

# تطوير "دالات" بالكسور

## Establishing Fraction Benchmarks

الكاتبون : Barbara J. Reys, OK-Kyeong Kim, and Jennifer M. Bay

ظهر في : Mathematics Teaching in the Middle School, Vol. 4 No. 8, May 1999

ترجمة: ابتسام عبد الخالق

عادة في تدريس موضوع الكسور لا يعطى الاهتمام لاستعمال "دالات" مثل 0،  $\frac{1}{2}$ ، 1 لمقارنة الكسور. إن مقارنة الكسور مع 0،  $\frac{1}{2}$ ، 1 عن طريق مقارنة البسط مع المقام، أو عن طريق تمثيل الكسر ذهنياً، يعتبر أداة مهمة لتقدير كبر الكسور، لإجراء تقييمات سريعة، ولتحكيم منطقي على نتائج حسابية (Bezuk and Bieck, 1992).

إذا طلب من التلاميذ المقارنة بين  $\frac{5}{8}$  و  $\frac{4}{9}$ ، الاستراتيجية المتبعة للمقارنة هي إيجاد المقام المشترك، يحوّل كل كسر الى صيغة مكافئة له وذلك لاستغلال المقام المشترك، وعندها تتم المقارنة بين البسطين. مع ذلك يمكن حل هذا السؤال بطريقة مجدية أكثر وذلك بواسطة مقارنة كل من الكسرين مع  $\frac{1}{2}$  :  $\frac{5}{8}$  أكبر من  $\frac{1}{2}$  لأنه أكبر من  $\frac{4}{8}$ ،  $\frac{4}{9}$  أصغر من  $\frac{1}{2}$  لأن  $\frac{4}{9}$  أصغر من  $\frac{4.5}{9}$  أو  $\frac{1}{2}$ .

إن "الدالات" عملية أيضاً لتقدير نتائج الحسابات في الكسور. مثال:  $\frac{5}{6} + \frac{8}{9}$  أصغر من 2 لأن كل واحد من الكسرين أصغر من 1. بطريقة مماثلة  $\frac{3}{8}$  الـ 520 أصغر من نصف الـ 520، لأن  $\frac{3}{8}$  أصغر من  $\frac{1}{2}$ . إن استعمال "الدالات" تساعد الأولاد على التقدير وتكسبهم وسيلة تحكيم لمدى منطقية أجوبتهم.

هل يستعمل تلاميذكم "الدالات" من أجل التفكير وحل مسائل تحوي كسوراً؟ هل لديهم تقنيات كفؤة لإجراء تقديرات في الكسور؟ لفحص ذلك أجرينا مقابلات مع 20 تلميذاً في الصف الخامس (من نفس الصف) (شكل 1). يمكنكم الافتراض، كما افترضنا نحن، بأن تلاميذ الصفوف العليا من المرحلة الابتدائية والذين يجمعون، يطرحون، يضربون ويقسمون كسوراً من المفروض أن يكون لديهم حساً بأفكار أساسية في الكسور مثل ملاحظة مقادير كسرية. قبل أن تقرأوا نتائج بحثنا، إفحصوا مفهوم الكسر عند تلاميذكم في الصفوف العليا من المرحلة الابتدائية وذلك بواسطة إجراء المقابلة التالية. جمّعوا المعلومات عن طريق إجراء المقابلة مع مجموعة تلاميذ تختارونهم، أو عن طريق استعمال مجموعة الأسئلة كأسئلة مفتوحة لتقييم تلاميذ الصف.

