פיתוח "סימני דרך" בשברים

Establishing Fraction Benchmarks

מאת: Barbara J. Reys, OK-Kyeong Kim, and Jennifer M. Bay

הופיע ב: Mathematics Teaching in the Middle School, Vol. 4 No. 8, May 1999, pp. 530-532

תרגום: מיכל סוקניק

השימוש ב"סימני דרך", כגון 0, 1/2, ו- 1, להשוואת שברים אינו מודגש לעיתים קרובות בהוראה. השוואת שברים ל- 0, 1/2, או 1 באמצעות השוואת המונה למכנה, או על ידי מודליזציה מנטלית של השבר, מהווה כלי רב עוצמה לעשיית אומדן על גודלם של שברים, לביצוע הערכות מהירות, ולשיפוט על מידת ההיגיון של תוצאות חישוביות (Bezuk and Bieck, 1992).

אם מבקשים מתלמידים להשוות בין 5/8 ל- 4/9, הטכניקה המסורתית היא למצוא את המכנה המשותף, להפוך את שני השברים לצורות שקולות שלהם, תוך שימוש במכנה משותף זה, ואז להשוות את המונים. לעומת זאת, ניתן לפתור בעיה זו בצורה יעילה יותר על ידי השוואת כל שבר ל- 1/2: 5/8 גדול מ- 1/2 משום שהוא גדול מ- 4/8; ו- 4/9 קטן מ- 1/2, משום ש- 4/9 קטן מ- 4.5/9, או 1/2.

"סימני דרך" שימושיים גם לאומדן התשובות של חישובים עם שברים. לדוגמה, 8/9 + 5/6 זה פחות מ- 2, משום שכל שבר קטן מ- 1. באופן דומה, 3/8 מ- 520 זה פחות מחצי של 520, משום ש- 3/8 זה פחות מ- 1/2. שימוש ב"סימני דרך" מאפשר לתלמידים לאמוד ונותן להם כלי לשיפוט מידת ההיגיון של תשובותיהם.

האם תלמידיכם משתמשים ב"סימני דרך" כדי לחשוב על בעיות עם שברים ולפתור אותן? האם יש להם שיטות יעילות לעשיית אומדן בשברים? על מנת לבדוק שאלות אלה, ראיינו עשרים תלמידים בכיתה ה' אחת. (ראו איור 1). אתם ודאי תשערו, כפי שאנו שיערנו, שתלמידים בכיתות הגבוהות של ביה"ס היסודי, המבצעים חישובים בשברים – מחברים, מחסרים, כופלים ומחלקים – יכולים להיות בעלי תובנה לגבי רעיונות בסיסיים בשברים, כמו ויזואליזציה של כמות שהיא שבר. לפני שתקראו את הממצאים שלנו, בידקו כיצד תלמידים שלכם, בכיתות הגבוהות של בית הספר היסודי, מבינים שברים. לצורך כך השתמשו בראיון הבא. איספו אינפורמציה באמצעות ריאיון עם תלמידים שבחרתם, או על ידי שימוש באוסף השאלות כשאלות פתוחות להערכה כיתתית.

איור 1: שאלות הראיון

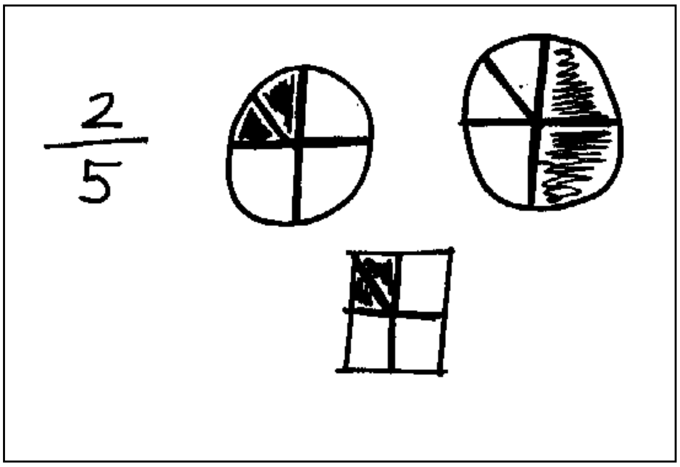
1. חישבו על השבר 2/5. מה אתם יכולים לומר עליו?
   הכינו "דוח" על השבר 2/5. (בקשו מהתלמידים להשתמש בציורים, בהסברים מילוליים, ובכל מה שהם רוצים להשתמש כדי "להרשים את המורה" במה שהם יודעים על 2/5. אחרי תשובותיהם הראשוניות, עודדו אותם להמשיך לחשוב ולכתוב משפטים על השבר 2/5 תוך שימוש בחלק מהשאלות הבאות: כמה הוא גדול? לאיזה מספר הוא קרוב? ממה הוא גדול או קטן יותר?)
2. במסיבה הזמינו כמה פיצות גדולות. כל אחד מהילדים הבאים - ג'ק, ג'ון וג'וש אכל סוג אחר של פיצה. ג'ק אכל 1/3 מפיצה עם זיתים, ג'ון אכל 4/8 מפיצה עם ירקות, וג'וש אכל 3/5 מפיצה עם גבינה. מי אכל הכי הרבה פיצה? הסבירו כיצד ידעתם.
3. האם הסכומים הבאים גדולים או קטנים מ- 1? הסבירו כיצד אתם יודעים. (עודדו את התלמידים להשתמש באומדן).
   א) 3/8 + 4/9   ב) 1/2 + 1/3

