עם הידיים שלכם. איזו צורה אתם משרטטים? לכו סביב החלק התחתון של הגליל עם הרגל שלכם. איזו צורה אתם משרטטים? וזו סביב כל החלק הפנימי של הגליל שלכם".

ניתן לחזור על פעילות זו עם צורות אחרות, כמו קובייה (ראה איור 1). הילדים יכולים "להרגיש" כל אחת מן הפאות ולתאר אחת מהן בפירוט. איזו צורה היא הפאה? בקשו מן הילדים להרגיש את הצדדים הנגדיים, תחילה את הפאה העליונה ואת הפאה התחתונה, אחר כך את הצדדים הנגדיים. כמה פאות יש לקובייה? שאלו אותם אם הם יכולים להזיז את הידיים שלהם לפינה של הקובייה. כמה פינות הם יכולים למצוא למעלה? כמה למטה? כמה פינות יש לקובייה בסך הכל? ביום אחר, בקשו מהילדים להיכנס באמת לתוך קופסה גדולה או לתוך צינור. הם יכולים למשש את הצדדים החיצוניים ואת הצדדים הפנימיים של הקופסה ולשוחח על מה שהם נוגעים.



להרגיש טוב עם צורות

אספו שתי קבוצות זהות של צורות. הראו קבוצה אחת לכיתה ואת השנייה שימרו בצד. חלקו לילדים את הצורות. עודדו אותם להעביר את אצבעותיהם סביב כל צורה. לאחר מכן הכניסו בסתר צורה אחת מתוך הקבוצה השניה לתוך "קופסת המישוש" (איור 2). בקשו מן הילדים להרגיש את הצורה ולנסות לנחש איזו מן הצורות של הקבוצה הגלויה הם ממששים. ילדים אוהבים לחזור על משחק זה פעמים רבות וניתן להזמין אותם לשחק משחק זה בעצמם. השתמשו בצורות המדגישות שני ממדים, וביום אחר השתמשו בגופים תלת-ממדיים. בקשו מן הילדים להתאים צורות לתמונות שלהן ולתאר את הצורות שהם ממששים, כך שחבריהם יוכלו לבחור את הצורה המתאימה מתוך הקבוצה הגלויה. אם הילדים מתקשים, התחילו בעצמים מן העולם האמיתי. על מנת להעריך את מידת ההבנה של הילדים, שאלו שאלות כמו: "איך ידעת? איזה חלק מיששת? הראה לי איך מיששת אותו?"



יחסים של מיקום ושל מרחב

מסמך הסטנדרטים מציין שתלמידים בגילאי גן עד י"ב צריכים להיות מסוגלים "לציין יחסי מיקום ולתאר יחסי מרחב תוך שימוש במערכת צירים ובמערכות ייצוגיות אחרות" (עמ' 96). ילדים צעירים צריכים:

- לתאר, לשיים, לפרש וליישם רעיונות של מיקום יחסי במרחב.
- לתאר, לשיים, לפרש וליישם רעיונות של כיוון ומרחק בינווט במרחב.
- למצוא ולשיים מקומות עם יחסים פשוטים, כמו "קרוב ל", ולהשתמש במערכת צירים, כמו זו שבמפות.

קוביות יחידה ויחסים במרחב

כיתות וגני ילדים של הגיל הרך מלאים בדרך כלל בחומרי המחשה גיאומטריים ובהזדמנויות ללמוד רעיונות על המרחב, למרות שלא תמיד מבחינים בכך. קרולין פרת, הממציאה של קוביות היחידה, נוהגת לספר על ילדים שניסו להכין אורווה בגודל שיספיק לסוס צעצוע. הגנת אמרה לאחת הילדות, דיאנה,

שהיא תוכל לקבל את הסוס אחרי שתכין עבורו אורווה. דיאנה ואליזבת התחילו לבנות מבנה קטן, אבל הוא לא התאים לסוס. דיאנה יצרה אורווה רחבה עם גג נמוך. אחרי מספר נסיונות לא מוצלחים להכניס את הסוס פנימה, היא הסירה את הגג, הוסיפה לבנים לקירות על מנת להגביה את הגג, והחזירה את הגג. לאחר מכן היא ניסתה להגיד במילים מה עשתה: "גג קטן מדי". הגננת הציגה לדיאנה מילים חדשות, "גבוה" ו-"נמוך", ונתנה הסבר חדש לילדים האחרים.