### شكل 1 أسئلة المقابلة

1. فكّروا بالكسر  $2/5$ . ماذا يمكنكم القول عنه؟ حضّروا لي "تقريراً" عن الكسر  $2/5$ . (أطلبوا من التلاميذ استعمال رسومات، تفسيرات كلامية، أو أي شيء يعرفون حول الكسر  $2/5$  كي يترك إنطباعاً عليك (المعلم/ة). بعد إجاباتهم الأولية حتّوهم على استمرار التفكير وكتابة جمل عن الكسر  $2/5$  مستعملين بعضاً من الأسئلة التالية: ما كبره؟ لأي عدد هو قريب؟ من أي عدد هو أكبر أو أصغر).
2. تم إحضار عدة أقراص كبيرة من البيتسا. كل من جاك، جون وجاد أكل نوعاً مختلفاً من البيتسا. أكل جاك  $1/3$  من بيتسا الزيتون، أكل جون  $4/8$  من بيتسا الفقع، وجاد أكل  $3/5$  من بيتسا الفلفل. من أكل أكثر؟ إشرحوا كيف عرفتم.
3. هل نتائج التمارين التالية أكبر أم أصغر من 1؟ إشرحوا كيف عرفتم. (حتّوا تلاميذكم على استعمال التقدير).  
(أ  $3/8 + 4/9$  ب  $1/2 + 1/3$ )

## وصف البحث

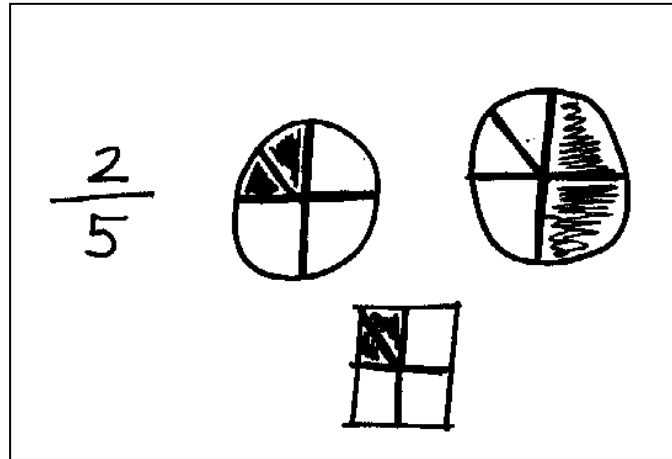
قابلنا تلاميذ الصف الخامس وكان عددهم 25 تلميذاً، مباشرة بعد أن أنهوا دراسة وحدة الكسور، والتي احتوت مقارنة وترتيب كسور، وكتابة صيغ مكافئة للكسور، واستعمال الغورتمات حسابية متبعة لجمع وطرح الكسور. السؤال الأول من أسئلة المقابلة يتيح فرصة مفتوحة لتحديد وتقرير طريقة تفكير التلاميذ في كسر ما: هل يربطونه مع نماذج ملموسة أو ذهنية؟ هل يقارنونه مع كسر آخر أو مع عدد صحيح؟ هل يربطونه مع مثال من الحياة اليومية؟ تم اختيار الكسر  $2/5$  لأنه كسر مألوف وقريب من  $1/2$ . تم تشجيع التلاميذ على أن يكونوا جملاً وتمثيلات كثيرة قدر الإمكان للكسر.

أغلب التلاميذ تجاوبوا بفكرة واحدة أو اثنتين. تتلخص تجاوباتهم في ثلاث فئات:

1. وصفوا أوصافاً ذهنية لغرض ما (مثال: إثنان من خمسة قطع بيتسا) (11 تلميذاً).
2. رسموا نموذجاً للكسر بواسطة دوائر أو نموذج المجموعات (19 تلميذاً).
3. ربطوا كبر ال  $2/5$  مع ال  $1/2$  (مثال:  $2/5$  هو كسر أصغر من  $1/2$ ) (7 تلاميذ).

بالرغم من أن هؤلاء التلاميذ قد أنهوا مؤخراً دراسة وحدة الكسور والتي استمرت 6 أسابيع، فإن إجابات 7 تلاميذ من 20 تلميذاً تدل على خطأ أساسي بمفهوم الكسر: ليس بالضرورة تقسيم الصحيح لأقسام متساوية. مثلاً، رسم ثلاثة تلاميذ دائرة، قسموها لأرباع، وبعد ذلك قسّموا أحد الأرباع لنصفين وذلك من أجل تمثيل الخمس. عندما سألناهم إذا كان هناك فرق في اختيار أي قسمين من البيتسا وتلوينها لتمثيل ال  $2/5$ ، أجاب أحد التلاميذ بأنه لا يوجد فرق بتلوين قطعتين "كبيرتين" أو قطعتين "صغيرتين"، ولم تكن عنده مشكلة بأن اختياره أدى إلى تمثيلات مختلفة للكسر  $2/5$ . (شكل 2).