ראיינו את תלמידי כיתה ה' בדיוק כשסיימו יחידת לימוד על שברים, שכללה השוואה וסידור של שברים, מציאת שברים שקולים, ושימוש באלגוריתמים חישוביים מקובלים של נייר ועיפרון לחיבור ולחיסור שברים. השאלה הראשונה של הראיון מאפשרת הזדמנות פתוחה לקבוע כיצד תלמידים חושבים על שבר מסוים: האם הם מקשרים אותו למודל פיזי או מנטלי? האם הם משווים אותו לשבר אחר או למספר שלם? האם הם מקשרים אותו לדוגמה מחיי היומיום? השבר 2/5 נבחר משום שזהו שבר פשוט הקרוב ל- 1/2. התלמידים התבקשו ליצור משפטים או ייצוגים רבים ככל האפשר של השבר. מרבית התלמידים הגיבו ברעיון אחד או שניים. תשובותיהם התחלקו לשלוש קטגוריות עיקריות:

1. תארו דימוי מנטלי של אובייקט לדוגמה, שתיים מתוך חמש חתיכות של פיצה (11 תלמידים).
2. ציירו מודל של השבר, תוך שימוש בעיגול או במודל קבוצות (19 תלמידים).
3. קשרו את הגודל של 2/5 ל- 1/2, לדוגמה, 2/5 הוא שבר קטן מ- 1/2 (7 תלמידים).

למרות שתלמידים אלה סיימו לאחרונה יחידת לימוד בת שישה שבועות על שברים, התשובות של שבעה מתוך עשרים התלמידים העידו על תפיסה שגויה בסיסית לגבי שברים: שהשלם לא צריך להיות מחולק לחלקים שווים בגודלם. לדוגמה, שלושה תלמידים ציירו עיגול, חילקו אותו לרבעים, ואז חילקו אחד מהרבעים לחצי, כדי ליצור את החלק שהוא "חמישית". כשנשאלו אם זה משנה אילו שני חלקים מהפיצה צובעים כדי לייצג 2/5, תלמיד אחד אמר שזה לא משנה אם צובעים שתי חתיכות "גדולות" או שתי חתיכות "קטנות", ולא הפריע לו שהבחירה הובילה לייצוגים שונים של השבר 2/5. ראו איור 2.

איור 2: ציורים לא מדוייקים של 2/5



מתוך עשרים התלמידים שרואיינו, שבעה אמרו בתחילה ש- 2/5 הוא פחות מ- או קרוב ל- 1/2. לאחר שניתן להם רמז, (לדוגמה, האם 2/5 יותר מחצי או פחות מחצי?), שישה תלמידים נוספים זיהו נכון את 2/5 כשבר קטן מ- 1/2. התלמידים השוו את המונה למכנה, ושמו לב לכך ש- 2 קטן מ- 2.5; לכן השבר קטן מ- ½. חלק מתלמידים אלה השתמש באופן טבעי ב- 1/2 כדי לחשוב על הגודל של שברים אחרים; אחרים עשו זאת לאחר שקבלו רמז. שאר שבעת התלמידים השתמשו רק בשיטה של מכנה משותף כדי לבצע את ההשוואה.

בשאלה השנייה של הראיון התבקשו התלמידים להשוות את הגדלים היחסיים של 1/3, 4/8 ו- 3/5. שברים אלה נבחרו, בין השאר, משום שהם קטן מ- 1/2, שווה ל- 1/2 וגדול מ- 1/2, בהתאמה.

היינו סקרנים לראות האם תלמידים ישתמשו ב- 1/2 כ"סימן דרך" להשוואת השברים, או האם הם ישתמשו באסטרטגיה של מכנה משותף שאותה למדו קודם לכן. טבלה 1 מסכמת את האסטרטגיות בהן תלמידים השתמשו **בתחילה**, ללא רמז, כדי להשוות בין השברים.