מפות

ראוי לציין, שאפילו ילדים בגיל הגן יכולים לעבוד בצורה מועילה עם מפות. ילדים רבים בני שלוש יכולים לבנות ולהבין מפות פשוטות תוך שימוש בצעצועי שטח כמו בתים, מכוניות ועצים. ילדים אחרים יציבו את העצמים בצורה מקרית. ילדים מפיקים מפות שונות זו מזו משום שיש להם כישורים שונים לציוור ולבניית מפות. כישורים אלו יכולים להתפתח על ידי התנסות, אם כי להתפתחות פיזית וקוגניטיבית יש גם כן תפקיד.

מרבית הילדים יכולים גם ללמוד ממפות. למשל, ילדי גן יכולים ללמוד מהר יותר על התקדמות במסלול בתוך בית משחקים אם הם בוחנים קודם מפה. עם זאת לילדים צעירים יש הרבה מה ללמוד על מפות, כמובן. לדוגמה: ילדי גן יכולים לזהות רחובות במפה אבל להגיד שמגרשי הטניס שבמפה הם דלתות! פעילותם של ילדים עם קוביות מספקת להם התנסויות בעלות פרספקטיבה. לדוגמה: הם עשויים לזהות מבנים של קוביות מנקודות מבט שונות, תוך התאמת תמונות של אותו מבנה המצויר מפרספקטיבות שונות. הם עשויים גם לנסות למצוא את זווית הראייה ממנה צולמה תמונה. התנסויות כאלה מכוונות אל הבלבול שיש לילדים בגיל הרך בקשר לפרספקטיבה כאשר הם "רואים" חלונות ודלתות של בניינים בתצלומי אוויר מאונכים.

באופן דומה, ילדים צריכים לפתח רעיונות אודות כיוונים. הם עשויים לסמן מסלול בסרט הדבקה מהשולחן עד פח האשפה, ולאחר מכן, בעזרת הגננת או המורה, לצייר מפה של מסלול זה. מיקום הינו רעיון מתמטי חשוב נוסף. ילדים עשויים לסדר צורות גזורות של עץ, נדנדה וארגז חול על גבי "לוח לבד" כדי ליצור מפה פשוטה של מגרש משחקים. הם יכולים לשוחח על הרעיון שהזזת פריט, כמו שולחן, בשטח הגן או הכיתה, תשנה את המפה. בעזרת המפה ניתן לאתר ילדים היושבים ליד העץ, על הנדנדה או בארגז החול. תכננו משחקים של "סימני דרך", שבהם תלמידים נותנים כיוונים ורמזים ועוקבים אחריהם.

תנועה ומיפוי בעזרת מחשבים

פעילויות במחשב יכולות להאיץ את הלמידה של כישורי הניווט וקריאת המפה של ילדים. ילדים צעירים יכולים לבצע הפשטה והכללה של כיוונים ומידות כאשר הם עובדים בסביבות ניווט הדורשות מהם לכוון מכונית או בעל חיים על פני המסך. אחד מילדי הגן ביצע הפשטה של המושג הגיאומטרי "מסלול" באומרו: "מסלול הוא כמו העקבות שמשאירה חיפושית שהולכת בתוך צבע סגול". משחקים פשוטים של מערכות צירים במחשב יכולים לעזור לילדים ללמוד רעיונות של מיקום. למשל, בגרסה הממוחשבת של המשחק "צוללות" נדרשים השחקנים לנחש את המיקום בעזרת נקודות ציון, כמו "ב", "5". כאשר הילדים מכניסים נקודת ציון המיועדת להזיז את העצם, אבל הוא מגיע למקום שונה ממה שהם תכננו, המשוב שהם מקבלים הוא טבעי ומשמעותי.

טרנספורמציות וסימטרייה

מסמך הסטנדרטים מציין שתלמידים בגילאי גן עד י"ב צריכים "לעשות טרנספורמציות ולהשתמש בסימטרייה על מנת לנתח סיטואציות מתמטיות" (עמ' 96).