شكل 2: رسومات غير دقيقة لـ  $2/5$



في البداية، سبعة تلاميذ من العشرين تلميذًا الذين قابلناهم أجابوا بأن  $2/5$  أصغر من أو قريب إلى الـ  $1/2$ . مع إعطاء رمز (مثل: هل  $2/5$  أكبر أم أصغر من  $1/2$ ؟)، ستة تلاميذ آخرين ميّزوا بشكل صحيح أن  $2/5$  كسر أصغر من  $1/2$ . فهم قارنوا البسط مع المقام ولاحظوا أن 2 أصغر من 2.5؛ لذلك الكسر أصغر من  $1/2$ . قسم من التلاميذ استعملوا الـ  $1/2$  بشكل طبيعي للتفكير بـ كسر أكبر كسور أخرى؛ تلاميذ آخرون استعملوا هذه الطريقة بعد إعطائهم رموز لذلك. باقي التلاميذ (عددهم سبعة) استعملوا طريقة تساوي المقامات لإجراء المقارنة. في السؤال الثاني من المقابلة طلب من التلاميذ مقارنة نسبة للكسور  $1/3$ ،  $4/8$ ،  $3/5$ . تم اختيار هذه الكسور لأن الكسر الأول أصغر من  $1/2$  والثاني يساوي  $1/2$  والثالث أكبر من  $1/2$ . كان عندنا حب الاستطلاع إذا كان التلاميذ سيستعملون الـ  $1/2$  كعلامة "دالة" للمقارنة بين الكسور أم أنهم سيستعملون استراتيجية المقام المشترك والتي تعلموها ليس من مدة.

الجدول 1 يلخص الاستراتيجيات التي استعملها التلاميذ في البداية، بدون إعطاء رموز، من أجل مقارنة الكسور.

جدول 1: الاستراتيجيات والنتائج الأولية للتلاميذ في مقارنة الكسور  $1/3$ ،  $3/5$ ، و  $4/8$

| المجموع الكلي | غير صحيح | صحيح | الاستراتيجية  |
|---------------|----------|------|---|
| 9             | 7        | 2    | رسموا رسمة لكل كسر وقارنوا بين الرسومات             |
| 5             | 2        | 3    | وجدوا مقامًا مشتركًا (مقامان في كل مرة)             |
| 6             | 1        | 5    | استعملوا "دالات"، استعملوا الـ $1/2$ لمقارنة الكسور |
| 20            | 10       | 10   | المجموع الكلي                                       |

بالرغم من أن "الدالات" لم تكن جزءاً من سلسلة التدريس التي تدرّب عليها التلاميذ، فقد استعمل 6 تلاميذ الـ 1/2 لمقارنة الكسور، ونجح 5 منهم بذلك. مثال: قال أحد التلاميذ: "جاء أكل القسم الأكبر من البيتسا لأن 4/8 تساوي نصف، و 1/3 أصغر من نصف، و 3/5 أكبر من نصف". إستراتيجية "الدالات" هذه كان لها نسبة نجاح أكبر من إستراتيجية الرسم وإستراتيجية المقام المشترك. إن استعمال "الدالات" لم يسبب بإعطاء إجابات صحيحة فقط بينما كانت هذه الإستراتيجية هي الأسهل من بين الإستراتيجيات الأخرى، حيث تطلبت أقل وقت وأقل جهد ذهني. بالرغم من ذلك، سبعة تلاميذ من تسعة إعتدوا على رسومات غير دقيقة قاموا برسمها من أجل أن يقرروا أي كسر هو الأكبر. عملياً حتى التلاميذ (عددهم إثنان) الذين حصلوا على جواب صحيح، عندما استعملوا إستراتيجية الرسم فهم إعتدوا على رسومات غير دقيقة.