טבלה 1: האסטרטגיות והתוצאות ההתחלתיות של התלמידים בהשוואת השברים 1/3, 3/5, ו- 4/8

אסטרטגיה	נכון	לא נכון	סה"כ
ציירו ציור של כל שבר והשוו בין הציורים	2	7	9
מצאו מכנה משותף (כל פעם שני מכנים)	3	2	5
השתמשו ב"סימן הדרך" ½ להשוואת השברים	5	1	6
סה"כ	10	10	20

למרות ש"סימני דרך" לא היו חלק מרצף ההוראה שהתלמידים עברו, שישה תלמידים השתמשו ב- 1/2 להשוואת השברים, וחמישה מהם הצליחו לעשות זאת נכון. לדוגמה: תלמיד אחד אמר: "ג'וש אכל הכי הרבה פיצה, כי 4/8 זה חצי, 1/3 זה פחות מחצי, ו- 3/5 זה יותר מחצי." לאסטרטגיה זו של "סימני דרך" היה אחוז הצלחה גבוה יותר משל שתי האסטרטגיות האחרות של ציור ומציאת מכנה משותף.
השימוש ב"סימני דרך" לא רק שהביא ליותר תשובות נכונות, הוא גם היה האסטרטגיה "הכי קלה" בה השתמשו, ודרש מעט זמן או מאמץ קוגניטיבי. לעומת זאת, שבעה מתוך תשעה תלמידים הסתמכו על ציורים לא מדויקים שציירו כדי לקבוע את השבר הגדול ביותר. למעשה, אפילו שני התלמידים שקבלו תשובה נכונה כשהשתמשו באסטרטגיה של ציור, הסתמכו על ציורים לא מדויקים.
חמישה מתוך עשרים התלמידים הפכו את השברים לשברים שקולים עם מכנה משותף. לאחר רמז, כמה מתלמידים אלה ציינו שהם יכלו גם להשוות כל שבר ל- 1/2 כדי למצוא את השבר הגדול ביותר. כשנשאלו מדוע השתמשו באסטרטגית המכנה המשותף, כמה תלמידים ציינו שמציאת מכנה משותף היתה "לעשות מתמטיקה" או "להשתמש במתמטיקה." תלמידים אחדים הודו שהם גילו את אסטרטגית "סימני הדרך" רק בזמן הראיון, לאחר שהמראיין נתן להם רמז, ולא היו בטוחים האם זו הדרך הנכונה לעשות זאת.
השאלה השלישית התמקדה בחיבור שברים. למרות שתלמידים למדו את האלגוריתם הסטנדרטי, הם לא דנו בזמן הלימוד באומדן של שברים. בשתי הבעיות כל מחובר היה קטן מ- 1/2, כך שאם תלמידים השתמשו ב"סימן הדרך" של 1/2, הם יכלו לראות שהסכום היה פחות מ- 1. בפריט הראשון, 4/9 + 3/8, השברים היו מעט מסובכים, כך שמציאת תשובה מדויקת תוך שימוש באלגוריתם של מכנה משותף היתה מסורבלת.
רק שלושה מתוך עשרים התלמידים נתנו אומדן של "בערך 1" לבעיה הראשונה. כל אחד מהם הסביר את האסטרטגיה כהשוואת כל שבר ל- 1/2. שאר התלמידים לא נתנו כל עדות של חשיבה על הגודל היחסי של 3/8 או 4/9. למעשה, כשלא הורשה להם למצוא את התשובה המדויקת, שבעה עשר מתוך עשרים תלמידים אלה, או 85%, לא הצליחו למצוא אומדן הגיוני.
הפריט השני, 1/3 + 1/2 , מוקם אחרון, כדי לראות האם תלמידים יישמו אסטרטגיות שהם למדו בפריט הראשון. למעשה, שנים עשר תלמידים מצאו תשובה הגיונית. שבעה תלמידים מתוכם ציינו

שמאחר ש- 1/3 הוא פחות מ- ½, אז הסכום חייב להיות פחות מ- 1. שמונת התלמידים הנותרים לא היו מסוגלים לתת אומדן הגיוני – הם השתמשו באלגוריתם שגוי, ניחשו, או התיאשו.