ילדים צעירים צריכים:

- "לזהות וליישם הזזות, שיקופים וסיבובים".
- "לזהות וליצור צורות שיש להן סימטרייה".

תנועות גיאומטריות

ילדים משתמשים בתנועות גיאומטריות באופן אינטואיטיבי כאשר הם מרכיבים פזלים. הם מסובבים את החתיכות, הופכים אותן ומזיזים אותן למקומן. אם הם משתמשים בתוכנות מחשב לעשיית פזלים, הם צריכים לבחור כל תנועה בצורה מכוונת (ראו איור 3). פעילויות כאלו מסייעות לתלמידים להיות מודעים לתנועות ולתוצאה של כל אחת מהן. הם גם לומדים ששינוי מיקום או כיוון של עצם אינו משנה את גודלו או את צורתו.

איור 4

שני תלמידים משתפים פעולה כדי ליצור מבנה סימטרי



איור 3

ילדים עושים רפלקציה על תנועות גיאומטריות באמצעות תפעול צורה מוחשית וקישור התנועה לצורה שעל מסך המחשב

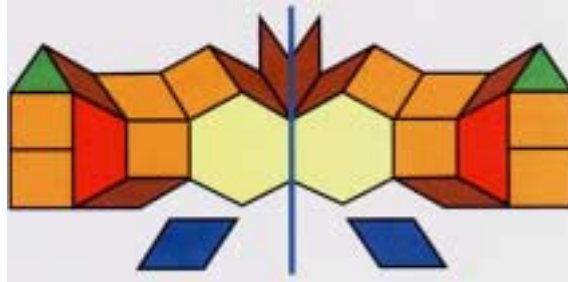


סימטרייה

פעילויות רבות מסייעות לילדים לחקור סימטרייה. המבנים שילדים יוצרים מקובלות היחידה מציגים לעיתים קרובות סימטרייה (ראו איור 4). גננת אחת קראה וחקרה עם הילדים בגן שלה את הספר "עשה שולית גדולה יותר, עשה תולעת קטנה יותר" (וולטר 1971). לאחר מכן היא ביקשה מהילדים ליצור צורות סימטריות בעזרת מראות ועל ידי קיפול וגזירה של ניירות. ילדים יכולים גם לחקור סימטרייה בעזרת מחשבים. פעילויות המבקשות מן הילדים להשלים את ה"חצי" השני של דגם סימטרי או לחקור דגמים של צורות הפלא שיש בתוכן מראות, מאפשרות לילדים לחקור סימטרייה באופן דינמי (ראו איור 5). הדגם הנחקר בפעילויות כאלה הוא תמיד סימטרי.

איור 5

כאשר ילד יוצר או מזיז צורה כלשהי, "תמונת ראי" תואמת זוה באופן סימטרי. הזזה של אחת הצורות לכיוון ימין גורמת לתמונת הראי שלה לזוז סימולטנית לצד שמאל. סיבוב של הצורה בכיוון ימין גורם לתמונת הראי שלה להסתובב לצד שמאל באותה מידה בו זמנית.



וויזואליזציה (העלאה בדמיון)

מסמך הסטנדרטים ממליץ שתלמידים בגילאי גן עד י"ב "ישתמשו בוויזואליזציה, בהנמקה מרחבית, ובמודליזציה גיאומטרית (geometric modeling) לפתרון בעיות" (עמ' 96).
ילדים צעירים צריכים:

- ליצור דימויים מנטליים של צורות גיאומטריות על ידי שימוש בזיכרון מרחבי ובראייה מרחבית.
- לזהות ולייצג עצמים מנקודות מבט שונות.
- לקשר בין רעיונות גיאומטריים לרעיונות על מספרים ועל מדידות.
- לזהות ולמקם צורות גיאומטריות ומבנים בסביבה.