خمسة من العشرين تلميذاً حوّلوا الكسور إلى كسور مكافئة ذات مقام مشترك. بعد إعطاء رمز، قسم من هؤلاء التلاميذ إشاروا إلى أنه كان بإمكانهم مقارنة كل كسر مع الـ 1/2 من أجل إيجاد الكسر الأكبر. عندما سألناهم عن سبب استعمالهم إستراتيجية المقام المشترك، عدة تلاميذ قالوا بأن إيجاد المقام المشترك هو "عمل رياضي" أو "إستعمال للرياضيات". إعترف بعض التلاميذ بأنهم إكتشفوا طريقة "الدالات" فقط خلال المقابلة معهم، وذلك بعد أن حصلوا على رمز، ولم يكونوا متأكدين بأن هذه الطريقة صحيحة.

السؤال الثالث تمحور في موضوع جمع الكسور. بالرغم من أن التلاميذ قد تعلموا الألوغريثم المألوف، فهم لم يناقشوا خلال دراستهم تقدير الكسور. في كل من التمرين كان كل من المضافين أصغر من 1/2، هذا لو استعمل التلاميذ الـ 1/2 كإحدى "الدالات" فكان بإمكانهم أن يروا بأن حاصل الجمع أصغر من 1. في البند الأول:  $3/8 + 4/9$ ، الكسور معقدة و "مرعبة" نوعاً ما، فإيجاد إجابة دقيقة باستعمال الغورثم المقام المشترك كان معقداً.

ثلاثة تلاميذ من العشرين أعطوا إجابة تقديرية "تقريباً 1" للتمرين الأول. كل واحد من التلاميذ فسّر إستراتيجية حله عن طريق مقارنة كل كسر مع 1/2. باقي التلاميذ لم يفكروا قطعياً بالكبر النسبي للكسرين 3/8 و 4/9. عملياً عندما لم يسمح لهم بإيجاد الجواب الدقيق، 17 تلميذاً من العشرين، أي 85% لم ينجحوا باستنباط تقدير معقول. البند الثاني  $1/2 + 1/3$  وُضع بالآخر، لنرى إذا كان التلاميذ سيطبّقون إستراتيجيات قد تعلموها من البند الأول. عملياً، 12 تلميذاً وجدوا إجابة منطقية. من بينهم 7 أشاروا إلى أن الـ 1/3 أصغر من الـ 1/2، لذلك المجموع يجب أن يكون أصغر من 1. ثمانية التلاميذ الآخرين لم يتمكنوا من إعطاء تقدير معقول – فهم استعملوا ألوغريثم غير صحيح، خمنوا أو يتسوا من ذلك.

## إسقاطات على التعليم والتعلم

يستطيع المعلمون التعلم الكثير عن فهم التلاميذ لموضوع الكسور عن طريق استعمال بعض الأسئلة. إن التلاميذ الذين لديهم مفاهيم خاطئة حول عدم الحاجة للأقسام المتساوية لتمثيل الكسور، سيواجهون صعوبة باستعمال إستراتيجيات "الدالات" مثل مقارنة كسور مع  $1/2$ . المعلمون هم الذين يقررون أي تلاميذ بحاجة لتمرن أكثر من الناحية البصرية بالنسبة للكسور. أعطوا التلاميذ أن يلونوا أقسامًا كسرية لأشكال مختلفة، أعطوا التلاميذ أن يعلموا كسورًا على مستقيم أعداد محدد بال 0 و 1 أو أعطوهم أن يفصلوا تربيكات لتمثيل كمية ملائمة لكسر. هذه الأنواع من الفعاليات تتيح الفرصة للتلاميذ لرؤية تمثيلات مختلفة للكسور: تمثيل بالمساحة، تمثيل طولي وتمثيل كمّي. كل هذه التمثيلات مهمة للتلاميذ من أجل أن تكون لديهم صورة مكتملة عن المفاهيم الكسرية. مع أن هذه الفعاليات تذكر بالعمل في الصفوف الأصغر، إلا أن طريقة التدريس المصححة هذه ضرورية للتلاميذ الذين لا يعرفون بأن الأجزاء الكسرية يجب أن تكون متساوية بالكبر وذلك قبل الانتقال لعمليات مركبة أكثر بالكسور. إن تشغيل التلاميذ بصورة منتظمة بنماذج الكسور، بإمكانه أن يحسّن الفهم الأساسي لها.