השלכות להוראה וללמידה

מורים יכולים ללמוד רבות על הבנת תלמידיהם את נושא השברים תוך שימוש בשאלות אחדות בלבד. תלמידים שיש להם הבנות שגויות בסיסיות בדבר חוסר הצורך בחלקים שווים בגודלם כדי לייצג שלמים מחולקים, יתקשו להשתמש באסטרטגיות של "סימני דרך", כמו השוואת שברים ל- 1/2. מורים יכולים להחליט שחלק מהתלמידים זקוק ליותר התנסות בויזואליזציה של שברים. תנו לתלמידים לצבוע חלקים שבריים של צורות שונות, תנו להם לסמן שבר על ישר מספרים עם נקודות קצה של 0 ו- 1, או תנו להם להפריד ריבועים כדי להדגים כמות המתאימה לשבר. סוגים אלה של פעילויות מספקים הזדמנויות לתלמידים לראות כיצד שברים נראים במודלים של שטח ובמודלים לינאריים, וככמויות. כל הייצוגים האלה חשובים לתלמידים כדי שתהיה להם המשגה מלאה של שברים. יתכן שפעילויות אלה מזכירות עבודה הנעשית בכיתות נמוכות יותר, אולם הוראה מתקנת כזו הינה הכרחית עבור תלמידים שאינם יודעים שחלקים שבריים חייבים להיות בגודל שווה לפני שהם עוברים לפרוצדורות מורכבות עם שברים. עיסוקם של תלמידים אלה באופן קבוע במודלים של שברים, יכול לשפר את הבנתם הבסיסית.
על מנת להתחיל להשתמש ב"סימני דרך" כתהליך טבעי ואינסטינקטיבי, תלמידים יכולים להיתרם מהדגמות מכוונות ומרמזים של המורה. מורים יכולים לעזור לתלמידים לזהות את "סימני הדרך" ולהשתמש בעוצמה שלהם על ידי חשיבה בקול רם בסיטואציות שונות. לדוגמה: אם שבעה עשר מתוך כיתה של עשרים ושמונה תלמידים נוסעים באוטובוס, המורה יכול לייצג מצב זה כשבר $\frac{17}{28}$ ולציין ש"יותר מחצי כיתה נוסעת באוטובוס."

לפני שהמורה מחשב $48 \times \frac{11}{12}$, הוא יכול להגיד: "אם כופלים $\frac{11}{12}$ ב- 48, אז המכפלה צריכה להיות כמעט 48." הדגמה ועידוד השימוש ב"סימני דרך", נותן לגיטימציה לתהליך השימוש ב"סימני דרך" בראשם של התלמידים.
תשובות התלמידים לפריטים של האומדן מצביעות בברור על כמה תפיסות שגויות שיש לתלמידים לגבי שברים ולגבי תהליך האומדן. מציאת אומדן של סכומי שברים קלה יותר מאשר מציאת תשובה מדויקת, אם יש הבנה מושגית. בסיס מושגי זה כולל הבנה של גודל השברים, במיוחד כיצד הם מתייחסים ל"סימני דרך" כמו 0, 1/2 ו- 1; קיומם של מודלים מנטליים בהם ניתן להשתמש כדי לראות שברים (לדוגמה, ייצוג של עיגולים, או מודל של ישר מספרים); והבנה של המשמעות ושל הקשר שבין המונה למכנה (לדוגמה: מה אומר לי המכנה לגבי השבר?)
כשם שחשוב ללמד תלמידים כיצד להשתמש באומדן, חשוב גם ללמד אותם שהאומדן הוא תהליך שימושי ובעל ערך. מחוץ לשיעורי המתמטיקה שלהם, התלמידים יעשו הרבה יותר אומדן מאשר ימצאו תשובות מדויקות. שאלת מספר שאלות מידי יום היא דרך אפקטיבית להגביר את יכולתם של התלמידים לעבוד עם שברים ולהעביר את המסר של החשיבות של פעולה בצורה גמישה עם שברים. מורים די מודעים לכך שתלמידים בכיתות הגבוהות של בית הספר היסודי נאבקים עם שברים, ושרבים

מהם מגלים תובנה מספרית נמוכה כשהם מבצעים פעולות בשברים. אנו מקווים שדיון זה יעודד אתכם להעריך את ההבנה ב"סימני דרך" ואת השימוש בהם בקרב תלמידיכם, ולהפוך את "סימני הדרך" לחלק אינטגרלי מתכנית הלימודים של השברים בבית הספר היסודי.

ביבליוגרפיה

Bezuk, Nadine S., and Marilyn Bieck. "Current Research on Rational Numbers and Common Fractions: Summary and Implications for Teachers." *In Research Ideas for the Classroom: Middle Grade Mathematics*, edited by Douglas T. Owens, 118-36. New York: Macmillan Publishing Co., 1992.