וויזואליזציה של צורות

אפילו ילדים צעירים יכולים לשפר את יכולתם בוויזואליזציה של צורות גיאומטריות וטרנספורמציות. ניתן לבקש מילדים לעצום את עיניהם ולחשוב על ריבוע, ולשאול אותם: "מה אתם רואים? כעת פיקחו את עיניכם, חפשו בחדר ומצאו את אותו הריבוע שחשבתם עליו. מי יכול לומר לי היכן יש ריבוע?" כאשר הילדים מרגישים נוח עם פעילות זו, הגבירו את מורכבות השאלות. למשל: "אני חושבת על צורה שיש לה רק שלוש צלעות ושלוש פינות (זוויות). מהי הצורה שאני חושבת עליה?" או: "עצמו את עיניכם, דמיינו ריבוע שעומד על צדו. כעת חיתכו אותו לחצי מלמטה עד למעלה. איזו צורה אתם רואים?"

תמונות מהירות

ילדים נהנים מפעילויות של תמונות מהירות (כרטיסי הברקה), שבונות את היכולות הוויזואליות. הרעיון הבסיסי הוא להראות צורה או דגם למשך שתי שניות, ולהסתיר אותה. כעת אפשר לבקש מן הילדים ליצור העתק של הצורה. למשל, הראו לילדים דגם פשוט מחומרי המחשה, ועודדו אותם לשחזרו מן החומרים שאצלם. הראו ציור, ובקשו מהילדים לצייר העתק שלו. בכל מצב, עודדו את הילדים לשוחח על מה שהם רואים.

אל לנו להפחית מערכם של הרעיונות שהילדים עשויים ללמוד. "תוכנית אגם", למשל, משתמשת בפעילויות של תמונות מהירות עם ילדים בני שלוש וארבע על מנת ללמד אותם רעיונות הנשמעים די

מופשטים ומתמטיים, כמו **קווים מאוזנים** (איילון ורוזנפלד 1990). ילדים מתבוננים במשך מספר שניות בציורים של קווים מאוזנים בצירופים שונים, ולאחר מכן משחזרים אותם באמצעות מקלות או בציור. בהמשך, הם מסתכלים מהר על עצמים בחדר, כמו שולחן כתיבה, ומציירים רק את הקווים המאוזנים שהם ראו.

פיתוח מתמטיקה עם גיאומטריה

פעילויות מן הסוג הזה יכולות לסייע לילדים ללמוד יותר מאשר גיאומטריה. "תוכנית אגם" – שהיתה מכוונת לפיתוח "השפה הוויזואלית" של ילדים בגילאי שלוש עד שבע – הינה דוגמה אחת. הילדים שהשתמשו בתוכנית זו הגיעו להישגים בגיאומטריה ובכישורים מרחביים וגם במוכנות לחשבון ולכתיבה. המחקר העכשווי שלנו תומך בממצאים אלו (Clements 1999). החינוך בגיל הרך צריך להיות מכוון להוראה שיטתית וארוכת טווח בגיאומטריה. ילדים מגיעים מוכנים יותר לכל המשימות של בית הספר כאשר הם רוכשים את כלי החשיבה ואת יכולת הייצוג של התבונה הגיאומטרית והמרחבית.

ביבליוגרפיה

- Clements, Douglas H. and Julie Sarama. "Preliminary Report of Building Blocks – Foundation for Mathematical Thinking, Pre-Kindergarten to Grade 2: Research-Based Materials Development". NSF Grant No.ESI-9730804. Buffalo, N.Y.: State University of New York at Buffalo, 1999.
- Clements, Douglas H. and Julie Sarama. "Young Children's Ideas about Geometric Shapes." *Teaching Children Mathematics* 6 (April 2000): 482-488.
- Eylon, Bat-Sheva, and Sherman Rosenfeld. *The Agam Project: Cultivating Visual Cognition in Young Children*. Rehovot, Israel: Department of Science Teaching, Weizmann Institute of Science, 1990.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM, 2000.
- Pratt, Carolyn. *I Learn from Children*. New York: Simon & Schuster, 1948.
- Razel, Micha, and Bat-sheva Eylon. "Development of Visual Cognition: Transfer Effects of the Agam Program." *Journal of Applied Development Psychology* 11 (1990): 459-485.
- Walter, Marion. *Make a Bigger Puddle, Make a Smaller Worm*. New York: M. Evans & Co., 1971.