من أجل البدء باستعمال "الدالات" كعملية طبيعية، بإمكان التلاميذ الاستفادة من الأمثلة المتعمدة من قبل المعلم وكذلك من الرموز التي يعطيها. بإمكان المعلم أن يساعد تلاميذه بتمييز "الدالات" وباستعمالها عن طريق التفكير بصوت عالٍ بحالات مختلفة. مثلاً: إذا سافر 17 تلميذًا من تلاميذ صف فيه 28 تلميذًا بالباص، فيإمكان المعلم تمثيل هذه الحالة ككسر  $\frac{17}{28}$  وأن يذكر بأن "أكثر من نصف تلاميذ الصف يسافرون بالباص". قبل البدء بحساب التمرين  $48 \times \frac{11}{12}$  على المعلم أن يقول: "إذا ضربنا  $\frac{11}{12}$  ب 48 فإن حاصل الضرب يجب أن يكون تقريبًا 48". إن إعطاء الأمثلة وتشجيع استعمال "الدالات"، يعطي شرعية لعملية استعمال "الدالات" بعقل التلميذ.

إجابات التلاميذ بالنسبة للنبود المتعلقة بالتقدير تشير بشكل واضح إلى عدة مفاهيم خاطئة لدى التلاميذ حول الكسور وحول عملية التقدير. إيجاد جواب تقريبي لحاصل جمع كسور أسهل بكثير من إيجاد إجابة دقيقة، هذا إذا وجد مفهوم صحيح للمفاهيم. هذا المفهوم الأساسي يشمل فهم كبر الكسور، خاصة نسبة إلى "الدالات" مثل 0،  $1/2$  و 1؛ وجود نماذج ذهنية يمكن استعمالها من أجل رؤية الكسور (مثال: التمثيل بدوائر أو نموذج مستقيم الأعداد)، وفهم معنى وعلاقة البسط بالمقام (مثال: ماذا يعني البسط بالنسبة للكسر؟).

مثلما هو مهم تعليم التلاميذ كيفية استعمال التقدير، فمن المهم أيضاً تعليمهم بأن التقدير هو عملية مجدية وذات قيمة. فخارج غرفة الصف وحصص الرياضيات يستعمل التلاميذ التقدير أكثر من إيجاد الأجوبة الدقيقة. إن طرح عدة أسئلة يومياً هي طريقة ناجعة لتقوية قدرة التلاميذ بالعمل بالكسور وتوصيل أهمية العملية بصورة مرنة بالكسور. يعرف المعلمون جيداً بأن التلاميذ في المرحلة الاعدادية "يتصارعون" مع الكسور، وكثير منهم يكتشف ضعفاً بالحس العددي وذلك عند إجراء عمليات حسابية بالكسور. كلنا أمل أن هذا النقاش سيشجعكم لتقييم فهم واستعمال تلاميذكم لـ "دالات" وأن تصبح "الدالات" جزءاً لا يتجزأ من منهج التعليم الخاص بالكسور في المرحلة الاعدادية.

## المصادر

Bezuk, Nadine S., and Marilyn Bieck. "Current Research on Rational Numbers and Common Fractions: Summary and Implications for Teachers." *In Research Ideas for the Classroom: Middle Grade Mathematics*, edited by Douglas T. Owens, 118-36. New York: Macmillan Publishing Co., 1992.